Probabilità

La probabilità è definita come il grado di verosimiglianza con cui un evento è destinato a verificarsi in una prova

Una prova è un esperimento che può avere due o più possibili esiti e in cui esiste un certo grado d'incertezza: es. lancio di un dado o di 2/più dadi, estrazione a sorte di una pallina, lancio di una moneta, ecc…

Nel formulare le strategie di vendita e nel pianificare azioni di mkt è molto importante valutare la probabilità di acquisto di un prodotto, la probabilità di soddisfazione post-acquisto, ecc…

Pertanto, dalla definizione di probabilità secondo il concetto classico (a priori e empirico) si ha:

Probabilità = n.casi favorevoli / n.casi possibili

Approccio classico a priori

Il calcolo delle probabilità si basa su una pregressa conoscenza del fenomeno in esame

Esempio:

Probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte napoletane una carta di bastoni (nel quale le carte di bastoni sono in totale 10)

$$P(\text{carta bastoni}) = \frac{\text{casi} \quad \text{favorevoli}}{\text{casi} \quad \text{possibili}} = \frac{10}{40} = 0.25$$

Approccio classico empirico

Il calcolo delle probabilità si basa sull'osservazione di dati empirici relativi al fenomeno di interesse

Esempio:

Calcolo della probabilità di riacquisto di un televisore di una nota azienda X. Intervista a 300 clienti dell'azienda, 180 dei quali hanno riacquistato il televisore X.

$$P(\text{riacquisto televisore}) = \frac{\text{casi} \quad \text{favorevoli}}{\text{casi} \quad \text{possibili}} = \frac{180}{300} = 0.6$$

Probabilità

Se indichiamo con $P(A)$ la probabilità che si verifichi un evento A, tale probabilità può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 1 (estremi inclusi!)

$P(A) = 0 \longrightarrow$ l'evento A non ha possibilità di verificarsi (evento impossibile)

$P(A) = 1 \longrightarrow$ l'evento A sicuramente si verificherà (evento certo)

INDICANDO CON "A" UN EVENTO SEMPLICE E CON "B" UN ALTRO EVENTO SEMPLICE, ALLORA LA PROBABILITA' CHE in un prova SI VERIFICHI "A" e cioè:

P(A)

viene definita marginale (perché non considera l'evento B)

LA PROBABILITA' CHE in un prova SI VERIFICHI "B" e cioè :

P(B)

viene definita anch'essa marginale (perché non considera l'evento A)

ESEMPIO 1. LANCIANDO UN DADO, CALCOLIAMO LA PROBABILITA' CHE ESCA L'EVENTO A=3. Poiché in un dado c'è una sola faccia con il numero "3", allora esiste un unico caso favorevole, mentre tutti i casi possibili sono 6: può uscire in un lancio il numero 1,2,…6 Secondo la definizione di probabilità, si ha:

P(A=3)= n.casi favorevoli/n.casi possibili = 1/6

ESEMPIO 2. LANCIANDO UN DADO, CALCOLIAMO LA PROBABILITA' CHE ESCA L'EVENTO B=4. La probabilità rimane invariata e pari a:

P(B=4)=1/6

ESEMPIO 3. LANCIANDO UN DADO, CALCOLIAMO LA PROBABILITA' CHE ESCANO CONTEMPORANEAMENTE GLI EVENTI A=2 E B=6.

P(A=2 e B=4) = 0/6 = 0

ESEMPIO 4. LANCIANDO UN DADO, CALCOLIAMO LA PROBABILITA' CHE ESCA UN NUMERO COMPRESO TRA 1 E 6

P(C=n.qualsiasi) = 6/6 = 1

Probabilità e tabelle di contingenza (o a doppia entrata)

Il calcolo delle probabilità viene spesso effettuato dai dati di una tabella di contingenza.

In questo caso si possono calcolare:

1. probabilità marginali di singoli eventi
2. probabilità congiunte di 2 (o più) eventi (dipendenti o indipendenti)
3. probabilità dell'unione di 2 (o più) eventi (compatibili o incompatibili)
4. probabilità condizionate di 2 (o più) eventi

Probabilità Marginali

È possibile calcolare le probabilità anche in tabelle a doppia entrata dove P(A) è la probabilità associata al verificarsi di un evento semplice A e P(B) è la probabilità associata all'evento semplice B. In tabella sono riportati i risultati di un intervista che accerta le preferenze di 500 individui verso i prodotti di una determinata azienda

Sesso / Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

A= evento "uomo" e B = evento "donna"

La probabilità di scegliere un uomo tra i 500 intervistati è **P(A)=240/500=0.48** (240 uomini = casi favorevoli su 500 individui = casi possibili)

La probabilità di estrarre una donna è **P(B)=260/500=0.52**

Probabilità congiunta

La probabilità congiunta o dell'intersezione tra due eventi può riguardare 2 (o più) eventi dipendenti o indipendenti

- **Eventi dipendenti**
  - il verificarsi di B <u>influenza</u> la probabilità di A (A <u>dipende</u> da B) e, viceversa, il verificarsi di A <u>influenza</u> la probabilità di B (B <u>dipende</u> da A)
- **Eventi indipendenti**
  - il verificarsi di B <u>non influenza</u> la probabilità di A, (A non dipende da B) e viceversa!

Probabilità condizionata per eventi dipendenti

Esempio: Urna con 8 palline di cui: 5 rosse e 3 nere.

A= pallina nera B = pallina rossa. N. prove = 2 estrazioni consecutive

La probabilità marginale di B in una prima estrazione è 5 (casi favorevoli) su 8 (casi possibili) cioè:

P(B) = 5/8 = 0.625

Supponendo di aver estratto nella prima prova una pallina rossa (senza averla reinserita nell'urna!!!), qual è la probabilità di estrarre, in una seconda prova, una pallina nera???(N.B. nell'urna non ci saranno più 8 palline ma 7!!!)

Tale probabilità si scrive P(A/B) cioè: Probabilità di A condizionata al verificarsi dell'evento B

P(A | B)= 3/7 = 0.428

A e B sono <u>DIPENDENTI</u>, cioè il verificarsi di A dipende da B.

C'E' UN CONDIZIONAMENTO TRA A E B!!!

Indipendenza tra eventi

A e B si dicono statisticamente indipendenti se il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità dell'altro

Indicando con $P(A \mid B)$ la probabilità condizionata di A dato B, ossia la probabilità dell'evento A, sapendo che si è verificato l'evento B e con $P(B \mid A)$ la probabilità di B condizionata ad A

A e B sono indipendenti se

⇨ $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$

Probabilità condizionata per eventi indipendenti

Esempio: reinserendo la pallina rossa estratta nella prima prova, la probabilità di A (p.nera) nella seconda prova, non può essere influenzata dal verificarsi dell'evento B.

Il reinserimento della pallina rossa estratta nella prima prova non riduce il numero totale di palline nell'urna MA, AL CONTRARIO, RIDUCE LA PROBABILITA' DI A NELLA 2ª ESTRAZIONE

Da 0.43 a 0.38 (perché aumenta il denominatore!)

$P(A \mid B) = P(A) = 3/8 = 0.375$

Probabilità condizionate

Sesso / Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

A = si e B = donna C = uomo

La probabilità di selezionare una preferenza positiva dalle intervistate di sesso femminile è **$P(A|B) = 224/260$ = 0.86**

La probabilità di avere un uomo tra coloro che hanno espresso una preferenza positiva è **$P(C|A) = 136/360$ = 0.38**

Probabilità congiunta

Per **eventi dipendenti** la probabilità congiunta, P(A e B), è il prodotto tra due probabilità, una marginale e l'altra condizionata:

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) \quad \text{e} \quad P(A \text{ e } B) = P(A)\,P(B|A)$$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, DOVE IL MANCATO REINSERIMENTO CONDIZIONA IL VERIFICARSI DEGLI EVENTI NELLE ESTRAZIONI SUCCESSIVE RENDENDO, PERTANTO, GLI EVENTI STESSI DIPENDENTI, SI HA:

$$P(A \text{ e } B) = P(B)\,P(A \mid B) = 5/8 * 3/7 = 0.625*0.428 = 0.268$$

$$P(A \text{ e } B) = P(A)\,P(B \mid A) = 3/8 * 5/7 = 0.375*0.714 = 0.268$$

Per **eventi indipendenti** la probabilità congiunta, P(A e B), è il prodotto tra due probabilità marginali, non ci sono probabilità condizionate:

$$P(A \text{ e } B) = P(B)\,P(A) \longrightarrow P(A|B) = P(A)$$

ESEMPIO PRECEDENTE:

$$P(A \text{ e } B) = P(B)\,P(A) = 5/8 * 3/8 = 0.625 * 0.375 = 0.234$$

Probabilità dell'intersezione di due eventi (probabilità congiunte)

Per eventi dipendenti

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

Per eventi indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Regola moltiplicativa:
vale anche per più di 2 eventi,
a condizione che siano indipendenti

Probabilità condizionata

Per eventi dipendenti vale che

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilità condizionata di *A* dato B

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilità condizionata di B dato *A*

APPROCCIO FREQUENTISTA: ESEMPI

Probabilità congiunta = P(A e B) = è la probabilità che si verifichino contemporaneamente in una prova 2 eventi A e B
Si scrive anche $P(A \cap B)$ e si legge P(A intersecato B)

Sesso / Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

Indicando con A = uomini e con B = No (preferenza negativa)

Allora la probabilità di estrarre un individuo che sia uomo e che abbia espresso una preferenza negativa è:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) * P(B|A) = \cancel{240}/500 * 104/\cancel{240} = 104/500 = 0.208$$

Voglio un "no" tra gli "uomini"

Probabilità congiunta = P(A e B) = è la probabilità che si verifichino contemporaneamente <u>in una prova</u> 2 eventi A e B
Si scrive anche $P(A \cap B)$ e si legge P(A intersecato B)

Sesso / Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

Indicando con A = donne e con B = No (preferenza negativa)

Allora la probabilità di estrarre un individuo che abbia espresso una preferenza negativa e che sia donna:

P(A e B)= P(B) * P(A|B) = 140/500* 36/140 = 36/500 = 0.072

P(A e B)= P(A) * P(B|A) = 260/500* 36/260 = 36/500 = 0.072

Probabilità dell'unione

La probabilità dell'unione riguarda due eventi compatibili o incompatibili:

Eventi compatibili = eventi che possono verificarsi contemporaneamente

Esempio: lancio di un dado evento "A" numero pari ed evento "B" numero inferiore a 5. Sono compatibili perché le facce del dado 2 e 4 soddisfano entrambe le condizioni imposte dai due eventi A e B. esiste la probabilità che si verifichino insieme, esiste cioè P(A e B)

Eventi incompatibili = eventi che non possono verificarsi contemporaneamente, per i quali LA PROBABILITA' CONGIUNTA E' PARI A ZERO!

Esempio: lancio di un dado evento "A" numero dispari ed evento "B" numero pari. Sono incompatibili perché non esistono numeri contemporaneamente pari e dispari che possano soddisfare in un lancio entrambi gli eventi.

Nella tabella di prima esempio di eventi incompatibili:

A = uomo e B = donna

P(A e B) = 0

Probabilità dell'unione

La probabilità dell'unione, per eventi compatibili, è una somma di probabilità e si legge PROBABILITA' CHE SI VERIFICHI A OPPURE B:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

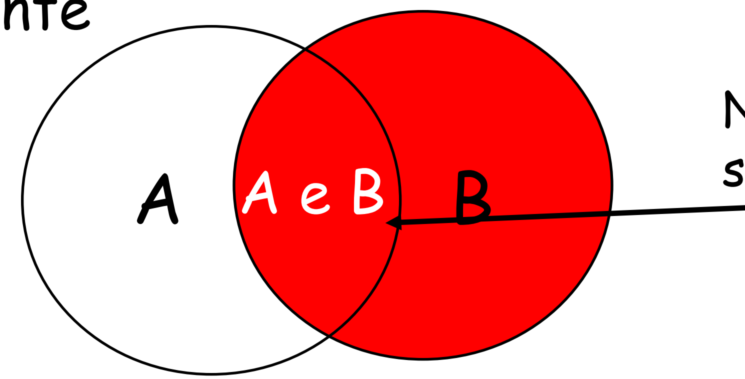
La probabilità dell'unione, per eventi incompatibili, è una somma di probabilità:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Sarebbe P(A) + P(B) – 0, poiché P(A e B) = 0 , A e B non possono verificarsi insieme!

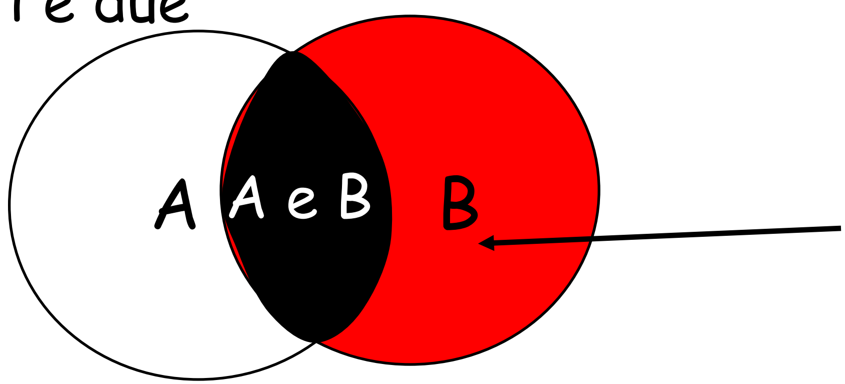
DIFFERENZE TRA INTERSEZIONE E UNIONE

La probabilità congiunta (probabilità dell'intersezione tra eventi) è la probabilità che 2 (o piu') eventi si verifichino contemporaneamente



Noi calcoliamo solo P(A e B)

La probabilità dell'unione è la probabilità si verifichi o l'uno o l'altro ma non tutti e due



Noi eliminiamo P(A e B)

Probabilità dell'unione = P(A o B)
è la probabilità della somma tra due eventi
E si scrive anche P(A U B)
(per eventi compatibili)

Sesso Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

Compatibili = Se possono verificarsi entrambi!!!

P(Uomini o No)= P(Uomini) + P(No) - P(Uomini e No)
P(Uomini o No)= 240/500 + 140/500 - 104/500=0.552

P(Donne o No)= P(Donne) +P(No) - P(Donne e No)
P(Donne o No)= 260/500 + 140/500 - 36/500 = 0.728

Probabilità condizionata

Sesso Preferenze	Uomini	Donne	totale
Si	136	224	360
No	104	36	140
Totale	240	260	500

A = uomini e B = Si

P(A | B) = P(A e B) / P(B) = 136/500 : 360/500= 0.37

P(B | A) = P(A e B) / P(A) = 136/240= 0.56

A e B sono eventi statisticamente dipendenti!

APPROCCIO CLASSICO: ESEMPI

Estrazione di due carte da un mazzo di carte napoletane: **Figura e Coppe**

F : figura **e** C : carta di coppe

$$\boxed{P(F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{10}{40}}$$

$$\boxed{P(F \cap C) = P(F \mid C) \cdot P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{40} = \frac{3}{40}}$$

F e C sono indipendenti perché

$$P(F \mid C) = P(F)$$

Estrazione di due carte da un mazzo di carte napoletane:

Figura o Coppe

F : figura **o** C : carta di coppe

F e C sono compatibili (Figura di coppe)

$$P(F \cup C) = P(F) + P(C) - P(F \cap C) = \frac{3}{10} + \frac{10}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

Estrazioni da un'urna

Un'urna contiene **<u>10</u>** palline, 8 rosse e 2 nere.

Si estrae una pallina. Qual è la probabilità che sia nera? $P(N) = \frac{2}{10} = 0{,}20$

Si effettuano <u>due estrazioni</u>, **senza reimmissione**.

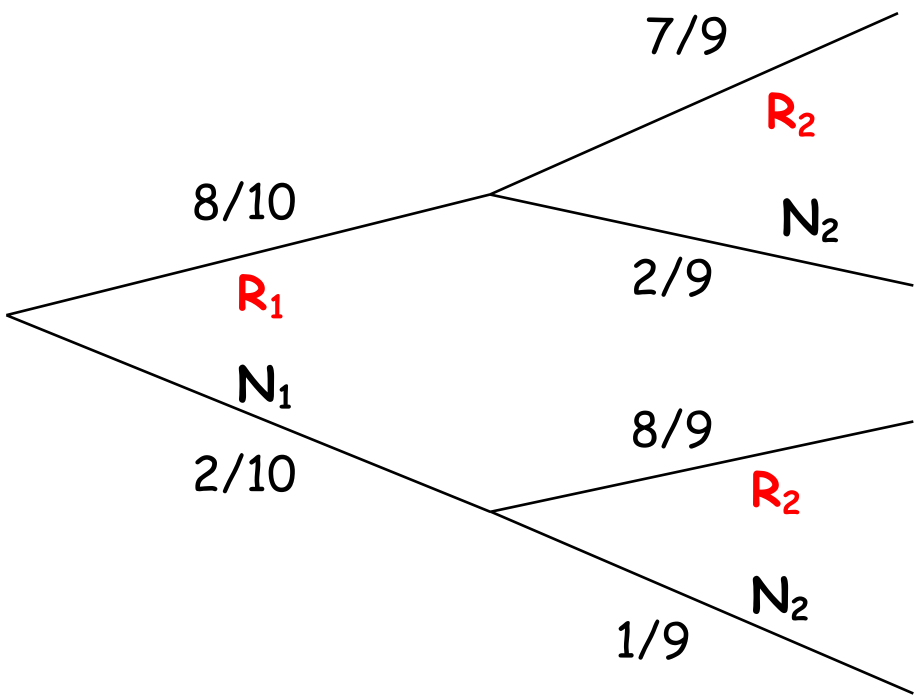
Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera alla seconda estrazione?

$$P(N_2) = P\big((R_1 \text{ e } N_2) \text{ o } (N_1 \text{ e } N_2)\big) = P\big((R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap N_2)\big) =$$

$$= P(R_1) \cdot P(N_2 \mid R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2 \mid N_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}20$$

Albero di probabilità per l'estrazione da un'urna **senza ripetizione**

Prima estrazione | Seconda estrazione



Spazio campionario	Probabilità
$R_1\ R_2$	8/10*7/9=0,62
$R_1\ N_2$	8/10*2/9=0,18
$N_1\ R_2$	2/10*8/9=0,18
$N_1\ N_2$	2/10*1/9=0,02

Albero di probabilità per l'estrazione da un'urna senza ripetizione

L'evento "pallina nera alla seconda estrazione" si verifica quando si verifica l'evento R_1N_2 **oppure** N_1N_2

I due eventi sono **incompatibili**
La probabilità della loro unione è uguale alla somma delle rispettive probabilità
(0,18+0,02=0,20)

Spazio campionario	Probabilità
R_1 R_2	8/10*7/9=0,62
R_1 N_2	8/10*2/9=0,18
N_1 R_2	2/10*8/9=0,18
N_1 N_2	2/10*1/9=0,02

Estrazioni da un'urna

Un'urna contiene 10 numeri.

Si effettuano due estrazioni, senza reimmissione.

Qual è la probabilità di estrarre "una coppia qualsiasi" di numeri A_1 e A_2?

Se estraggo prima A_1 e poi A_2 (un ramo dell'albero)

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90}$$

Se estraggo prima A_2 e poi A_1 (un ramo dell'albero)

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 \mid A_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90}$$

Estrazioni da un'urna

L'evento H "estrazione di una coppia qualsiasi di numeri A_1 e A_2" si verifica quando si percorre uno qualsiasi dei due rami dell'albero di probabilità [A_1 A_2] o [A_2 A_1] .

I due rami corrispondono ad eventi incompatibili.

La probabilità della loro unione è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi (regola additiva)

$$P(H) = \frac{1}{90} \cdot 2 = \frac{1}{45}$$

Probabilità di fare "6" al Superenalotto

Si effettuano 6 estrazioni senza reimmissione da un'urna che contiene 90 numeri.

La probabilità di estrarre una sestina qualsiasi di numeri è

$$\frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{1}{87}\cdot\frac{1}{86}\cdot\frac{1}{85}$$

Quante sono le sestine di numeri che differiscono tra di loro solo per l'ordine in cui sono estratti i sei numeri?

Tante quanto il numero delle permutazioni di 6 elementi

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$$

La probabilità di vincere con il "6" è

$$P = \frac{1}{90}\cdot\frac{1}{89}\cdot\frac{1}{88}\cdot\frac{1}{87}\cdot\frac{1}{86}\cdot\frac{1}{85}\cdot 720 = \frac{1}{622.614.630}$$