

**Titolo unità didattica:** Formule ricorrenti

[12]

**Titolo modulo :** Formula di Fibonacci

[02-T]

Interpretazione, proprietà e algoritmi di calcolo della successione di Fibonacci

Argomenti trattati:

- ✓ la formula ricorrente di Fibonacci
- ✓ algoritmo iterativo per il calcolo dell' $n$ -simo numero di Fibonacci
- ✓ interpretazione modellistica
- ✓ alcune proprietà della successione di Fibonacci
- ✓ la sezione aurea

Prerequisiti richiesti: P1-12-01-T

formula di Fibonacci

formula ricorrente del II ordine a  
coefficienti costanti

$$k \geq 2$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$y_0 = 0 \quad y_1 = 1$$

$y_k$

è il  $k$ -simo numero di Fibonacci



Leonardo Pisano "Fibonacci"  
(filius Bonacci) 1170 -1250

# formula di Fibonacci

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$k \geq 2$$

0,1,1

$\underbrace{+}_{1}$

2° numero di Fibonacci

# formula di Fibonacci

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$k \geq 2$$

0,1,1,2

$\underbrace{\quad}_{+}$   
2

3° numero di Fibonacci

# formula di Fibonacci

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$k \geq 2$$

0,1,1,2,3

$\underbrace{\quad}_{+}$   
3

4° numero di Fibonacci

# formula di Fibonacci

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$k \geq 2$$

0,1,1,2,3,5

$\begin{array}{c} + \\ \hline 5 \end{array}$

5° numero di Fibonacci

# formula di Fibonacci

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

$$k \geq 2$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

12° numero di Fibonacci



## Torino, Mole Antonelliana



*il volo dei numeri* (Mario Merz),  
l'inizio della successione di Fibonacci  
che s'innalza verso il cielo



# Napoli, stazione Metro 1 piazza Vanvitelli



inizio della successione di Fibonacci  
e spirale di Fibonacci

```

int fibonacci(int n) {
    int k, fibo, fibo_prec_1, fibo_prec_2;
    if (n == 0 || n == 1)
        { fibo = n ; }
    else {
        fibo_prec_1 = 1 ;
        fibo_prec_2 = 0 ;
        for (k=2; k<=n; k++) {
            fibo = fibo_prec_1+fibo_prec_2 ;
            fibo_prec_2 = fibo_prec_1 ;
            fibo_prec_1 = fibo ;
        }
    }
    return fibo ;
}

```

$T(n) = n-1$   
somme

aggiornamento della "memoria"

# interpretazione modellistica della formula di Fibonacci

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

simulazione della dinamica di  
una popolazione di conigli

- evoluzione a **tempo discreto** di una **popolazione di conigli**
- $k$  è il **mese** della simulazione
- $y_k$  è il numero di **coppie** di conigli al  $k$ -simo mese

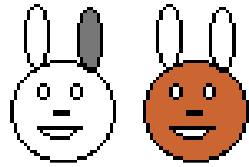
# interpretazione modellistica della formula di Fibonacci

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

simulazione della dinamica di  
una popolazione di conigli

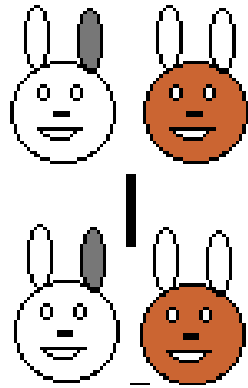
ipotesi:

- ✓ nessun coniglio muore
- ✓ ogni coppia genera una coppia di figli ogni mese, a partire dal secondo mese di anzianità
- ✓ la gestazione dura un mese



numero di  
coppie

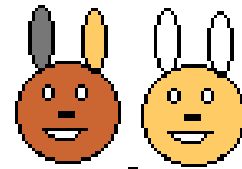
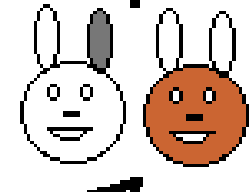
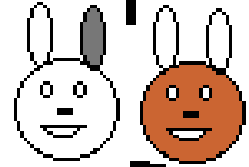
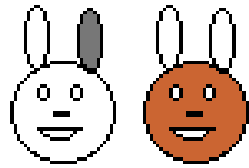
1



numero di  
coppie

1

1

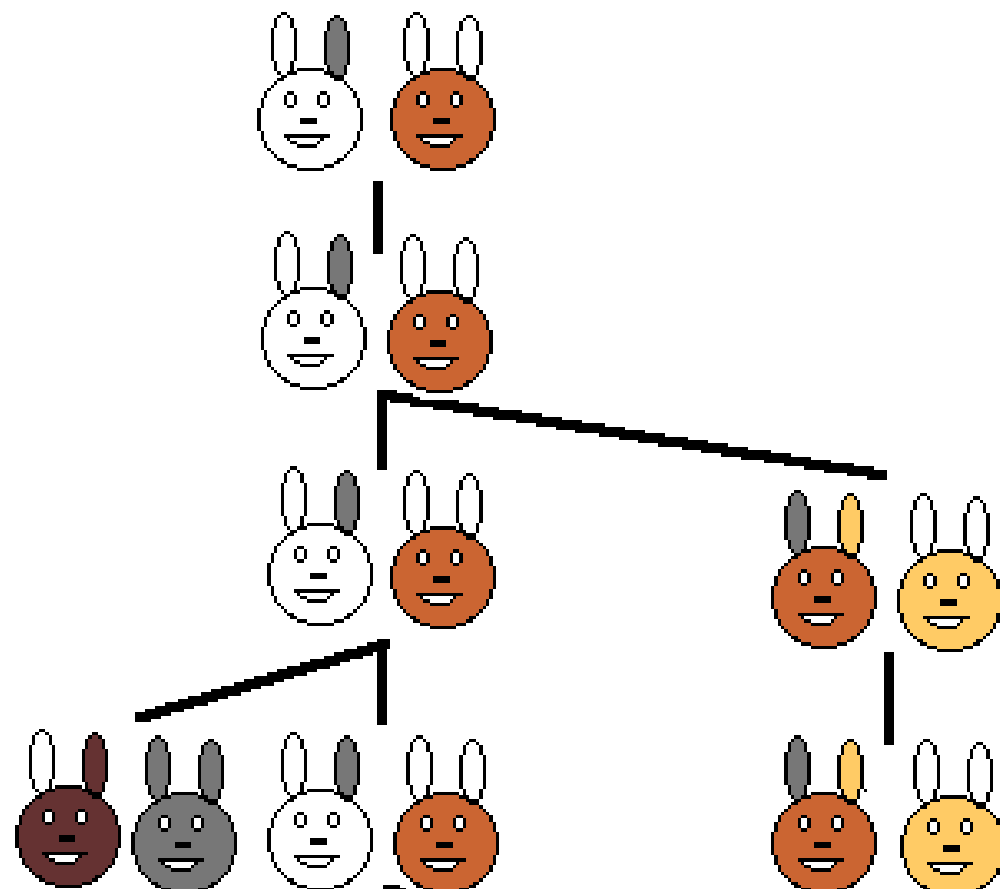


numero di  
coppie

1

1

2



numero di  
coppie

1

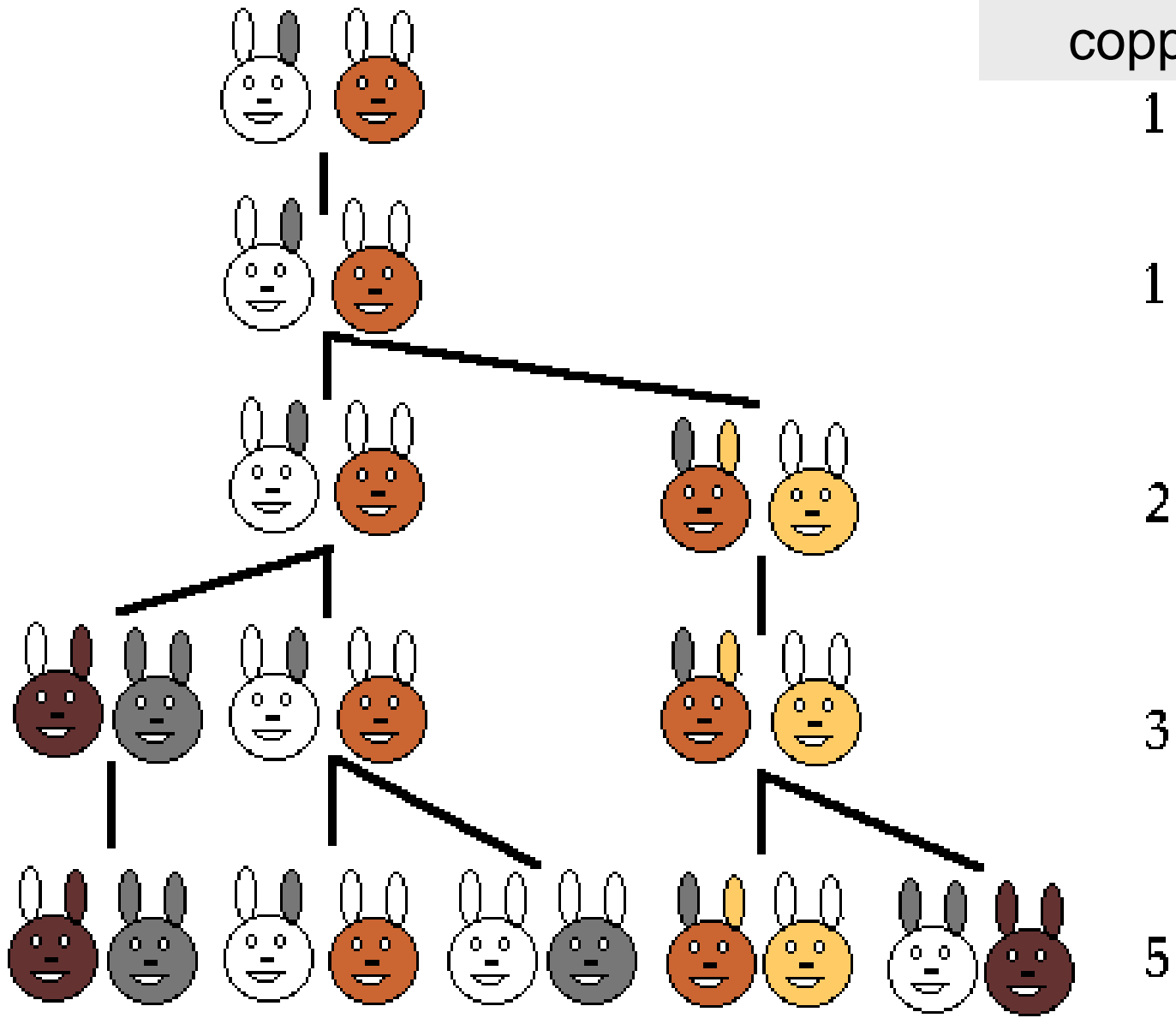
1

2

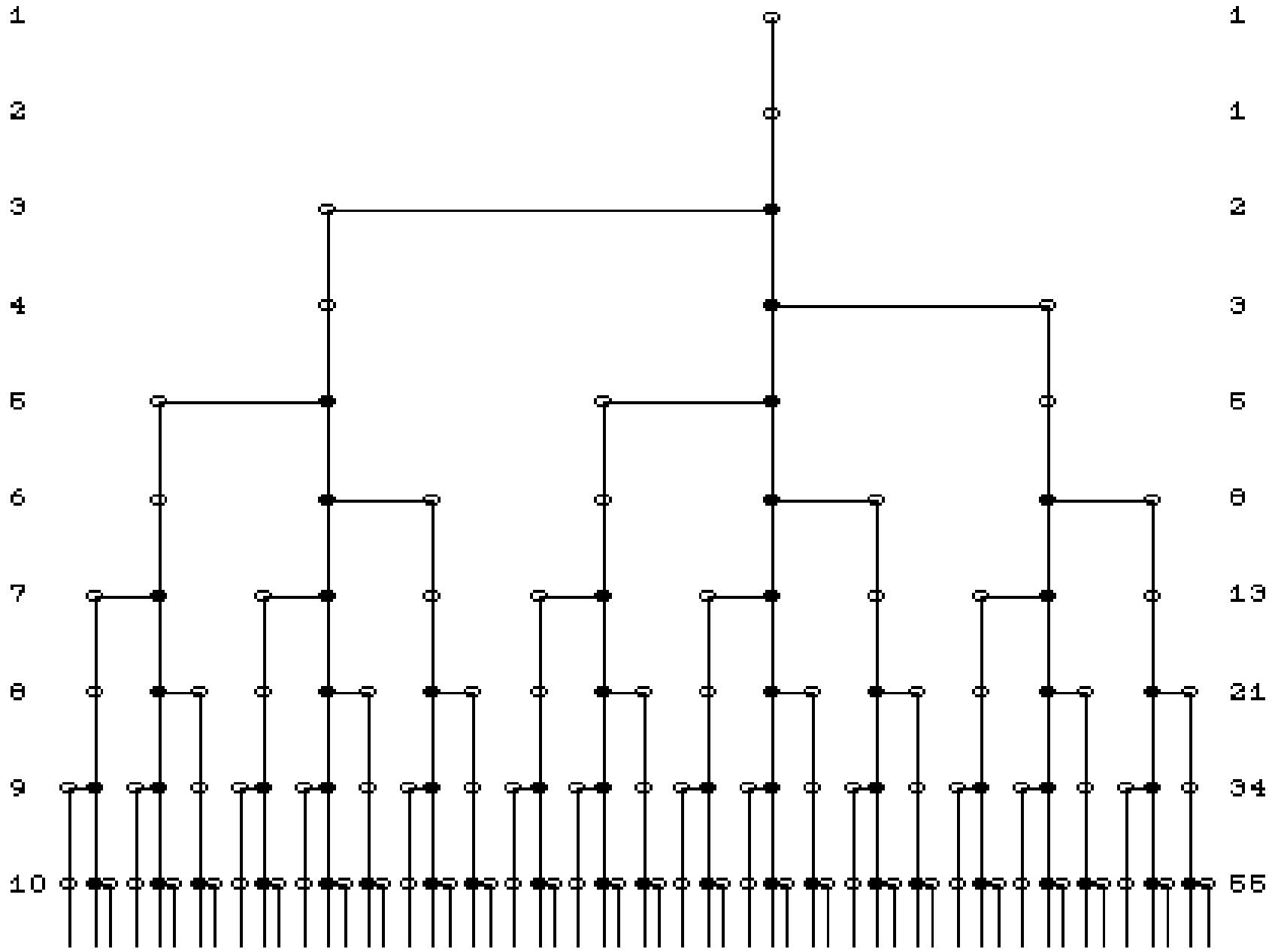
3



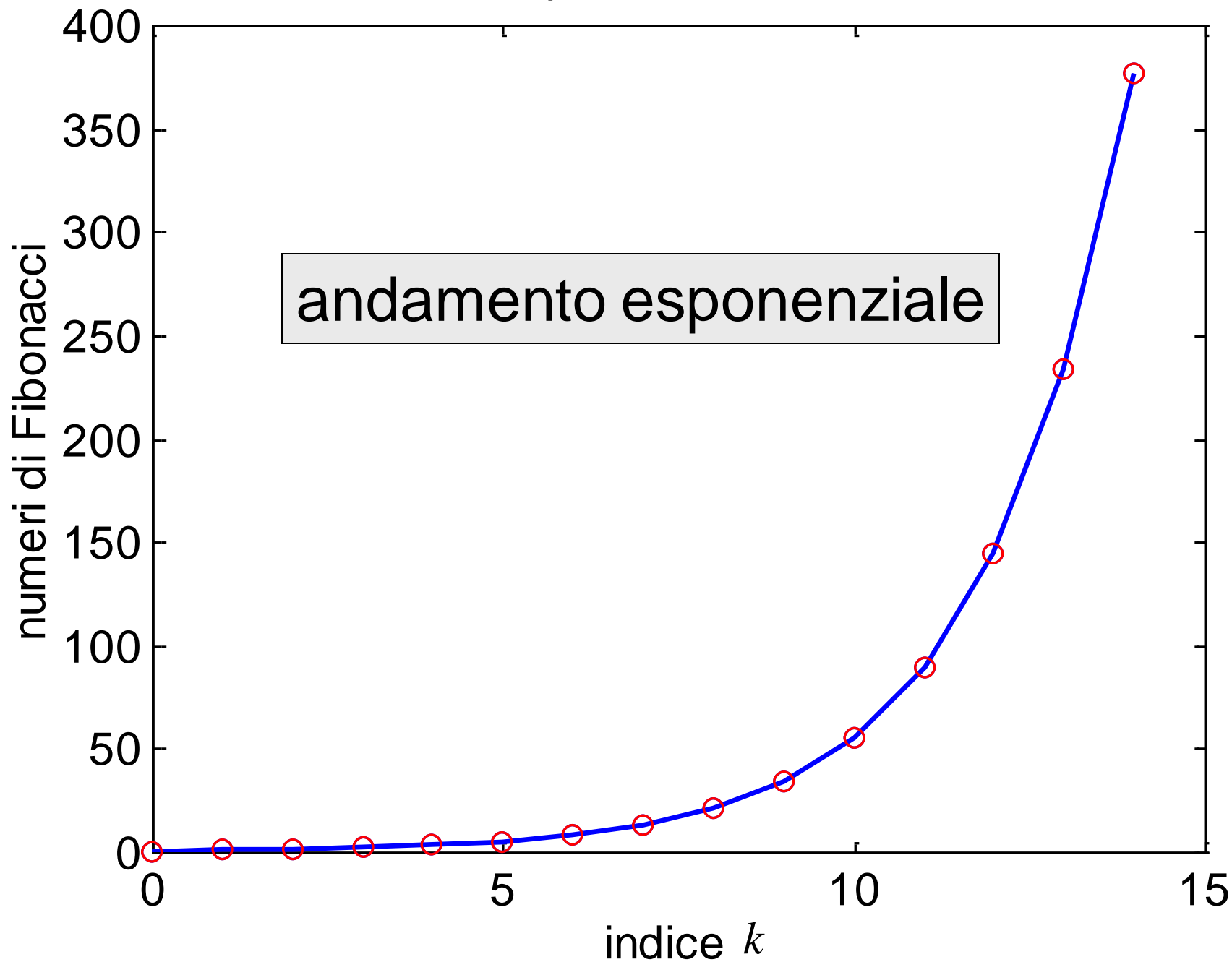
numero di  
coppie

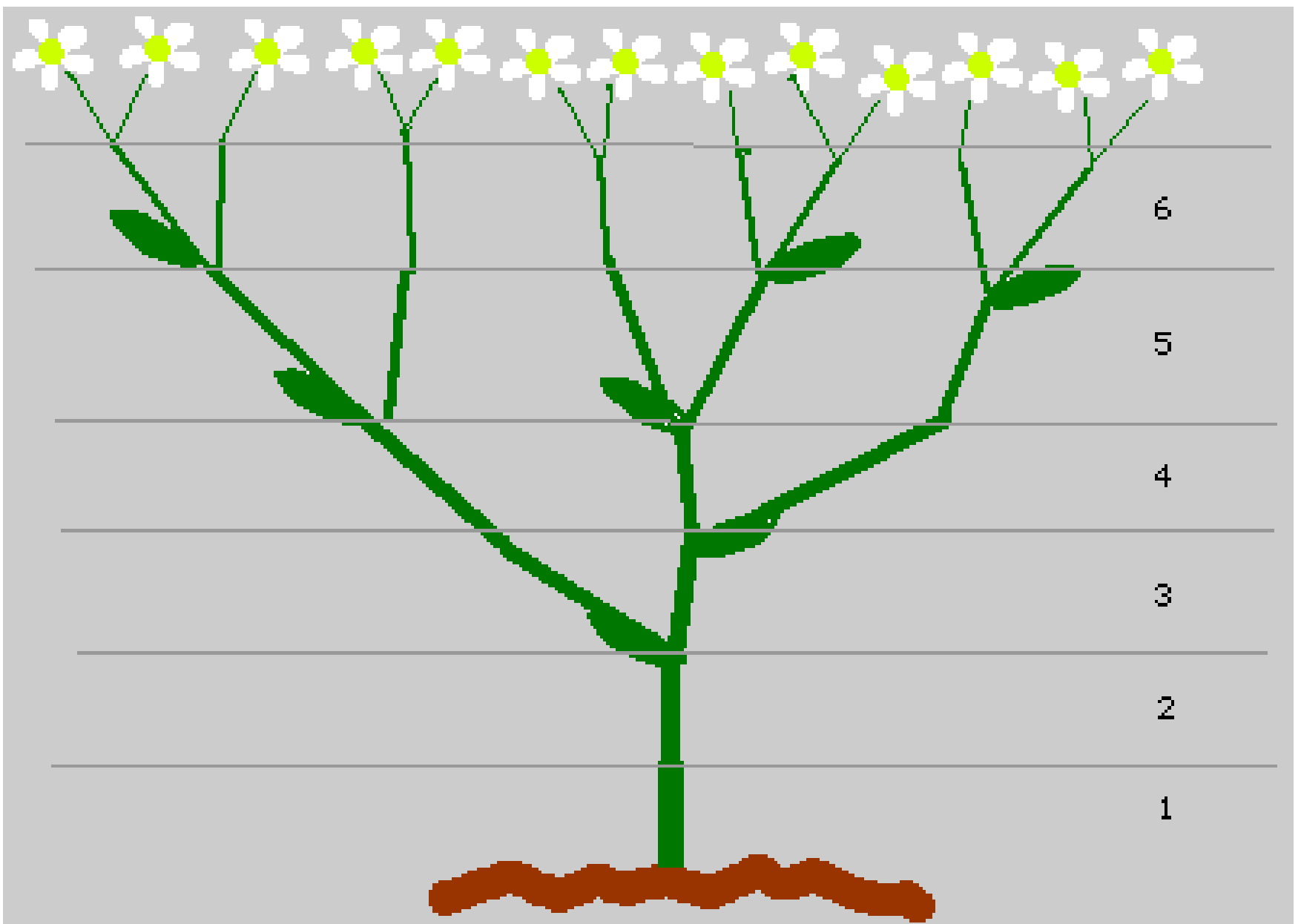


# albero genealogico dei conigli



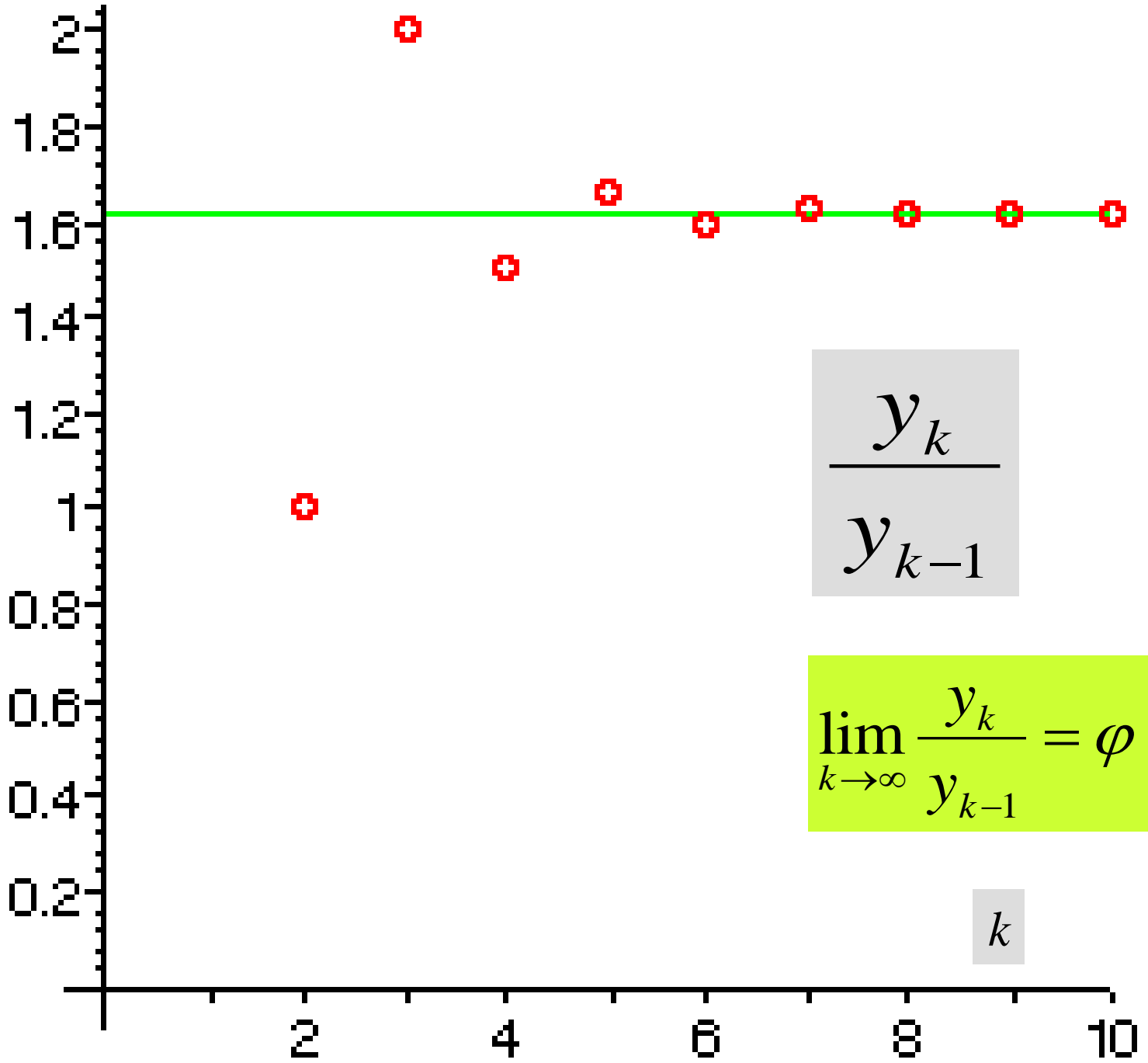
andamento dei primi 15 numeri di Fibonacci





le **diramazioni** del tronco di un albero seguono la successione di Fibonacci

$\varphi$



$$\frac{y_k}{y_{k-1}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{y_{k-1}} = \varphi$$

$k$

il numero

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988\dots$$

è la **sezione aurea** o **rappporto aureo**  
(*golden section* o *golden ratio*)

# proprietà della **sezione aurea** (rapporto aureo)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{y_{k-1}} = \varphi$$

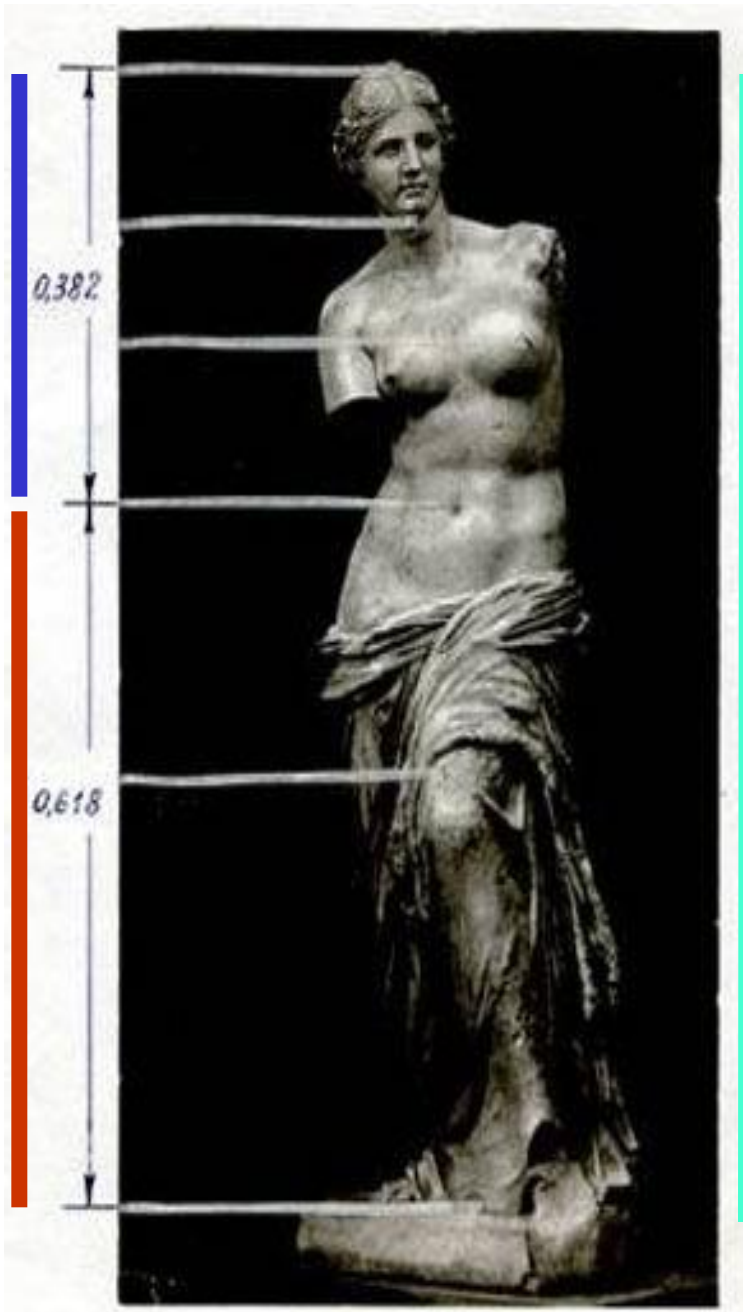
espressione esplicita del  $k$ -simo numero di Fibonacci:

$$y_k = \frac{\varphi^k - (1 - \varphi)^k}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^k - (-\varphi)^{-k}}{\sqrt{5}}$$

unico numero positivo che gode della proprietà

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = 1.618 - 1 = 0.618$$



1

il **segmento rosso**  
e il  
**segmento blu**  
sono in **rappporto aureo**



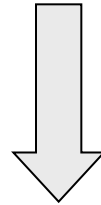
lunghezza del **segmento rosso**

lunghezza del **segmento blu**

=  $\varphi$



il **segmento rosso**  
e il  
**segmento blu**  
sono in **rappporto aureo**

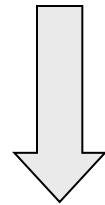


lunghezza del **segmento rosso**  
=  $\varphi$   
lunghezza del **segmento blu**



$$\frac{A}{B} = \varphi = \frac{A+B}{A}$$

# il **calibro** (*gauge*) di Fibonacci



lunghezza del **segmento rosso**

lunghezza del **segmento blu**

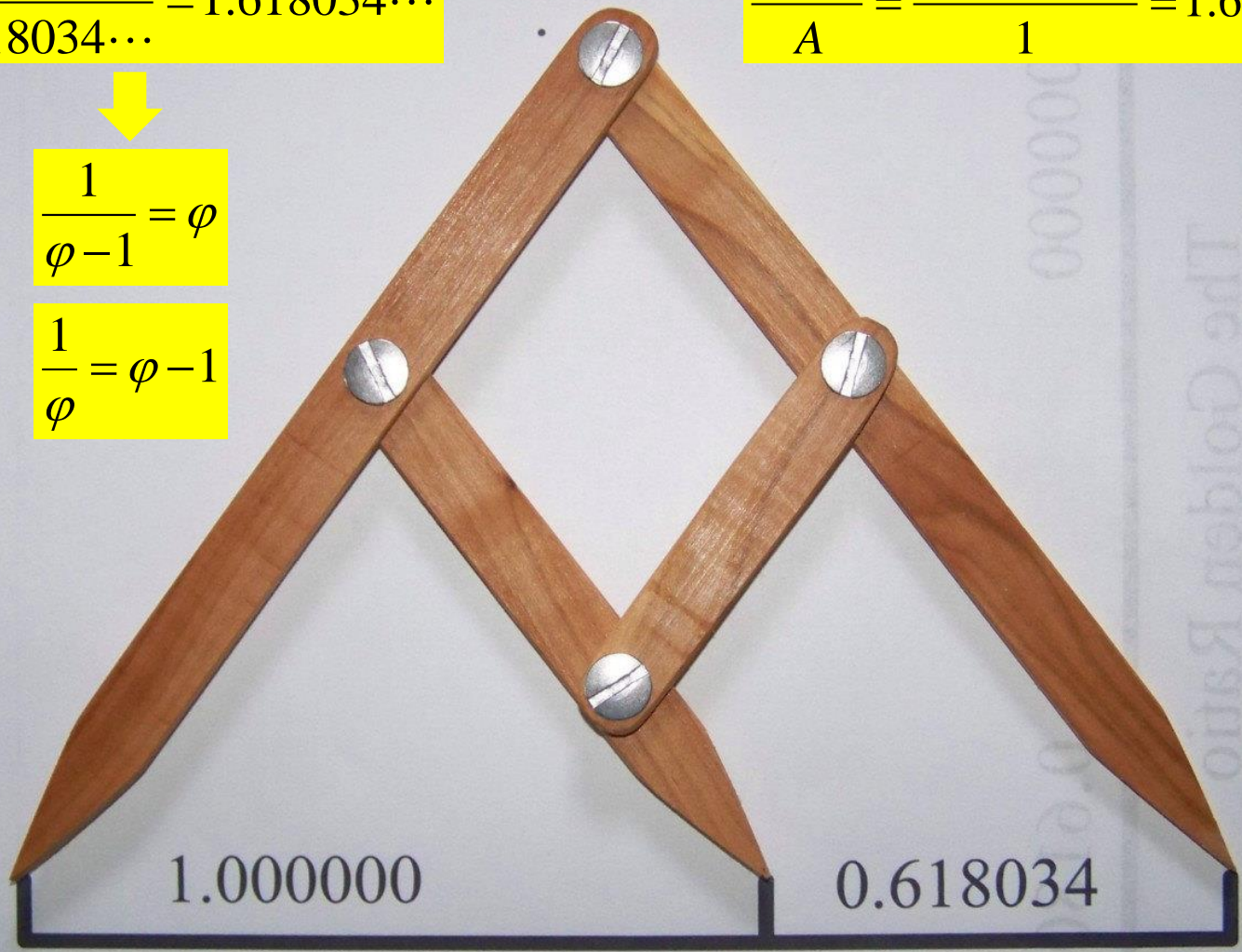
$$= \varphi$$

$$\frac{A}{B} = \frac{1.000000}{0.618034\dots} = 1.618034\dots$$

$$\frac{A+B}{A} = \frac{1.618034\dots}{1} = 1.618034\dots$$

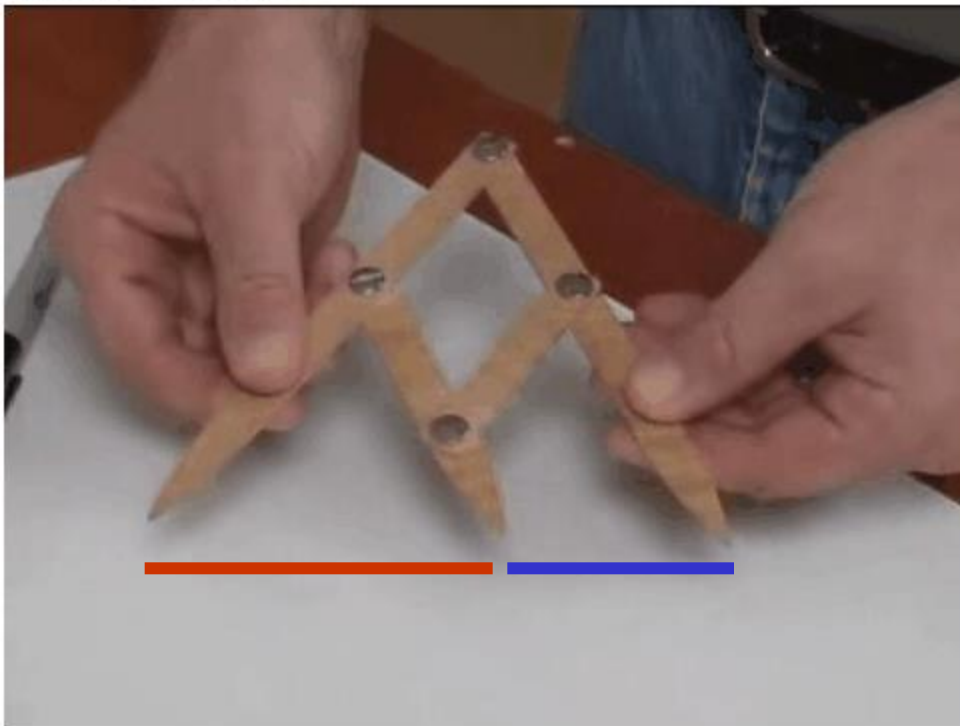
$$\frac{1}{\varphi - 1} = \varphi$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

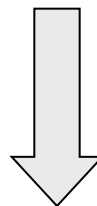
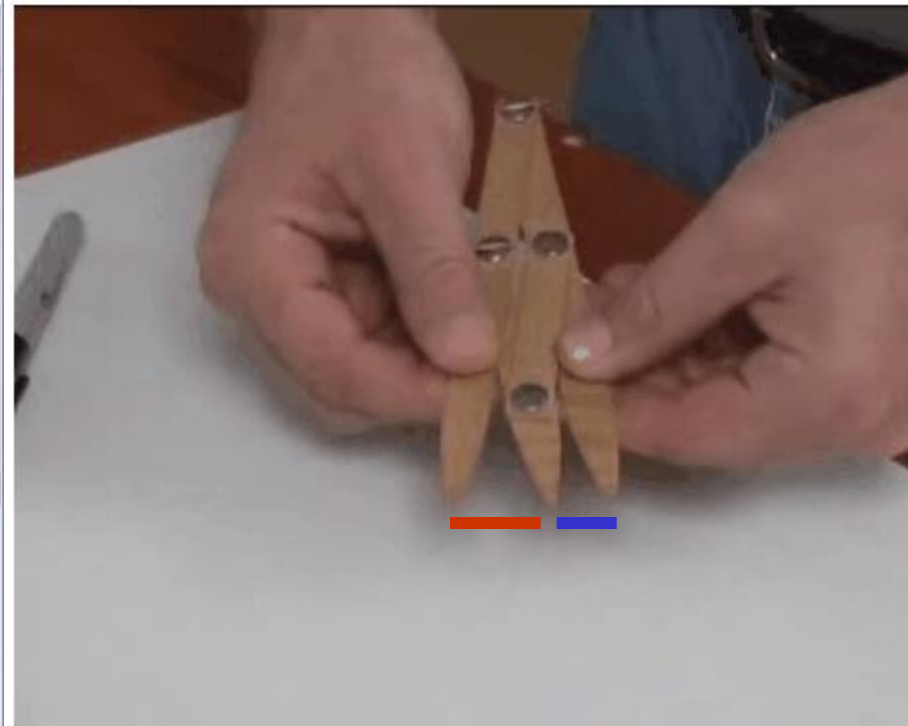


The Golden Ratio  
1.618034...

Fibonacci Gauge



Fibonacci Gauge



$$\frac{\text{lunghezza del segmento rosso}}{\text{lunghezza del segmento blu}} = \varphi$$



**Fibonacci Gauge**



**Fibonacci Gauge**



**Fibonacci Gauge**



Fibonacci Gauge



A

Fibonacci Gauge

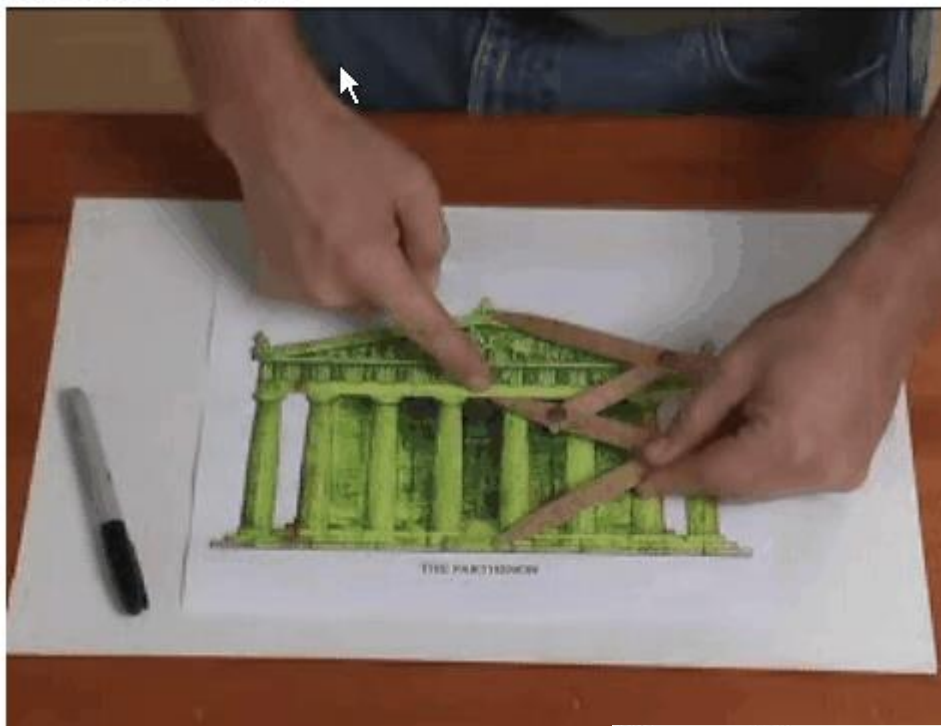


B



$$\frac{A + B}{A} = \frac{A}{B} = \varphi$$

Fibonacci Gauge



Fibonacci Gauge



Fibonacci Gauge



l'**aspetto** di un rettangolo è il **rapporto** tra lato minore e lato maggiore

1

2

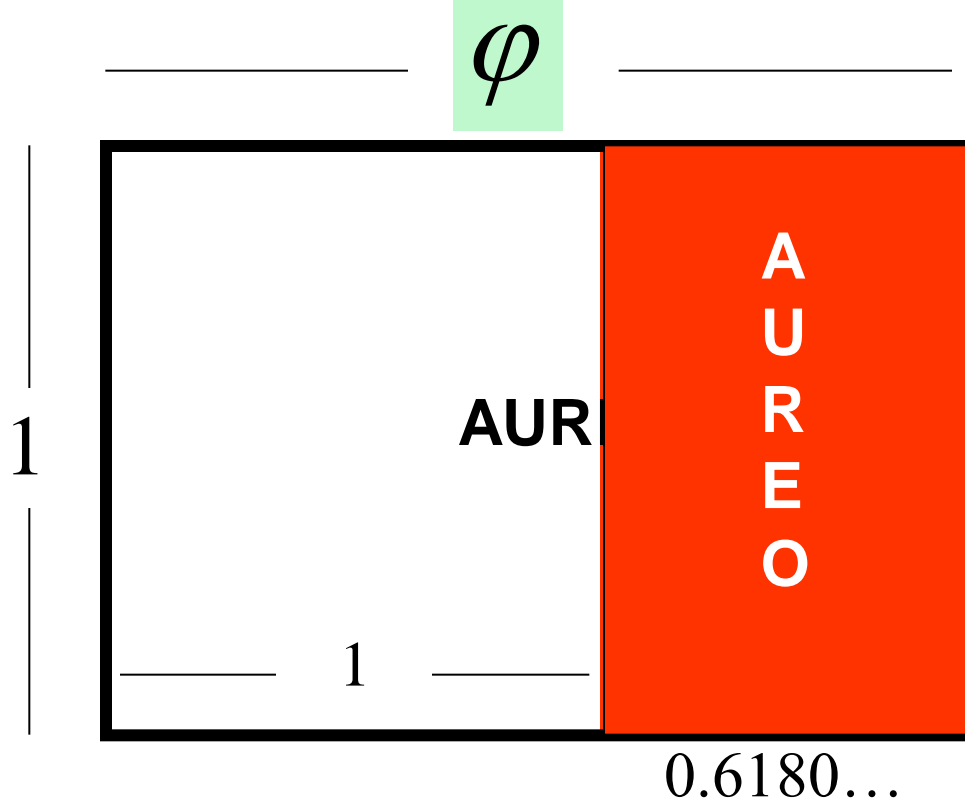


$$\text{aspetto} = \frac{1}{2}$$



rettangolo aureo

l'**aspetto** di un rettangolo è il **rapporto** tra lato minore e lato maggiore



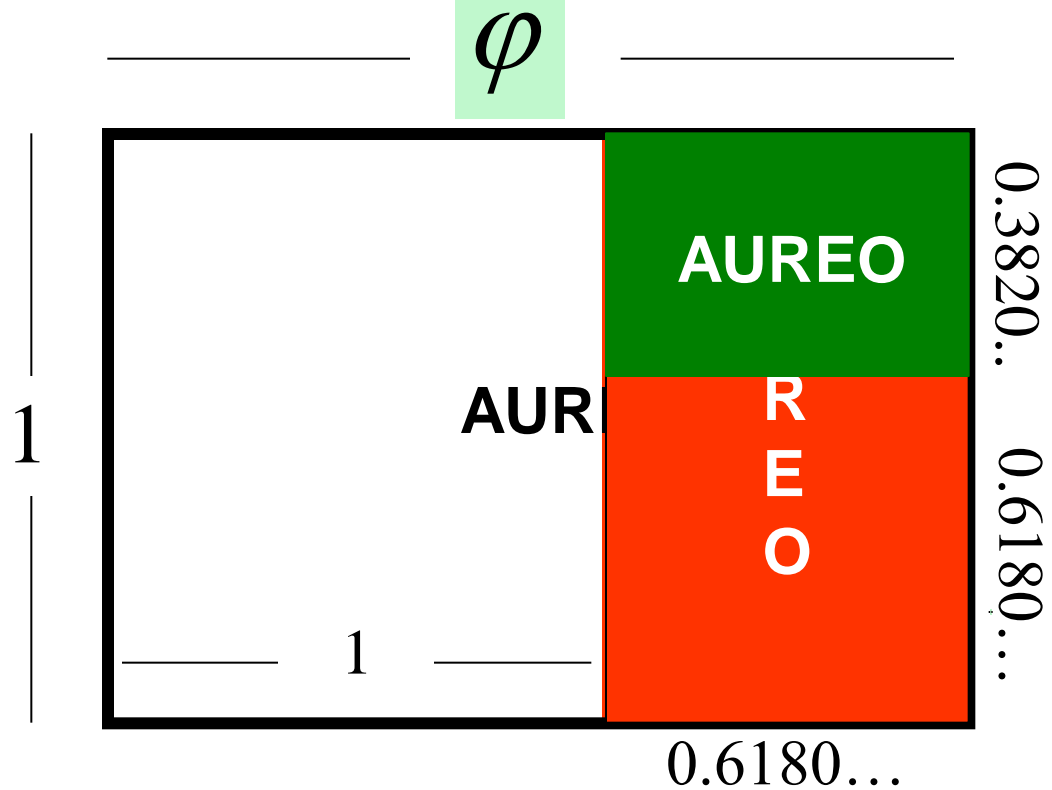
un **rettangolo aureo** ha **aspetto** uguale all'**inverso della sezione aurea**

$$\text{aspetto} = \frac{1}{\varphi} = 0.6180\dots$$

$$\text{aspetto} = \frac{\varphi - 1}{1} = 0.6180\dots$$

rettangolo aureo

l'**aspetto** di un rettangolo è il **rapporto** tra lato minore e lato maggiore

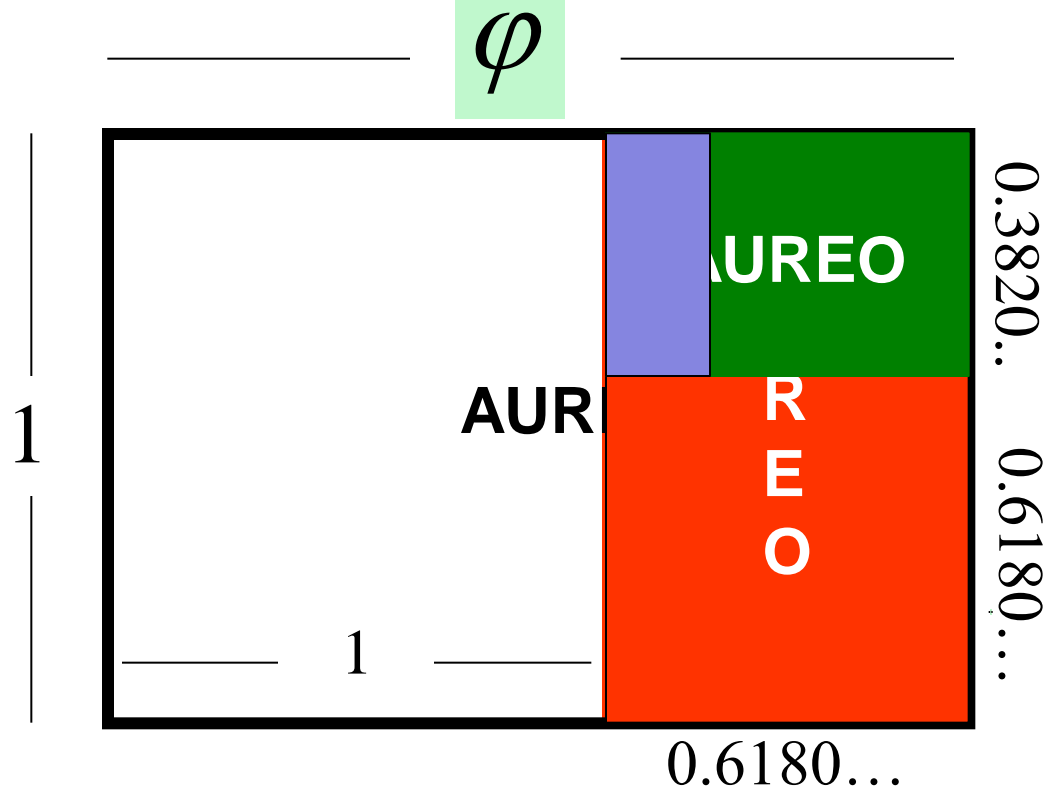


un rettangolo aureo ha **aspetto** uguale all'**inverso della sezione aurea**

$$\text{aspetto} = \frac{\varphi - 1}{1} = 0.6180\dots \quad \text{aspetto} = \frac{2 - \varphi}{\varphi - 1} = \frac{0.3820}{0.6180} = 0.6180\dots$$

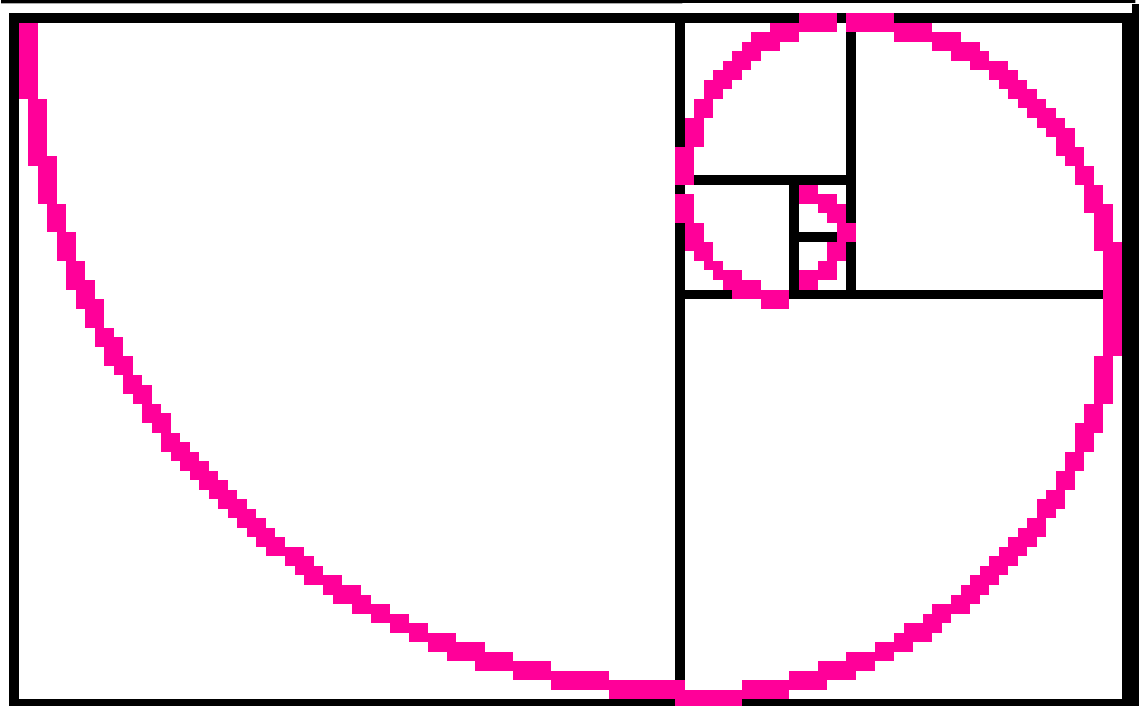
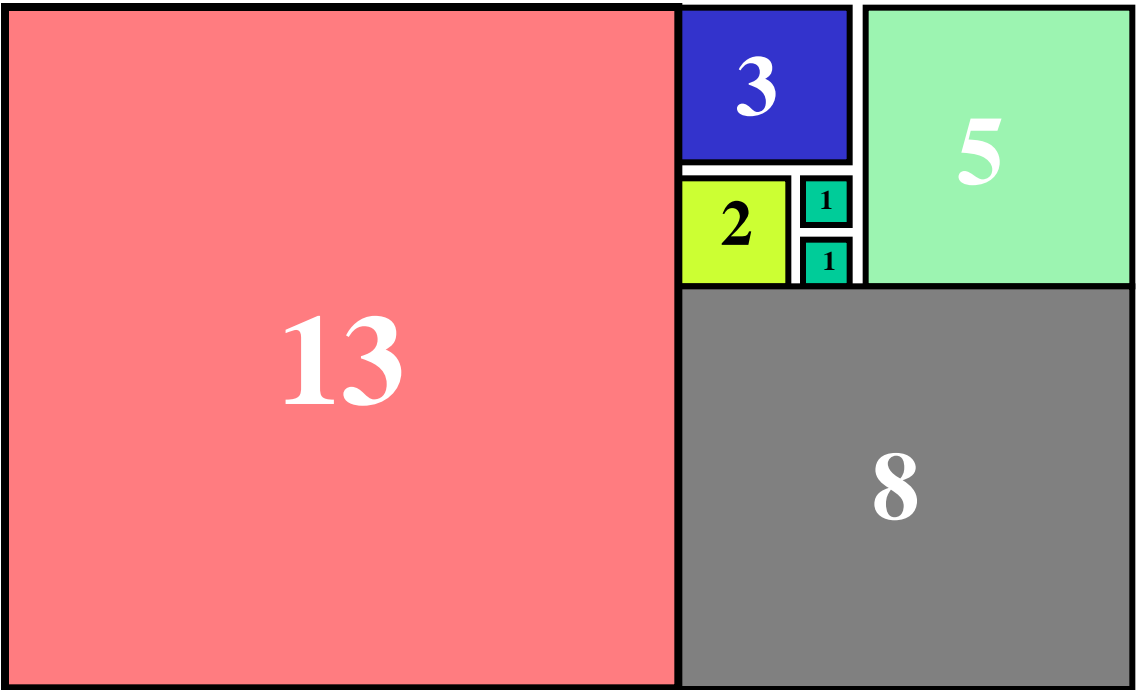
rettangolo aureo

l'**aspetto** di un rettangolo è il **rappporto** tra lato minore e lato maggiore

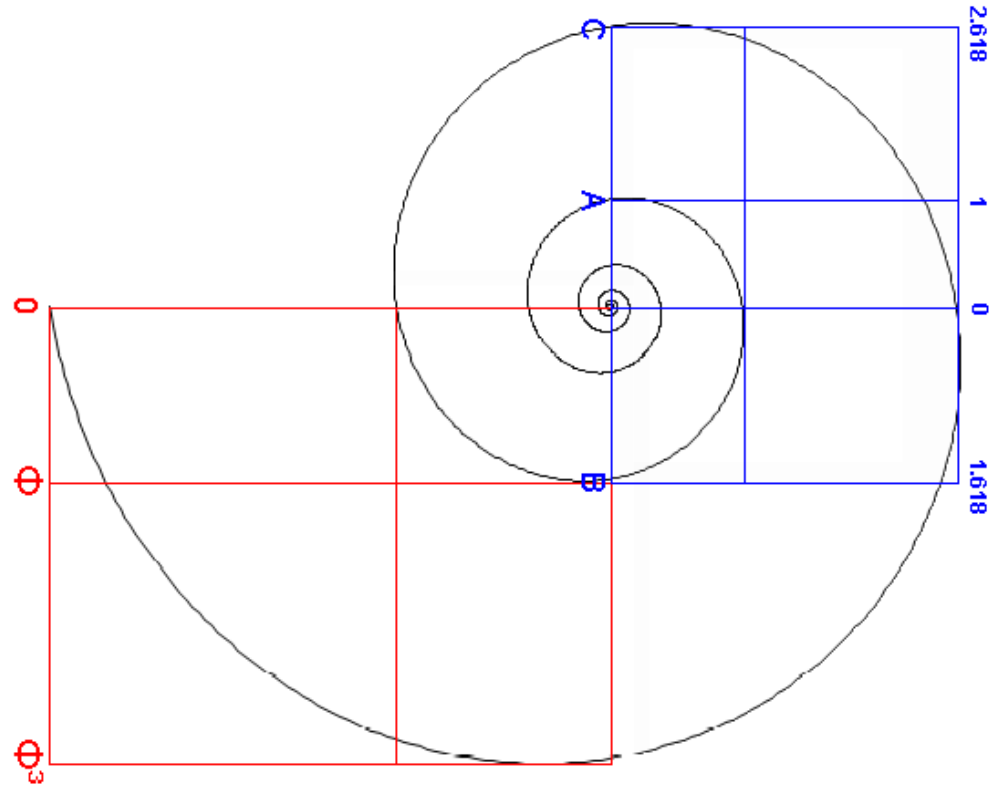


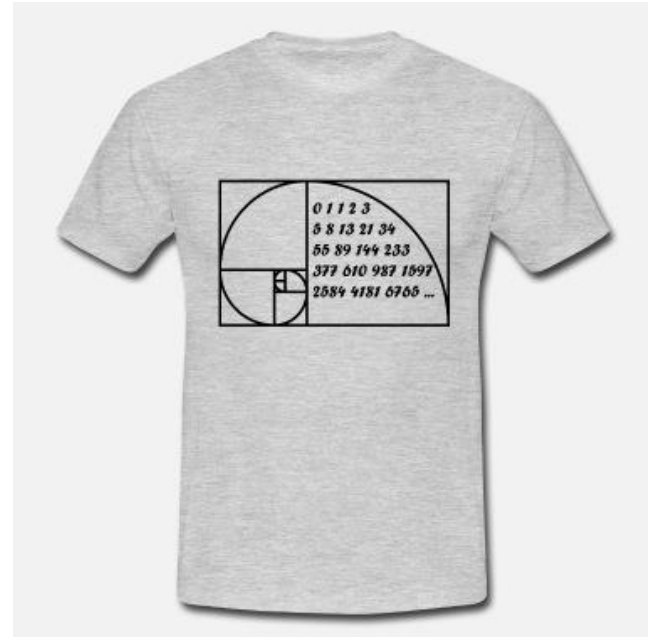
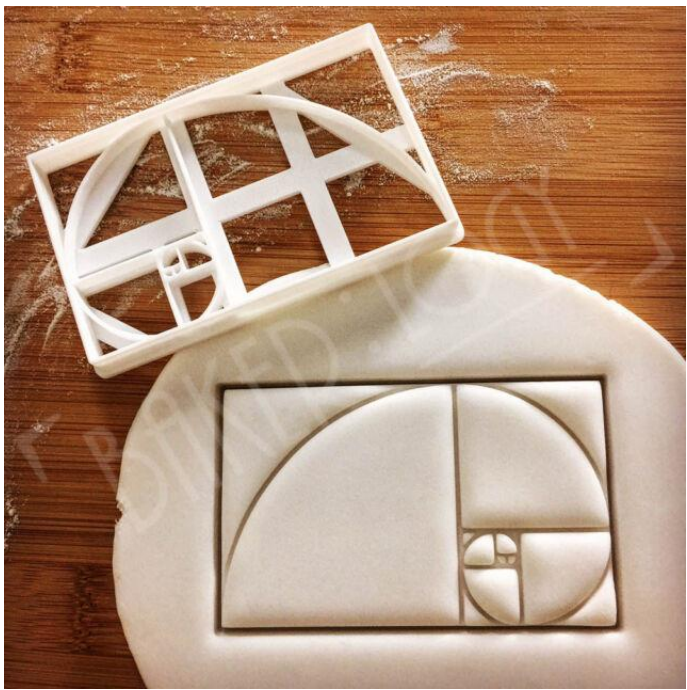
un **rettangolo aureo** ha **aspetto** uguale all'**inverso della sezione aurea**

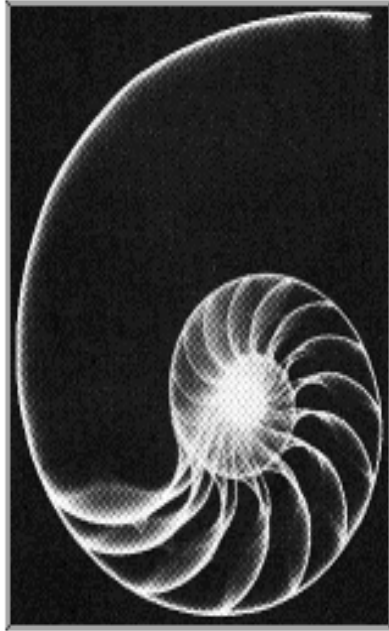
$$\text{aspetto} = \frac{2 - \varphi}{\varphi - 1} = \frac{0.3820}{0.6180} = 0.6180\dots$$



# spirale di Fibonacci







*Nautilus*  
AMERICA'S SHELL CO.





