Variabili aleatorie (casuali)

Per variabile aleatoria (o casuale) si intende una variabile quantitativa che può assumere diversi valori con diverse probabilità. Si distinguono:

- Variabili aleatorie discrete (derivano ***generalmente*** da un processo di conteggio)
  - variabile aleatoria bernoulliana
  - variabile aleatoria binomiale
  - variabile aleatoria di Poisson
  - altre

- Variabili aleatorie continue (derivano ***generalmente*** da un processo di misurazione)
  - variabile aleatoria Normale
  - variabile aleatoria Chi-Quadrato
  - variabile aleatoria *t*-Student
  - variabile aleatoria F- di Fisher

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

La distribuzione ***di probabilità*** di una variabile aleatoria discreta è rappresentata dall'insieme delle modalità della variabile a ciascuna delle quali è associata la rispettiva probabilità.

Le modalità devono essere:

mutuamente esclusive (ogni modalità esclude le altre)

collettivamente esaustive (non esistono altre modalità)

La somma delle probabilità è pari a 1.

Variabili casuali discrete

Associano ad ogni modalità discreta una probabilità anziché una frequenza… in realtà è come se fossero delle frequenze relative!!!

Le modalità 10-20-30… indicano i tagli delle banconote in Euro contenute in una cassa. Secondo la tabella A DESTRA nel corso della settimana sono state osservate 6 banconote da 10 euro, quindi la probabilità di avere in cassa una banconota da 10 euro è 6 (casi favorevoli) su 29 (casi possibili), cioè 0.21

xi	p(xi)
10	0.21
20	0.1
30	0.07
40	0.28
50	0.34
totale	1

Come se fosse… →

xi	ni	fi
10	6	0.21
20	3	0.10
30	2	0.07
40	8	0.28
50	10	0.34
totale	29	

Valore atteso, varianza e scarto quadratico medio

Il valore atteso (media) di una variabile casuale discreta è una media ponderata delle modalità della variabile.
I pesi sono rappresentati dalle rispettive probabilità.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} XiPi$$

La varianza di una variabile casuale discreta è una media ponderata degli scarti (differenze) al quadrato tra ciascun valore della variabile e il suo valore atteso.
I pesi sono rappresentati dalle rispettive probabilità.

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{N} (X_i - E(X))^2 P(X_i)$$

Lo scarto quadratico medio σ è la radice quadrata della varianza.

Distribuzione di Bernoulli

Una prova con due possibili risultati: Successo/Insuccesso; Si/No; Presenza/Assenza

Esempio:
Lancio di una moneta (testa/croce)
Propensione all'acquisto di un prodotto da parte di un consumatore (si/no)

X~Bernoulli(π)

$$X \begin{cases} 1 \text{ (succ.) con prob. } \pi \\ 0 \text{ (insucc.) con prob. } 1-\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(X = x) = \pi^x (1-\pi)^{1-x}}$$

$$E(X) = \pi$$

$$V(X) = \pi \cdot (1-\pi)$$

La variabile aleatoria binomiale

La variabile aleatoria binomiale descrive il numero di successi in un campione di n osservazioni indipendenti.

Numero di successi: numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse.

La variabile aleatoria binomiale può assumere valori interi da 0 a n, ovvero $0, 1, 2, \ldots, n$.

La variabile aleatoria binomiale

Esempio: in un campione di $n=4$ pezzi prodotti da un macchinario, quanti pezzi possono essere difettosi?

Evento di interesse (successo): numero di pezzi difettosi.

I pezzi difettosi possono essere 0, 1, 2, 3, 4.

La variabile aleatoria binomiale

$$X = \text{numero di pezzi difettosi}$$

può assumere valori 0, 1, 2, 3, 4.

La variabile aleatoria binomiale

Sapendo che la probabilità di produrre un pezzo difettoso è 0.08, in un campione di n=4 pezzi

qual è la probabilità che ci siano due successi (due pezzi difettosi)?

qual è la probabilità che ci siano quattro successi (tutti pezzi difettosi)?

qual è la probabilità che ci siano zero successi (nessun pezzo difettoso)?

qual è la probabilità che ci siano almeno tre successi (tre o più pezzi difettosi; ≥ 3)?

qual è la probabilità che ci siano meno di due successi (non più di due pezzi difettosi; < 2)?

Distribuzione binomiale

Nella distribuzione binomiale la probabilità di osservare X successi è

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^{X} (1-p)^{n-X}$$

X rappresenta la somma di n v.c. di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite

La quantità $\frac{n!}{X!(n-X)!}$ indica il numero di modi in cui si possono selezionare X oggetti da un campione di n.

p rappresenta la probabilità del singolo evento.

n è la numerosità del campione.

La variabile aleatoria binomiale

Esempio: sapendo che la probabilità di produrre un pezzo difettoso è 0.08, la probabilità che in un campione di $n=4$ pezzi ci siano due pezzi difettosi è

$$P(X=2)=\frac{4!}{2!(4-2)!}0.08^2(1-0.08)^{(4-2)}$$

$$P(X=2)=6\ \ 0.08^2\ 0.92^2$$

$$P\,(X=2)=0.0325$$

La variabile aleatoria binomiale

Si dimostra che il valore atteso di una variabile aleatoria binomiale è dato da

$$\mu = E(X) = np$$

Si dimostra che la varianza e lo scarto quadratico medio di una variabile aleatoria binomiale sono

$$\sigma^2 = V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

La variabile aleatoria di Poisson

La variabile aleatoria di Poisson descrive il numero di successi in un intervallo continuo (tempo, spazio...).

Numero di successi: numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse.

Il numero di successi può essere 0, 1, 2, 3,...

Il numero di successi varia da 0 a ∞ (numeri interi).

La variabile aleatoria di Poisson

Esempio: quanti possono essere i clienti di una banca in una giornata?

Evento di interesse (successo): numero di clienti di una banca in una giornata.

I clienti possono essere 0, 1, 2, 3, …

La variabile aleatoria di Poisson

X = numero clienti di una banca in una giornata

può assumere valori 0, 1, 2, 3, …

La variabile aleatoria di Poisson

Sapendo che il numero medio di clienti di una banca in una giornata è 10

qual è la probabilità che ci siano cinque successi (cinque clienti)?

qual è la probabilità che ci siano otto successi (otto clienti)?

qual è la probabilità che ci siano più di un successo (più di un cliente; > 1)?

qual è la probabilità che ci siano meno di 3 successi (non più di tre pezzi difettosi; < 3)?

La variabile aleatoria di Poisson

Nella distribuzione di Poisson la probabilità di osservare X successi è

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!}$$

e rappresenta la costante di Nepero (2.71828)

λ è il numero atteso di successi nell'intervallo di tempo specificato

La variabile aleatoria di Poisson

Si dimostra che il valore atteso di una variabile aleatoria di Poisson è dato da

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Si dimostra che la varianza e lo s.q.m. di una variabile aleatoria di Poisson sono dati da

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$