

Variabili aleatorie (casuali)

Per variabile aleatoria (o casuale) si intende una variabile quantitativa che può assumere diversi valori con diverse probabilità. Si distinguono:

- Variabili aleatorie discrete (derivano *generalmente* da un processo di conteggio)

- variabile aleatoria bernoulliana
- variabile aleatoria binomiale
- variabile aleatoria di Poisson
- altre

- Variabili aleatorie continue (derivano *generalmente* da un processo di misurazione)

- variabile aleatoria Normale
- variabile aleatoria Chi-Quadrato
- variabile aleatoria t -Student
- variabile aleatoria F- di Fisher

La distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta

La distribuzione *di probabilità* di una variabile aleatoria discreta è rappresentata dall'insieme delle modalità della variabile a ciascuna delle quali è associata la rispettiva probabilità.

Le modalità devono essere:

mutuamente esclusive (ogni modalità esclude le altre)

collettivamente esaustive (non esistono altre modalità)

La somma delle probabilità è pari a 1.

Variabili casuali discrete

Associano ad ogni modalità discreta una probabilità anziché una frequenza... in realtà è come se fossero delle frequenze relative!!!

Le modalità 10-20-30... indicano i tagli delle banconote in Euro contenute in una cassa. Secondo la tabella A DESTRA nel corso della settimana sono state osservate 6 banconote da 10 euro, quindi la probabilità di avere in cassa una banconota da 10 euro è 6 (casi favorevoli) su 29 (casi possibili), cioè 0.21

x_i	$p(x_i)$
10	0.21
20	0.1
30	0.07
40	0.28
50	0.34
totale	1

Come se
fosse...
→

x_i	n_i	f_i
10	6	0.21
20	3	0.10
30	2	0.07
40	8	0.28
50	10	0.34
totale	29	

Valore atteso, varianza e scarto quadratico medio

Il valore atteso (media) di una variabile casuale discreta è una media ponderata delle modalità della variabile.

I pesi sono rappresentati dalle rispettive probabilità.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n X_i P_i$$

La varianza di una variabile casuale discreta è una media ponderata degli scarti (differenze) al quadrato tra ciascun valore della variabile e il suo valore atteso.

I pesi sono rappresentati dalle rispettive probabilità.

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^N (X_i - E(X))^2 P(X_i)$$

Lo scarto quadratico medio σ è la radice quadrata della varianza.

Distribuzione di Bernoulli

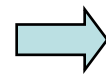
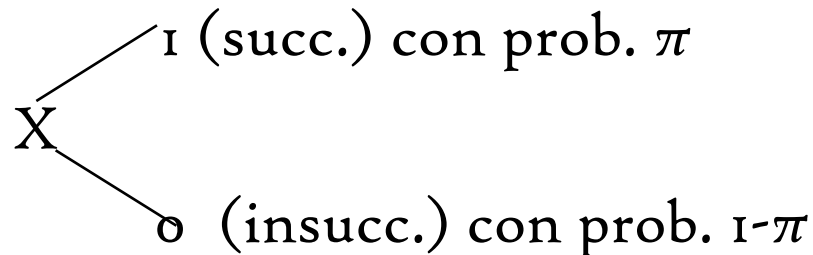
Una prova con due possibili risultati: Successo/Insuccesso;
Sì/No; Presenza/Assenza

Esempio:

Lancio di una moneta (testa/croce)

Propensione all'acquisto di un prodotto da parte di un
consumatore (sì/no)

$X \sim \text{Bernoulli}(\pi)$



$$P(X = x) = \pi^x (1 - \pi)^{1-x}$$

$$E(X) = \pi$$

$$V(X) = \pi \cdot (1 - \pi)$$

La variabile aleatoria binomiale

La variabile aleatoria binomiale descrive il numero di successi in un campione di n osservazioni indipendenti.

Numero di successi: numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse.

La variabile aleatoria binomiale può assumere valori interi da 0 a n , ovvero $0, 1, 2, \dots, n$.

La variabile aleatoria binomiale

Esempio: in un campione di $n=4$ pezzi prodotti da un macchinario, quanti pezzi possono essere difettosi?

Evento di interesse (successo): numero di pezzi difettosi.

I pezzi difettosi possono essere 0, 1, 2, 3, 4.

La variabile aleatoria binomiale

X = numero di pezzi difettosi

può assumere valori 0, 1, 2, 3, 4.

La variabile aleatoria binomiale

Sapendo che la probabilità di produrre un pezzo difettoso è 0.08, in un campione di $n=4$ pezzi

qual è la probabilità che ci siano due successi (due pezzi difettosi)?

qual è la probabilità che ci siano quattro successi (tutti pezzi difettosi)?

qual è la probabilità che ci siano zero successi (nessun pezzo difettoso)?

qual è la probabilità che ci siano almeno tre successi (tre o più pezzi difettosi; ≥ 3)?

qual è la probabilità che ci siano meno di due successi (non più di due pezzi difettosi; < 2)?

Distribuzione binomiale

Nella distribuzione binomiale la probabilità di osservare X successi è

$$P(X) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1-p)^{n-X}$$

X rappresenta la somma di n v.c. di Bernoulli indipendenti e identicamente distribuite

La quantità $\frac{n!}{X!(n-X)!}$ indica il numero di modi in cui si possono selezionare X oggetti da un campione di n .

p rappresenta la probabilità del singolo evento.

n è la numerosità del campione.

La variabile aleatoria binomiale

Esempio: sapendo che la probabilità di produrre un pezzo difettoso è 0.08, la probabilità che in un campione di $n=4$ pezzi ci siano due pezzi difettosi è

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} 0.08^2 (1 - 0.08)^{(4-2)}$$

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0.08^2 \cdot 0.92^2$$

$$P(X = 2) = 0.0325$$

La variabile aleatoria binomiale

Si dimostra che il valore atteso di una variabile aleatoria binomiale è dato da

$$\mu = E(X) = np$$

Si dimostra che la varianza e lo scarto quadratico medio di una variabile aleatoria binomiale sono

$$\sigma^2 = V(X) = np(1 - p)$$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$$

La variabile aleatoria di Poisson

La variabile aleatoria di Poisson descrive il numero di successi in un intervallo continuo (tempo, spazio...).

Numero di successi: numero di volte in cui si verifica l'evento di interesse.

Il numero di successi può essere 0, 1, 2, 3,...

Il numero di successi varia da 0 a ∞ (numeri interi).

La variabile aleatoria di Poisson

Esempio: quanti possono essere i clienti di una banca in una giornata?

Evento di interesse (successo): numero di clienti di una banca in una giornata.

I clienti possono essere 0, 1, 2, 3, ...

La variabile aleatoria di Poisson

X = numero clienti di una banca in una giornata

può assumere valori 0, 1, 2, 3, ...

La variabile aleatoria di Poisson

Sapendo che il numero medio di clienti di una banca in una giornata è 10

qual è la probabilità che ci siano cinque successi (cinque clienti)?

qual è la probabilità che ci siano otto successi (otto clienti)?

qual è la probabilità che ci siano più di un successo (più di un cliente; > 1)?

qual è la probabilità che ci siano meno di 3 successi (non più di tre pezzi difettosi; < 3)?

La variabile aleatoria di Poisson

Nella distribuzione di Poisson la probabilità di osservare X successi è

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!}$$

e rappresenta la costante di Nepero (2.71828)

λ è il numero atteso di successi nell'intervallo di tempo specificato

La variabile aleatoria di Poisson

Si dimostra che il valore atteso di una variabile aleatoria di Poisson è dato da

$$\mu = E(X) = \lambda$$

Si dimostra che la varianza e lo s.q.m. di una variabile aleatoria di Poisson sono dati da

$$\sigma^2 = V(X) = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$