NEL CASO DI OGGETTI 3-D OCCORRE ORIENTARE
**DUE FOTOGRAMMI**

## DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DI ORIENTAMENTO ESTERNO

PROBLEMA DI RICOSTRUZIONE DELLA GEOMETRIA DI PRESA DEI DUE FOTOGRAMMI (di solito a scala ridotta)

TRAMITE PROIEZIONE ANALOGICA

TRAMITE PROIEZIONE ANALITICA $\Leftarrow$

ASSETTO DI PRESA $\approx$ CASO NORMALE

BASE DI PRESA TALE DA GARANTIRE RICOPRIMENTO DI CIRCA IL 60%

ORIENTAMENTO INTERNO NOTO

STIMA DEI PARAMETRI DELLE TRASFORMAZIONI **DA** $\xi,\eta$ **A X,Y,Z** (O VICEVERSA)

=

ORIENTAMENTO DI DUE FOTOGRAMMI

ORIENTAMENTO DI DUE FOTOGRAMMI

DUE MODI DIVERSI :

- ORIENTAMENTO SEPARATO (INDIPENDENTE) DEI DUE FOTOGRAMMI

- ORIENTAMENTO CONGIUNTO DEI DUE FOTOGRAMMI :
  - IN UN PASSO
  - IN DUE PASSI

OCCORRE DETERMINARE 6 PARAMETRI PER OGNI IMMAGINE ➔ QUINDI 6 + 6 = 12

12 PARAMETRI DI ORIENTAMENTO ESTERNO DELLA COPPIA STEREOSCOPICA DI FOTOGRAMMI

$$\omega_1, \varphi_1, \kappa_1, X_{01}, Y_{01}, Z_{01}$$

$$\omega_2, \varphi_2, \kappa_2, X_{02}, Y_{02}, Z_{02}$$

E' NECESSARIO AVERE **PUNTI D'APPOGGIO**.

# ORIENTAMENTO INDIPENDENTE DEI FOTOGRAMMI
(problema del vertice di piramide – space resection)

I DUE FOTOGRAMMI VENGONO ORIENTATI IN MODO INDIPENDENTE, CIOE' VENGONO DETERMINATI IN MODO SEPARATO I 6 PARAMETRI DEL PRIMO FOTOGRAMMA E POI I 6 DEL SECONDO

QUINDI CONSIDERO UN FOTOGRAMMA:

PER OGNI PUNTO DI COORDINATE NOTE SI POSSONO SCRIVERE 2 EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

QUINDI OCCORRE AVERE <u>ALMENO</u> 3 PUNTI NOTI SUL TERRENO (PUNTI D'APPOGGIO NON ALLINEATI )

LE EQUAZIONI POSSONO ESSERE SINTETICAMENTE SCRITTE :

$$\xi_i = f\left(\xi_0, c, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{Y_0}, \boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\kappa}, X_i, Y_i, Z_i\right)$$
$$\eta_i = f\left(\eta_0, c, \boldsymbol{X_0}, \boldsymbol{Y_0}, \boldsymbol{Z_0}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\kappa}, X_i, Y_i, Z_i\right)$$

(incognite evidenziate in grassetto)

nel caso di numero maggiore di punti d'appoggio: linearizzazione per il calcolo delle incognite
(nel caso di prese aeree i valori approssimati si possono ricavare dal grafico di volo)

Questa procedura può essere risolta **solo in maniera analitica**.

L'ORIENTAMENTO FATTO IN QUESTO MODO NON TIENE CONTO DI ALCUNE PROPRIETA' :

- COMPLANARITA' DEI RAGGI OMOLOGHI (intersezione nei punti a terra)

- Con altre procedure e' possibile utilizzare punti planimetrici e punti altimetrici separati, mentre qui I PUNTI DI CONTROLLO DEVONO ESSERE DATI NELLE TRE COORDINATE COMPLETE

ORIENTAMENTO CONGIUNTO DEI DUE FOTOGRAMMI

IN UN PASSO

12 INCOGNITE CHE DETERMINANO L'ORIENTAMENTO DELLE DUE CAMERE, DA DETERMINARE SIMULTANEAMENTE

PER OGNI PUNTO D'APPOGGIO SI HANNO LE STESSE EQUAZIONI DI COLLINEARITA', SCRITTE PER I DUE FOTOGRAMMI:

$$\xi_{i1} = f\left(\xi_0, c, \underline{X}_{01}, \underline{Y}_{01}, \underline{Z}_{01}, \underline{\omega}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\kappa}_1, X_i, Y_i, Z_i\right)$$
$$\eta_{i1} = f\left(\eta_0, c, \underline{X}_{01}, \underline{Y}_{01}, \underline{Z}_{01}, \underline{\omega}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\kappa}_1, X_i, Y_i, Z_i\right)$$

$$\xi_{i2} = f\left(\xi_0, c, \underline{X}_{02}, \underline{Y}_{02}, \underline{Z}_{02}, \underline{\omega}_2, \underline{\varphi}_2, \underline{\kappa}_2, X_i, Y_i, Z_i\right)$$
$$\eta_{i2} = f\left(\eta_0, c, \underline{X}_{02}, \underline{Y}_{02}, \underline{Z}_{02}, \underline{\omega}_2, \underline{\varphi}_2, \underline{\kappa}_2, X_i, Y_i, Z_i\right)$$

QUINDI **3 PUNTI D'APPOGGIO** PLANO-ALTIMETRICI DANNO LUOGO A **3X4 = 12 EQUAZIONI** IN **12 INCOGNITE (**numero minimo**)**

IN QUESTO SCHEMA SI PREVEDE DI USARE ANCHE **EQUAZIONI DI COLLINEARITÀ SU PUNTI INCOGNITI**, A TERRA, CHE AGGIUNGONO L'INFORMAZIONE CHE DUE RAGGI OMOLOGHI SI DEVONO INTERSECARE.
QUESTO RENDE PIU' PRECISA E STABILE LA SOLUZIONE

PER OGNI PUNTO GENERICO A TERRA (NON NOTO), OSSERVATO IN ENTRAMBE LE FOTO (PUNTO DI LEGAME), SI POSSONO SCRIVERE ANCORA LE STESSE 4 EQUAZIONI CHE CONTENGONO PERO' 3 INCOGNITE IN PIU', CIOE' LE 3 COORDINATE NON NOTE DEL PUNTO

1 PUNTO DI LEGAME ➔ 4 EQ. IN 15 INCOGNITE

$$\xi_{i1} = f\left(\xi_0, c, \underline{X}_{01}, \underline{Y}_{01}, \underline{Z}_{01}, \underline{\omega}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\kappa}_1, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Z}_i\right)$$
$$\eta_{i1} = f\left(\eta_0, c, \underline{X}_{01}, \underline{Y}_{01}, \underline{Z}_{01}, \underline{\omega}_1, \underline{\varphi}_1, \underline{\kappa}_1, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Z}_i\right)$$

$$\xi_{i2} = f\left(\xi_0, c, \underline{X}_{02}, \underline{Y}_{02}, \underline{Z}_{02}, \underline{\omega}_2, \underline{\varphi}_2, \underline{\kappa}_2, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Z}_i\right)$$
$$\eta_{i2} = f\left(\eta_0, c, \underline{X}_{02}, \underline{Y}_{02}, \underline{Z}_{02}, \underline{\omega}_2, \underline{\varphi}_2, \underline{\kappa}_2, \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Z}_i\right)$$

utilizzando simultaneamente punti d'appoggio e punti (incogniti) di legame si irrobustisce la soluzione (determinazione dei parametri) e si ricavano contemporaneamente le coordinate a terra dei punti di legame, avendole incluse come incognite aggiuntive nel sistema di equazioni.

grazie all’informazione di omologia delle immagini, un punto incognito fornisce un ulteriore vincolo alla soluzione: da un punto di vista statistico, quindi, ogni punto aggiunto migliora la soluzione.

questo è il metodo piu' accurato e oggi molto utilizzato

richiede un solo passaggio di calcolo : la stima delle precisioni dei parametri ottenuti tiene conto di tutto il procedimento di orientamento.

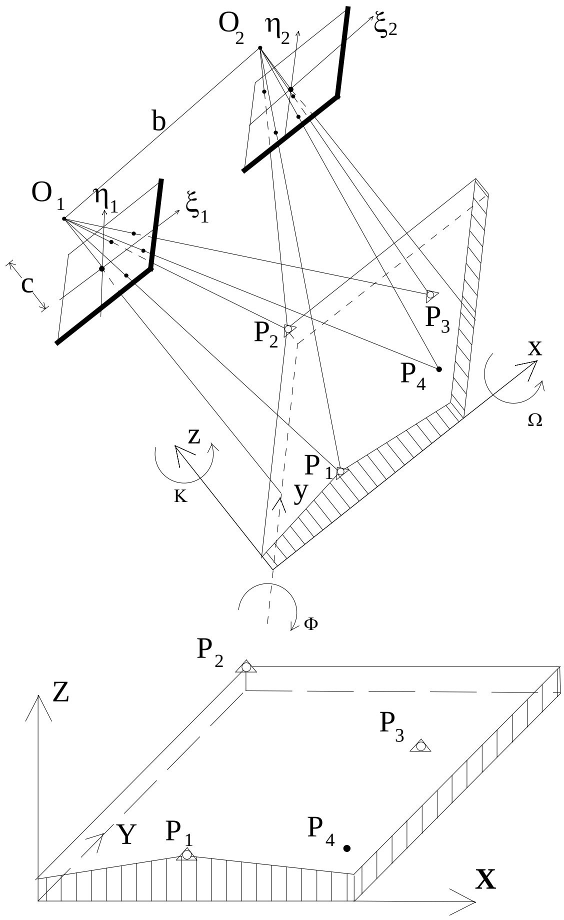
E' la base del metodo di compensazione a stelle proiettive della TRIANGOLAZIONE AEREA

Sia in questo caso come negli altri già visti o che vedremo, le soluzioni trovate garantiscono una buona restituzione solo all’interno del solido racchiuso dai punti di appoggio o per zone di estrapolazione molto limitate (5-10%).

ORIENTAMENTO CONGIUNTO DEI DUE FOTOGRAMMI

IN DUE PASSI : ORIENTAMENTO RELATIVO
(formazione modello)

ORIENTAMENTO ASSOLUTO
(coordinate assolute)




L'orientamento schematizzato in figura si esegue in due fasi successive.

Nella prima, si crea un modello stereoscopico a partire dai due fotogrammi, in un sistema x,y,z arbitrario (sistema modello).

Nella seconda si trasforma questo modello nel sistema oggetto X,Y,Z

**PRIMO PASSO : ORIENTAMENTO RELATIVO**

FORMAZIONE DEL MODELLO STEREOSCOPICO
=
DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE MODELLO

(non occorrono punti d'appoggio)

scriviamo le equazioni di collinearita'

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

per una coppia di fotogrammi, nel seguente modo :

$$X = X_{01} + (Z - Z_{01})\alpha_1$$
$$Y = Y_{01} + (Z - Z_{01})\beta_1$$

FOTO 1

$$X = X_{02} + (Z - Z_{02})\alpha_2$$
$$Y = Y_{02} + (Z - Z_{02})\beta_2$$

FOTO 2

dalle due equazioni in X e Z si possono ricavare le seguenti soluzioni

$$Z = \frac{-\left(X_{02} - X_{01}\right) + \alpha_2 Z_{02} - \alpha_1 Z_{01}}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$$X = \frac{\alpha_2 X_{01} - \alpha_1 X_{02} + \alpha_2 \alpha_1 \left(Z_{02} - Z_{01}\right)}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

dalle altre due equazioni (di Y), sostituendo il valore trovato di Z si ottengono due determinazioni della coordinata Y (4 eq. in 3 incognite !!)

$$Y = Y_{01} + (Z - Z_{01})\beta_1$$
$$Y = Y_{02} + (Z - Z_{02})\beta_2$$

$$Y^{(1)} - Y_{01} = \frac{\beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[-(X_{02} - X_{01}) + \alpha_2(Z_{02} - Z_{01})\right]$$
$$Y^{(2)} - Y_{02} = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\left[-(X_{02} - X_{01}) + \alpha_1(Z_{02} - Z_{01})\right]$$

se i due fotogrammi sono orientati e posizionati correttamente si deve avere

$$v_Y = Y^{(2)} - Y^{(1)} = 0$$

se viceversa non vi e' corretta posizione relativa dei due fotogrammi si ha

$$v_Y = Y^{(2)} - Y^{(1)} \neq 0$$

parrallasse trasversale diversa da zero

indicando con $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ il vettore che congiunge i due punti di presa (nel sist.assoluto) (base di presa) l'equazione della parallasse puo' essere scritta

$$v_Y = Y^{(2)} - Y^{(1)} = b_y - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} b_x + \frac{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} b_z$$

i coefficienti $\alpha_i$, $\beta_i$ $b_x$, $b_y$, $b_z$ contengono i 12 parametri dell'orientamento esterno dei due fotogrammi

$$v_Y = Y^{(2)} - Y^{(1)} = b_y - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} b_x + \frac{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} b_z$$

$v_y$ è lineare e omogenea in b quindi non varia se si moltiplicano le componenti di b per un fattore costante (che quindi non puo' essere determinato)

Inoltre $v_y$ dipende dalla differenza delle posizioni dei centri di presa (cioe' dalle posizioni relative una all'altra) e questa e' invariante per traslazioni rigide dell'insieme delle due camere

Infine, si dimostra che $v_y$ e' anche invariante rispetto a rotazioni rigide dell'insieme delle due camere

riassumendo, l'equazione di complanarità è insensibile a
- una variazione di scala (1 parametro)
- una traslazione rigida (3 parametri)
- una rotazione rigida (3 parametri)

Quindi i 12 parametri contenuti in $v_y$ sono legati in modo tale che solo 5 risultano determinabili , cioe' :

12 meno 1 fattore costante, 3 traslazioni e tre rotazioni.

Ponendo la parallasse trasversale uguale a zero si ottiene la cosiddetta **equazione di complanarità**: $v_y = 0$

Per determinare i 5 parametri dell'orientamento relativo si scrivono **5 equazioni di complanarità**, per altrettante coppie di punti omologhi (non noti a terra!)

Quando l'equazione di complanarita' e' soddisfatta, i due fotogrammi sono correttamente orientati uno rispetto all'altro, ma non in modo assoluto nello spazio cioe' rispetto al sistema assoluto (terreno) X,Y,Z. (la posizione relativa tra le due fotocamere è quella che si aveva all'atto della presa (tranne distanza !!))

Un altro modo di arrivare a dire che nella fase di orientamento relativo si determinano 5 dei 12 parametri e' il seguente:

si comincia a esaminare la seconda fase

Le relazioni fra le coordinate modello x, y, z e le coordinate oggetto X, Y, Z si possono esprimere con le equazioni

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m \cdot \mathrm{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

in cui $X_u$, $Y_u$, $Z_u$ sono le coordinate assolute dell'origine del sistema modello x,y,z, **m** è il fattore di scala tra il sistema x,y,z e il sistema oggetto X,Y,Z, **R** è la matrice di rotazione spaziale che lega i due sistemi, funzione delle tre rotazioni $\Omega,\Phi,\mathrm{K}$
Questi sette valori si chiamano parametri di orientamento assoluto
Dei 12 parametri di orientamento esterno da determinare, 7 vengono fissati dall'orientamento assoluto, per cui i restanti 5 devono essere ricavati da una prima fase durante la quale si forma il modello stereoscopico nel sistema x,y,z

E' detto orientamento relativo, poiché determina solo la posizione relativa tra le due stelle di raggi proiettanti senza nessun riferimento al sistema oggetto X,Y,Z.

il MODELLO è completamente formato, nel sistema x,y,z, quando si intersecano i raggi omologhi di ALMENO CINQUE PUNTI BEN DISTRIBUITI.

una volta realizzata questa condizione, tutte le altre infinite coppie di raggi omologhi, che proiettano i punti immagine corrispondenti, devono necessariamente intersecarsi.

Il luogo di queste infinite intersezioni costituisce la SUPERFICIE DEL MODELLO OTTICO

Una volta stimati i parametri dell’orientamento relativo, con le equazioni di collinearita', in cui si sono messi dei valori arbitrari per gli altri 7 parametri incogniti, si determinano delle COORDINATE X,Y,Z che sono le COORDINATE MODELLO.

I GRUPPI DI 5 INCOGNITE indipendenti contenuti nella eq. di complanarita', e che vengono determinati scrivendo 5 eq per 5 coppie di punti omologhi, possono essere FORMATI IN DIVERSO MODO

gli altri 7 PARAMETRI VENGONO FISSATI A VALORI ARBITRARI

IN PRATICA SI FISSA SEMPRE ARBITRARIAMENE LA POSIZIONE DI UN CENTRO DI PRESA (3 PARAMETRI) E QUINDI SI CONSIDERANO SOLO LE DIFFERENZE $b_X$, $b_Y$, $b_Z$, E POI SI SCEGLIE UNO DEI DUE MODI SEGUENTI

<u>O.R. ASIMMETRICO (O.R.A.)</u>

Si fissa una camera in posizione arbitraria, si ruota e trasla l'altra fino a ricostruire il modello

> Fisso $b_x = b \quad \omega_1 = \phi_1 = \kappa_1 = 0$
> Stimo le altre componenti della base e gli elementi angolari della seconda camera : $b_y$ , $b_z$ , $\omega_2$, $\phi_2$, $\kappa_2$

<u>O.R SIMMETRICO (O.R.S.)</u>

Si impone che la base sia orientata lungo l'asse X e si ruotano entrambe le camere

> Fisso $b_x = b$ , $b_y = b_z = \omega_1=0$
> Stimo tre elementi angolari di una camera e due dell'altra : $\phi_1$, $\kappa_1$ , $\omega_2$, $\phi_2$, $\kappa_2$

Le equazioni di parallasse si modificano di conseguenza

Nell'equazione

$$v_Y = Y^{(2)} - Y^{(1)} = b_y - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} b_x + \frac{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} b_z$$

si pone quindi :

$X_{01}=Y_{01}=0$  $Z_{01}=Z_{01}$ fissato (posizione di $O_1$)
$\Omega_1= 0$  $b_x=b_x$ fissato (1 angolo di $O_1$ e il fattore di scala)

Questi sono 5 dei 7 parametri fissati arbitrariamente.
si fissano inoltre:

| per O.R.A. | per O.R.S. |
|---|---|
| $\kappa_1=0$ <br> $\phi_1=0$ | $\beta_y=0$ <br> $\beta_z=0$ |
| Si stimano | Si stimano |
| $b_y$ $b_z$ $\omega_2$ $\phi_2$ $\kappa_2$ | $\phi_1$ $\kappa_1$ $\omega_2$ $\phi_2$ $\kappa_2$ |

L'equazione della parallasse, linearizzata ponendo:

$\omega=0+d\omega$  $b_y=0+db_y$
$\kappa=0+d\kappa$  $b_z=0+db_z$
$\phi=0+d\phi$

e trascurando I termini del secondo ordine (es. $db_z d\phi_2$ ) diventa

$$Y_2 - Y_1 = \frac{h}{c}\left( -\xi_1 d\kappa_1 + \xi_2 d\kappa_2 + \frac{\xi_1\eta_1}{c} d\phi_1 - \frac{\xi_2\eta_2}{c} d\phi_2 + \left( c + \frac{\eta_2^2}{c} \right) d\omega_2 \right) +$$

$$- \frac{h}{c}(\eta_2 - \eta_1) + db_y + \frac{\eta_2}{c} db_z$$

da questa si ottiene, imponendo $Y_2 - Y_1 = 0$ e chiamando $p\eta = \eta_2 - \eta_1$ :

$$p_\eta = -\xi_1 d\kappa_1 + \xi_2 d\kappa_2 + \frac{\xi_1\eta_1}{c} d\phi_1 - \frac{\xi_2\eta_2}{c} d\phi_2 + \left( c + \frac{\eta_2^2}{c} \right) d\omega_2 +$$

$$+ \frac{c}{h} db_y + \frac{\eta_2}{h} db_z$$

introducendo i valori arbitrari dei parametri a secondo del'o.r. scelto si ottiene:

ORIENTAMENTO RELATIVO SIMMETRICO
($db_y = db_z = 0$)

$$p_\eta = -\xi_1 d\kappa_1 + \xi_2 d\kappa_2 + \frac{\xi_1\eta_1}{c} d\phi_1 - \frac{\xi_2\eta_2}{c} d\phi_2 + \left( c + \frac{\eta_2^2}{c} \right) d\omega_2$$

ORIENTAMENTO RELATIVO ASIMMETRICO
($dk_1 = d\phi_1 = 0$)

$$p_\eta = \frac{c}{h} db_y + \frac{\eta_2}{h} db_z - \frac{\xi_2\eta_2}{c} d\phi_2 + \left( c + \frac{\eta_2^2}{c} \right) d\omega_2 + \xi_2 d\kappa_2$$

**SECONDO PASSO : ORIENTAMENTO ASSOLUTO**

RIPORTO DEL MODELLO A POSIZIONE E DIMENSIONE REALE

=

DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE ASSOLUTE (TERRENO)

Il modello e' scalato, ruotato e traslato rispetto all'oggetto

Le relazioni fra le coordinate **modello** x, y, z e le coordinate oggetto X, Y, Z si possono esprimere con le equazioni

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m \cdot \mathrm{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $X_u$, $Y_u$, $Z_u$ sono le coordinate oggetto dell'origine del sistema x,y,z,
- **m** è il fattore di scala tra il sistema x,y,z e il sistema oggetto X,Y,Z,
- **R** è la matrice di rotazione spaziale che lega i due sistemi, funzione delle tre rotazioni $\Omega, \Phi, \mathrm{K}$ (del modello)

7 PARAMETRI DI ORIENTAMENTO ASSOLUTO

Per determinare i 7 parametri incogniti occorrono **punti d'appoggio** e sono necessarie almeno sette equazioni.

Si possono scrivere:

- tre equazioni per ogni punto plano-altimetrico
- due equazioni per ogni punto planimetrico
- un' equazione per ogni punto altimetrico

Quindi per risolvere algebricamente il sistema occorrono almeno :

| | |
|---|---|
| due punti planimetrici e | ($2 \times 2 = 4$ equazioni) |
| tre punti altimetrici | ($3 \times 1 = 3$ equazioni) |

o

| | |
|---|---|
| due punti planoaltimetrici | ($3 \times 2 = 6$ equazioni) |
| un punto altimetrico | (1 equazione) |

(non allineati)

Se si hanno a disposizione più punti d'appoggio, il sistema risulta ridondante e si applica una procedura di stima ai minimi quadrati

La soluzione ottenuta con il metodo dei minimi quadrati fornisce la stima dei parametri incogniti e anche la stima degli s.q.m. dei parametri, e delle osservazioni stesse

Gli scarti residui delle coordinate dei punti di appoggio sono quelli che, in pratica, vengono utilizzati per la valutazione della riuscita dell'operazione di orientamento assoluto

# TRIANGOLAZIONE AEREA

- Le riprese fotogrammetriche per scopo cartografico sono costituite da un <u>gran numero di fotogrammi</u> (anche qualche centinaia)

- Per l'orientamento esterno di fotogrammi, (o O.A. di modelli) occorrono <u>almeno tre punti di appoggio a terra per fotogramma</u> (o per modello)

- Difficilmente si possono usare vertici di reti geodetiche preesistenti, poiché spesso non sono in numero sufficiente, o non sono ben disposti o identificabili sui fotogrammi, o non hanno le precisioni necessarie

- Viene pertanto rilevata una apposita rete di inquadramento alla quale si possono appoggiare i rilievi dei veri e propri punti di appoggio fotografici, (scelti dopo il volo sui fotogrammi: ben identificabili e collimabili)

- Questo comporta un lavoro di rilievo topografico molto oneroso in termini di tempo e di costi, soprattutto in zone poco accessibili o in zone dove non esistono vertici di reti geodetiche a cui appoggiarsi

Si potrebbe pensare di orientare con tre punti noti il primo modello (fotogramma) e poi con successivi orientamenti relativi asimmetrici, cioè tenendo fisso il modello (fotogramma) già orientato sul terreno, orientare tutti gli altri fotogrammi sul primo. In tal modo però si accumulano errori via via che ci si allontana dal primo fotogramma, che rendono troppo imprecisa la restituzione sulle immagini più lontane.

è stata quindi sviluppata per scopi cartografici la tecnica della T.A., che consente di determinare la maggior parte dei punti d'appoggio dai fotogrammi stessi, riducendo notevolmente il lavoro di rilievo topografico

la T.A. è un procedimento che permette di collegare tutti i fotogrammi di una o piu' strisciate (blocco), oppure i modelli costruiti da piu' coppie di fotogrammi, in modo che abbiano tutti lo stesso orientamento e la stessa scala

è resa possibile dallo sviluppo di potenti calcolatori che hanno memoria sempre più grande e tempi di calcolo sempre più ridotti

# TRIANGOLAZIONE AEREA

La triangolazione fotogrammetrica libera la fotogrammetria dalla necessità di avere numerosi punti di appoggio da rilevarsi con metodi topografici terrestri e/o satellitari

E' possibile concatenare tra loro piu' modelli o piu' fotogrammi, senza utilizzare tanti punti noti a terra.

Questa tecnica consente infatti la **determinazione simultanea dei parametri di orientamento esterno di un blocco di fotogrammi** (o di modelli), e la **determinazione delle coordinate terreno** di una serie discreta **di punti** (pre-segnalizzati o naturali)

- ➔ viene applicata a un blocco di fotogrammi aerei.

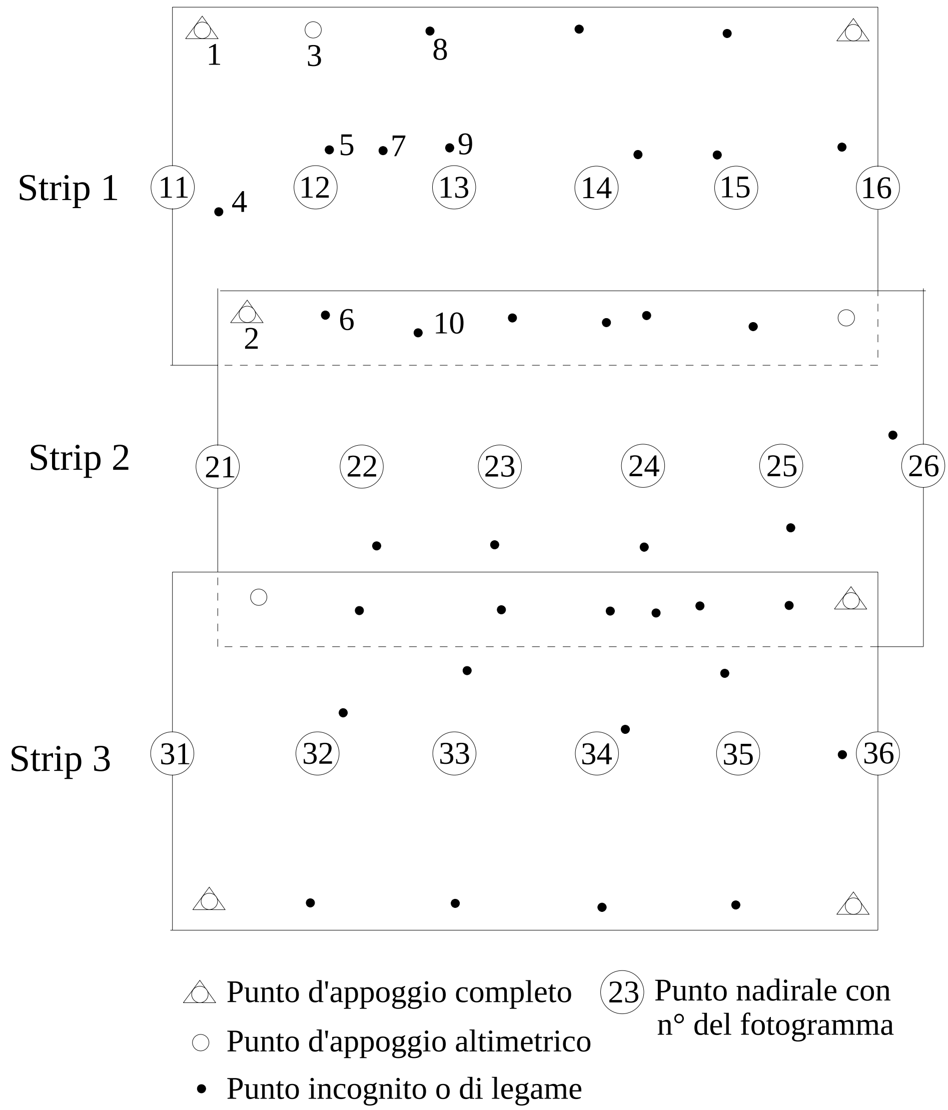
Per far questo vengono scritte le eq di collinearità e imposte condizioni di intersezione a terra per molte coppie di punti (grazie alle forti sovrapposizioni longitudinali e trasversali dei fotogrammi)

l'intersezione a terra dei raggi omologhi consente l'orientamento relativo di tutti i modelli.

L'O.A. puo' poi essere effettuato su tutto l'insieme di fotogrammi o di modelli collegati rigidamente tra loro, con un numero limitato di punti noti su tutto il blocco

In teoria sono necessari 3 soli punti, ma per contenere gli errori  se ne usano molti di piu'

# Schema di triangolazione aerea




18 fotogrammi (tre strisciate)
6 punti d'appoggio plano-altimetrici
3 punti d'appoggio altimetrici

⏩ Scopo : determinare i parametri di orientamento esterno dei fotogrammi o dei modelli e le coordinate terreno di nuovi punti, che serviranno per la restituzione.

La triangolazione fotogrammetrica può essere eseguita secondo due tecniche diverse:

- COMPENSAZIONE DEL BLOCCO A MODELLI INDIPENDENTI basato sull'orientamento assoluto analitico partendo dall'ipotesi che tutti i modelli stereoscopici costituenti il blocco siano già stati formati.

Deriva dal metodo di orientamento di due fotogrammi effettuato in due passi : O.Rel + O.Ass.

Vengono prima effettuati gli orientamenti relativi di tutte le coppie di fotogrammi, formando tutti i modelli del blocco;

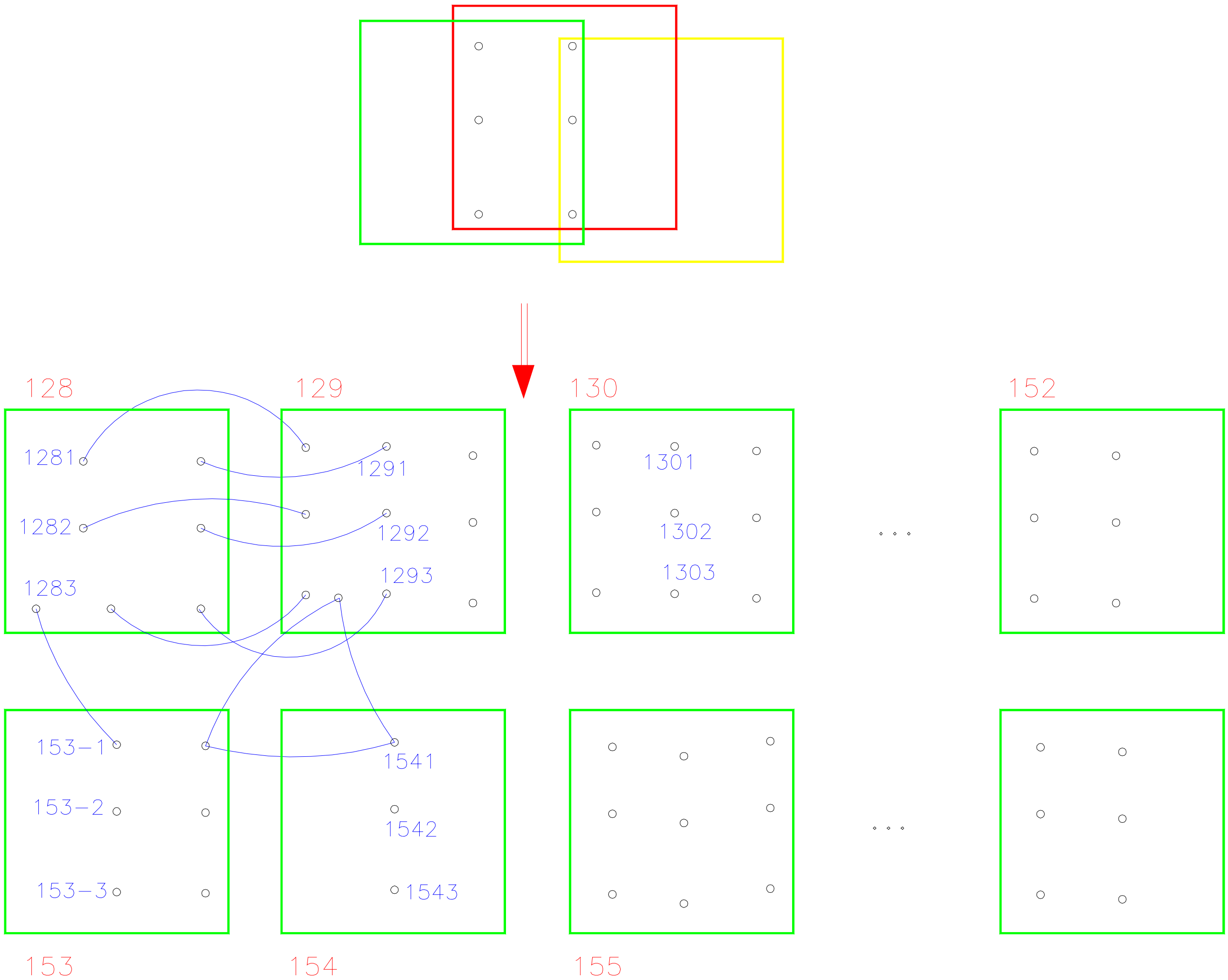
Viene poi fatto l'orientamento assoluto simultaneo di tutti i modelli del blocco, collegandoli anche tra loro

- COMPENSAZIONE DEL BLOCCO A STELLE PROIETTIVE : basato sull'uso diretto delle equazioni di collinearità; questo metodo consente di raggiungere le massime precisioni possibili ed è l'unico che consente di utilizzare fotogrammi di natura diversa (metrici, semimetrici e non metrici) permettendo la determinazione dei parametri di orientamento interno incogniti;

deriva dal metodo di orientamento simultaneo di due fotogrammi in un passo solo, che comporta l'utilizzo delle equazioni di collinearita' scritte per coppie di punti omologhi, di coordinate note (di appoggio), e per punti incogniti (di legame)

In entrambi i casi occorre procedere a una opportuna preparazione del materiale prima di iniziare le operazioni di misura. Tale operazione è identica per le due metodologie, differendo esse solo per il modello matematico applicato ma non per gli scopi raggiungibili.

PREPARAZIONE DEI FOTOGRAMMI



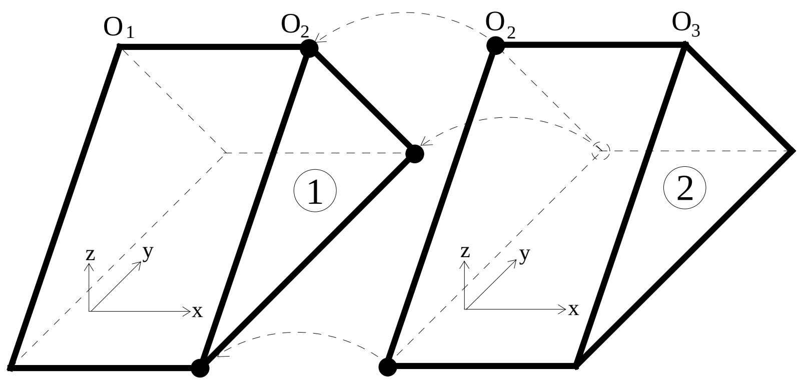
# COMPENSAZIONE SPAZIALE DEL BLOCCO

Si calcolano i parametri di orientamento assoluto di ogni modello e le tre coordinate X, Y, Z dei punti incogniti, nel sistema terreno.

I dati di partenza sono le coordinate modello x, y, z di punti appartenenti a modelli stereoscopici formati con operazioni di orientamento relativo.

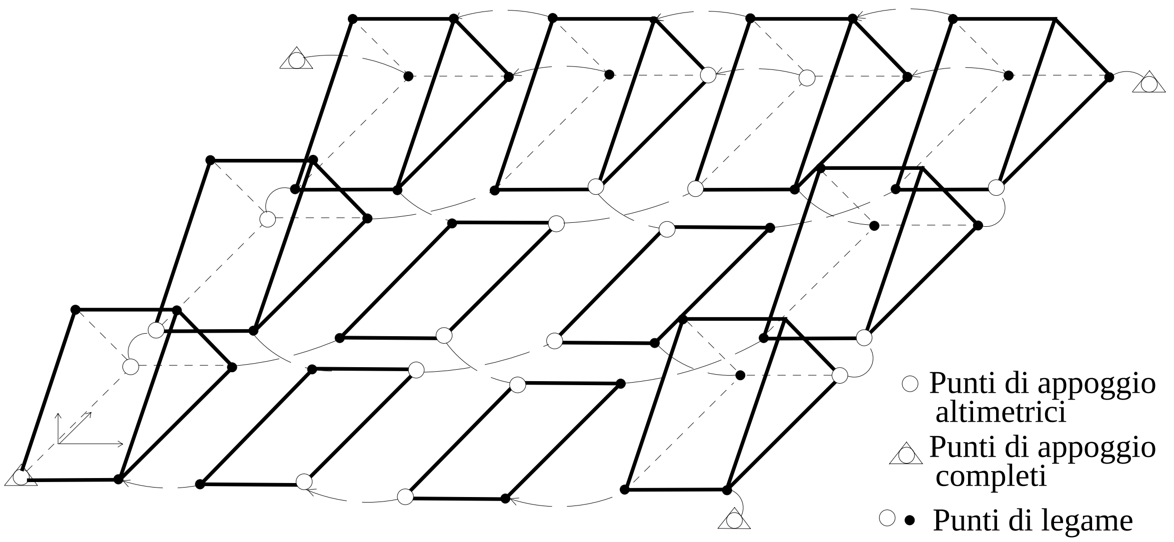
Per ogni modello si hanno 7 incognite, per ogni punto di legame 3 ulteriori incognite.
Per esempio 200 modelli con 5 punti di legame per modello ➔ 4400 incognite !!

Per migliorare la stima, si può sfruttare un <u>altro vincolo geometrico</u>: un modello ha in comune con il modello adiacente un centro di presa, quindi oltre alle coordinate modello dei punti di legame e di appoggio, si possono utilizzare <u>le coordinate (modello) dei centri di presa</u>.



Aggiungendo opportune equazioni che esprimano questo vincolo si possono considerare quindi anche i centri di presa come punti di legame

L’uso dei centri di proiezione dà maggior rigidità al blocco.




La compensazione spaziale del blocco avviene in questo modo:

I punti di ciascun modello sono definiti in un sistema di riferimento tridimensionale indipendente, che si può trasformare nel sistema terreno mediante i sette parametri dell’orientamento assoluto.

Per determinare l’orientamento assoluto simultaneo di tutti i modelli del blocco, si usano, come nel caso planimetrico, le coordinate modello dei punti di legame (compresi i centri di proiezione) e le coordinate modello e terreno dei punti di appoggio

In realtà si opera in due step:
ogni modello viene traslato, orientato e dimensionato in modo che i punti di legame (compresi i centri di presa) risultino il più possibile coincidenti: a questo punto tutti i modelli sono riferiti ad uno stesso sistema di riferimento formando un unico modello stereoscopico (CONCATENAMENTO).

in un secondo passo si possono poi determinare i 7 parametri che trasformano le coordinate modello dei punti di appoggio in coordinate terreno (note), in modo che gli scarti residui sui punti di appoggio siano i più piccoli possibili.
Come risultato della compensazione si avranno i parametri di O.A. di ogni modello, e le coordinate assolute dei punti di legame, compresi i centri di presa di ogni fotogramma.

# PRECISIONE PLANO-ALTIMETRICA NELLA COMPENSAZIONE A MODELLI INDIPENDENTI

La riduzione del numero di punti di appoggio rilevati a terra porta in generale a una **diminuzione della precisione** in confronto all'orientamento assoluto di ogni singolo modello appoggiato su punti rilevati a terra.

E possibile dimostrare che le precisioni altimetriche e quelle planimetriche sono indipendenti e possono pertanto essere trattate separatamente

Infatti, nella compensazione tridimensionale del blocco, la precisione planimetrica risultante non è influenzata dalla precisione delle quote modello, né dalla disposizione dei punti di appoggio in quota.

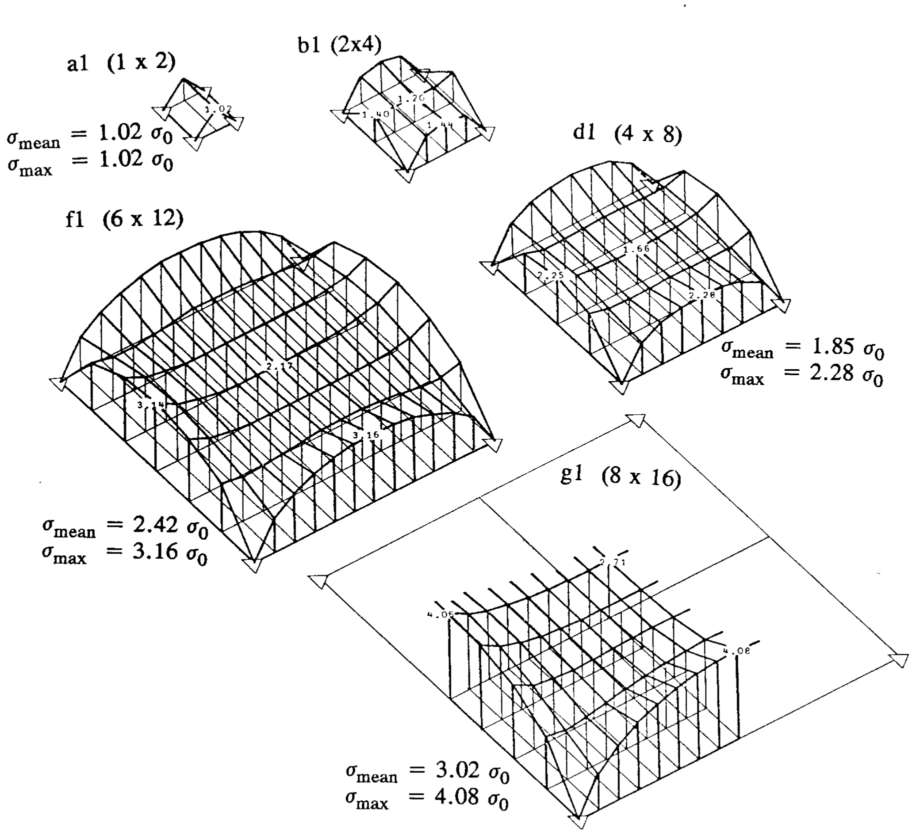
Analogamente la precisione altimetrica è indipendente da quella delle coordinate modello x, y e dalla disposizione dei punti di appoggio planimetrici.

PRECISIONE PLANIMETRICA

La precisione delle coordinate X, Y di un punto di legame, è esprimibile dalla seguente relazione (da $\sigma_0^2 N^{-1} = C_{XX}$):

$$\sigma_{B,L} = \sqrt{q_{LL}} \cdot \sigma_0 = \sqrt{q_{LL}} \cdot \sigma_{M,L}$$

dove $\sigma_{M,L}$ è la precisione delle coordinate planimetriche del singolo modello

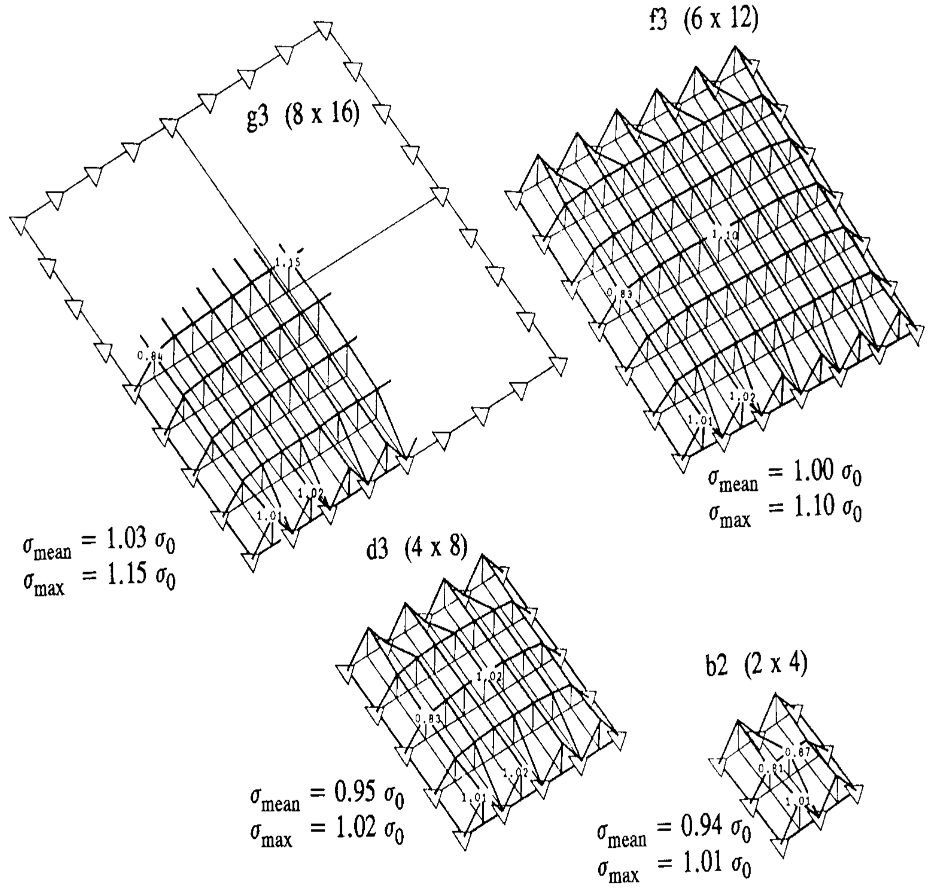



Esempi: blocchi rettangolari con 4 punti d'appoggio agli spigoli

- ♦ La precisione cala fortemente al crescere della dimensione del blocco
- ♦ Lo s.q.m. massimo si ha nella mezzeria dei lati del blocco.

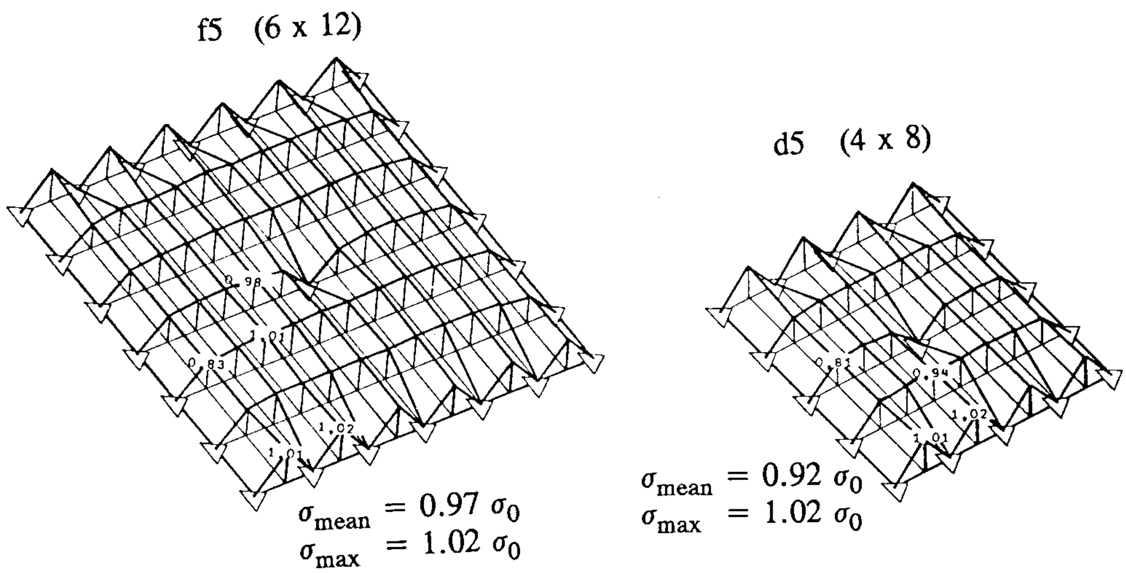
Queste regole sono applicabili a blocchi rettangolari, o anche irregolari, ma non valgono nel caso limite di strisciata singola

Se si vuole aumentare la precisione occorre predisporre una serie fitta di punti di appoggio lungo i bordi del blocco.




➔ la precisione è quasi indipendente dalle dimensioni del blocco ed è simile a quella del singolo modello

Ulteriori punti di appoggio interni al blocco non portano ad aumenti significativi di precisione



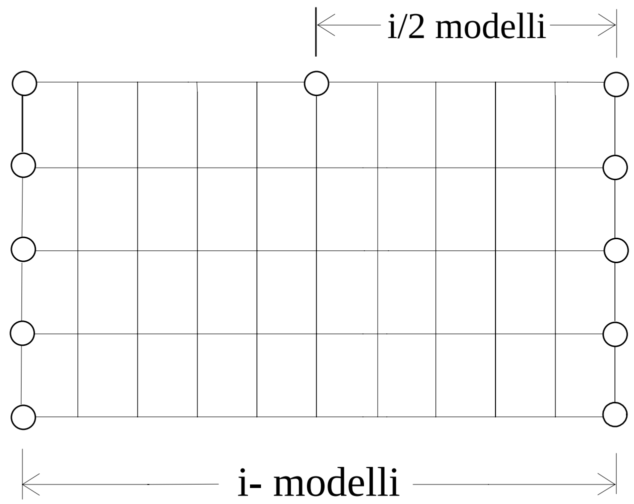
# PRECISIONE ALTIMETRICA

La precisione altimetrica in seguito alla compensazione di un blocco a modelli indipendenti può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\sigma_{B,Z} = \sqrt{q_{ZZ}}\,\sigma_0 = \sqrt{q_{ZZ}}\,\sigma_{M,Z}$$

Per dare rigidità al blocco, in direzione trasversale alle strisciate, è opportuno avere più serie di punti d'appoggio altimetrici. La precisione in quota dipende in primo luogo dal numero di modelli tra due serie di punti d'appoggio altimetrici

$$\sigma_{B,Z,max} \approx (0.27 + 0.31 \cdot i)\sigma_{M,Z}$$




Per aumentare ulteriormente la precisione è buona norma introdurre punti di appoggio altimetrico a intervalli di i/2 modelli (anche solo sul bordo).

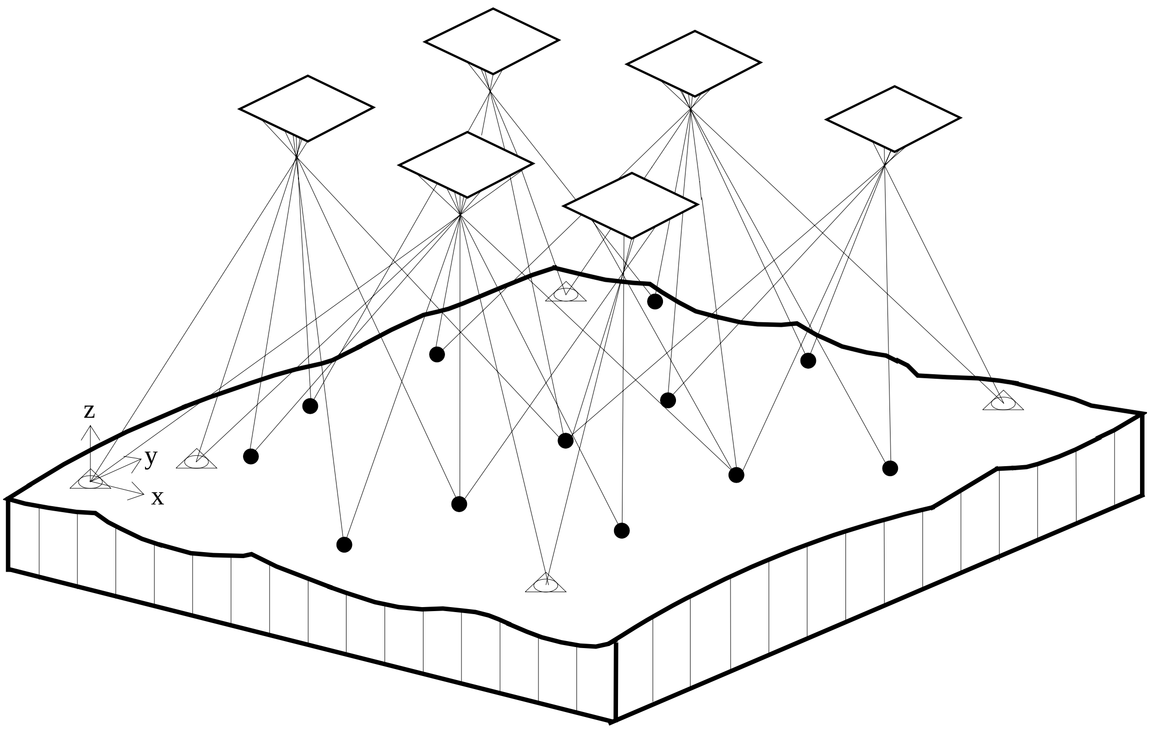
In confronto alla precisione planimetrica, la precisione altimetrica risulta sensibilmente inferiore.

Se si vuole ridurre il decadimento di precisione occorre disporre linee di punti di appoggio altimetrico <u>ogni tre modelli</u>. Questo provoca un eccessivo costo per cui nei capitolati è solitamente richiesto di usare file di punti altimetrici <u>ogni quattro modelli</u>.

# TRIANGOLAZIONE FOTOGRAMMETRICA A STELLE PROIETTIVE (BUNDLE BLOCK ADJUSTMENT)

Nel metodo di compensazione a stelle proiettive di una strisciata o di un blocco di fotogrammi con ricoprimenti minimi del 60% (longitudinale) e 20% (trasversale) si calcolano direttamente le relazioni tra coordinate immagine e coordinate oggetto, senza introdurre le coordinate modelli quale passaggio intermedio.

Con questo metodo l'entità elementare del blocco è costituita dal fotogramma.




I punti immagine e il centro di presa di ciascun fotogramma definiscono una stella di raggi nello spazio.

I parametri di orientamento esterno di tutte le stelle del blocco, ossia di tutti i fotogrammi, vengono calcolati simultaneamente.
I dati di partenza sono le coordinate immagine dei punti di legame e le coordinate immagine e oggetto dei punti di appoggio.

## PRINCIPIO DELLA COMPENSAZIONE

Le stelle proiettive (singole immagini) vengono traslate (3 traslazioni) e ruotate (3 rotazioni) in modo che i raggi si intersechino al meglio in corrispondenza dei punti di legame e passino il più possibile per i punti di appoggio.

## EQUAZIONI ALLE MISURE

Le equazioni d’osservazione sono le **equazioni di collinearità**.
Ogni punto immagine dà origine a due equazioni in 6 incognite (3trasl+3rotaz = 6 parametri di O.E.)
Ogni punto di legame introduce 3 incognite aggiuntive (X,Y,Z terreno)

Si possono utilizzare anche fotogrammi non metrici, introducendo incognite aggiuntive (3 per fotogramma) nella compensazione (autocalibrazione)

Le equazioni non sono lineari, quindi devono essere linearizzate, e il procedimento di stima sarà iterativo.

La necessità di linearizzare le equazioni di collinearità richiede la conoscenza di valori approssimati di tutte le incognite del sistema.

I parametri angolari di orientamento esterno possono essere dedotti dal piano di volo (in assetto quasi-nadirale), ma non basta: occorrono le coordinate (approssimate) di tutti i centri di presa, e le coordinate terreno (approssimate) dei punti di legame

A questo scopo si può operare in più modi:

-si esegue dapprima una compensazione a modelli indipendenti le cui soluzioni vengono utilizzate come valori approssimati nella compensazione a stelle proiettive
-si determinano dei valori di prima approssimazione risolvendo un sistema basato sulle equazioni DLT (Direct Linear Transformation):

## PRECISIONI DELLA TRIANGOLAZIONE A STELLE PROIETTIVE

Pur avendo utilizzato un diverso modello matematico, la stima delle precisioni di una compensazione a stelle proiettive segue con buona approssimazione le stesse regole già viste per la compensazione a modelli indipendenti.

Poiché non si utilizzano le coordinate modello dei punti di legame e di appoggio, affette anche dagli errori dell'orientamento relativo, nell'applicazione delle formule utilizzate per la stima delle precisioni plano-altimetriche dei blocchi, si dimezzano i valori di $\sigma_M$

### SVANTAGGI

- il problema non è lineare, occorrono valori approssimati
- occorrono calcolatori potenti
- il problema è sempre 3D (mai compensazioni separate XY + Z)

### VANTAGGI

- è il metodo più preciso poiché usa relazioni dirette tra coordinate immagine e terreno, senza il passaggio intermedio alle coordinate modello
- rende più semplice l'introduzione di informazioni ausiliarie (GPS)
- consente di usare fotogrammi qualunque (camere non metriche e prese anche molto convergenti)
- fornisce direttamente i parametri di orientamento esterno di tutti i fotogrammi (è superfluo determinare le coordinate dei punti d'appoggio per il singolo modello)

**Esempio di calcolo di un orientamento relativo simmetrico**
distanza principale $c$ = 152.67 *mm*
coordinate immagine di otto punti

| Punto | $\xi_1$ | $\eta_1$ | $\xi_2$ | $\eta_2$ | $p_\eta = \eta_1 - \eta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 93.176 | 5.890 | 6.072 | 5.176 | 0.714 *mm* |
| 2 | -27.403 | 6.672 | -112.842 | 1.121 | 5.551 *mm* |
| 3 | 83.951 | 107.422 | -4.872 | 105.029 | 2.393 *mm* |
| 4 | -11.659 | 101.544 | -99.298 | 95.206 | 6.338 *mm* |
| 5 | 110.326 | -97.800 | 34.333 | -99.522 | 1.722 *mm* |
| 6 | -12.653 | -87.645 | -96.127 | -93.761 | 6.116 *mm* |
| 7 | 37.872 | 40.969 | -48.306 | 37.862 | 3.107 *mm* |
| 8 | 41.503 | -37.085 | -42.191 | -40.138 | 3.053 *mm* |

Calcolare i parametri dell'orientamento relativo e i loro s.q.m.

<u>Soluzione</u>: l'equazione alle osservazioni per ogni punto è:

$$p_\eta = -\xi_1 d\kappa_1 + \xi_2 d\kappa_2 + \frac{\xi_1\eta_1}{c} d\phi_1 - \frac{\xi_2\eta_2}{c} d\phi_2 + \left( c + \frac{\eta_2^2}{c} \right) d\omega_2$$

In forma simbolica: $\mathbf{Y_0} = \boldsymbol{Ax}$ ($\mathbf{Y_0}$ = vettore delle osservazioni)

In forma matriciale, introducendo i valori numerici

$$\begin{pmatrix} 0.714 \\ 5.551 \\ 2.393 \\ 6.338 \\ 1.722 \\ 6.116 \\ 3.107 \\ 3.053 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -93 & 6 & 4 & 0 & 153 \\ 27 & -113 & -1 & 1 & 153 \\ -84 & -5 & 59 & 3 & 225 \\ 12 & -99 & -8 & 62 & 212 \\ -110 & 34 & -71 & 22 & 218 \\ 13 & -96 & 7 & -59 & 210 \\ -38 & -48 & 10 & 12 & 162 \\ -42 & -42 & -10 & -11 & 163 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\kappa_1 \\ d\kappa_2 \\ d\phi_1 \\ d\phi_2 \\ d\omega_2 \end{pmatrix}$$

la soluzione è: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \mathbf{Y_0}$

i parametri di orientamento richiesti sono quindi

$d\kappa_1$ = 1.73 *gon* $d\kappa_2$ = -0.82 *gon*
$d\phi_1$ = -0.34 *gon* $d\phi_2$ = 0.05 *gon*
$d\omega_2$ = 1.40 *gon*.

La matrice normale inversa e': $\boldsymbol{N^{-1}} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}$

$$N^{-1} = 10^{-5} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 63 & 05 & 00 & 29 \\ 63 & 62 & 06 & 00 & 28 \\ 05 & 06 & 13 & 03 & 02 \\ 00 & 00 & 03 & 13 & 00 \\ 29 & 28 & 02 & 00 & 13 \end{pmatrix}$$

Lo scarto quadratico medio di ogni osservazione $p_\eta$ risulta:

$$C_{YY} = \sigma_0^2 I \qquad \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{n-m}} = \pm 0.009mm$$

dove $n$ = numero di equazioni alle osservazioni (= 8)
m = numero delle incognite (= 5).

L' s.q.m. di un parametro d'orientamento è :

$$\hat{\sigma}_k = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{N^{-1}{}_{kk}}$$

Quindi

$$\hat{\sigma}_{\kappa_1} = 0.009\sqrt{0.00070} = \pm 15mgon$$

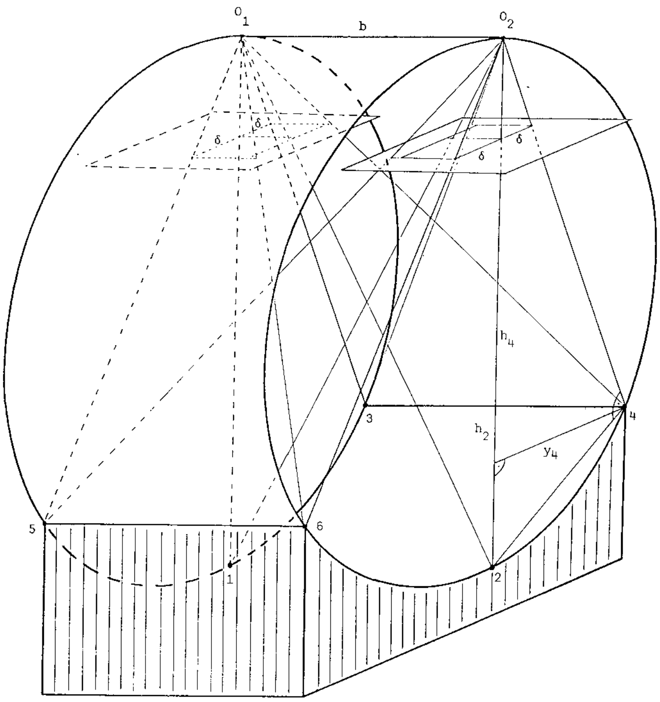
$$\hat{\sigma}_{\kappa_2} = 0.009\sqrt{0.00062} = \pm 14mgon$$

$$\hat{\sigma}_{\phi_1} = \hat{\sigma}_{\phi_2} = \hat{\sigma}_{\omega_2} = 0.009\sqrt{0.00013} = \pm 7mgon$$

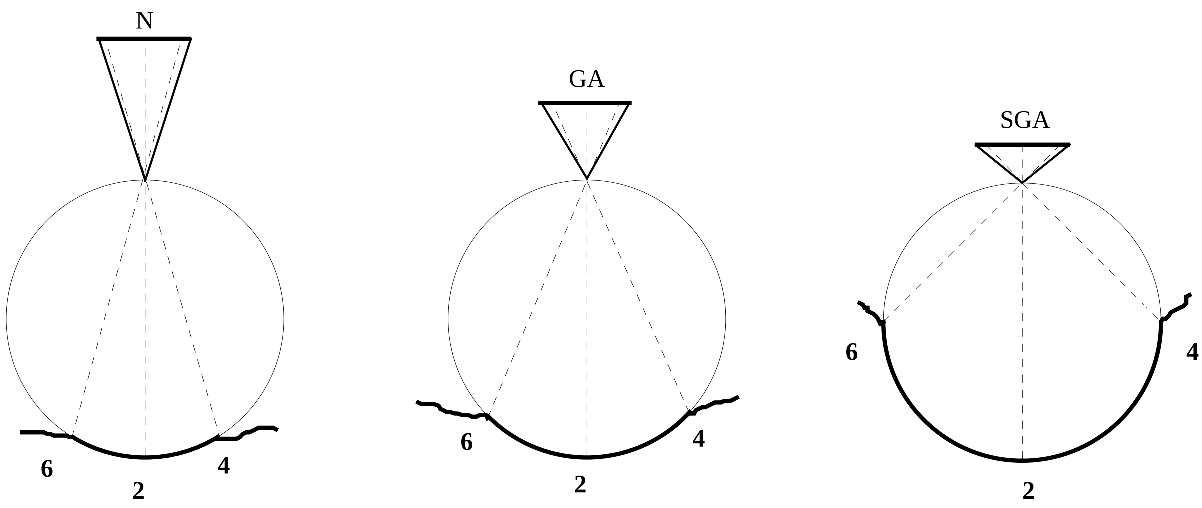
# SUPERFICI CRITICHE NELL'ORIENTAMENTO RELATIVO

Possono nascere alcuni problemi di indeterminazione per il parametro $\omega_2$ (mentre non si possono verificare condizioni numeriche critiche per i parametri $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\phi_1$, $\phi_2$)

Si dimostra che non è possibile eseguire l'orientamento relativo se i sei punti di legame si trovano su una superficie cilindrica che passa per i due centri di presa




Nel calcolo dell'orientamento relativo analitico l'esistenza di una superficie critica, generalmente si manifesta con VALORI RELATIVAMENTE GRANDI DEL PARAMETRO $d\omega_2$.




Cilindri critici corrispondenti a camere normali, grandangolari e supergrandangolari.
Gli assi dei cilindri critici sono allineati con la DIREZIONE DI VOLO.

Con camere grandangolari perché si verifichino le condizioni di cilindro critico, il terreno deve essere molto montuoso.

L'uso di camere normali aumenta le possibilità di non poter risolvere il problema di orientamento relativo.

Si manifestano difficoltà di calcolo numerico nella soluzione del sistema normale perché esso risulta o singolare o comunque mal strutturato.

Se si è prossimi a una superficie critica alcune colonne della matrice disegno generata dalle equazioni alle parallassi risultano proporzionali l'una all'altra.
(Ad esempio, nel caso di orientamento relativo asimmetrico, l'esistenza di una superficie critica si manifesta con una proporzionalità tra i coefficienti di $d\omega_2$ e i coefficienti di $db_y$.)

Procedura di linearizzazione delle equazioni di Orient.Ass.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m \cdot \mathrm{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Supponendo che le rotazioni $\Omega$, $\Phi$, $\mathrm{K}$ siano molto piccole e la scala m sia vicina ad 1:

$$d\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & -d\mathrm{K} & d\Phi \\ d\mathrm{K} & 1 & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1 \end{pmatrix} \qquad m = 1 + dm$$

Quindi il prodotto diventa

$$m \cdot \boldsymbol{R} = (1 + dm) d\boldsymbol{R} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+dm & -dK & d\Phi \\ dK & 1+dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & 1+dm \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} + \begin{pmatrix} dm & -dK & d\Phi \\ dK & dm & -d\Omega \\ -d\Phi & d\Omega & dm \end{pmatrix}$$

Se le traslazioni sono piccole inoltre $\begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX_u \\ dY_u \\ dZ_u \end{pmatrix}$

Quindi le equazioni della rototraslazione nello spazio linearizzate sono:

# COMPENSAZIONE DEL BLOCCO A MODELLI INDIPENDENTI

Supponiamo che il blocco sia costituito da fotogrammi con ricoprimento longitudinale del 60% circa e trasversale di circa il 20%.
La compensazione a modelli indipendenti parte dalle coordinate modello, ottenute dopo che si è effettuato l'orientamento relativo delle coppie di fotogrammi e si è formato ciascun modello: le unità elementari della triangolazione fotogrammetrica a modelli indipendenti sono i singoli modelli stereoscopici

Nel corso della compensazione del blocco, ogni modello verrà connesso agli altri in un unico blocco e, contemporaneamente, trasformato nel sistema di riferimento terreno: ogni modello deve essere traslato (3 trasl) ruotato (3 angoli) e dimensionato (1 fattore di scala) imponendo che i punti comuni a più modelli abbiano le stesse coordinate terreno, (orientamento comune) e imponendo per l'orientamento assoluto le coordinate terreno dei punti d'appoggio.

Si usano più dati del minimo indispensabile, e si ottiene, mediante una stima (compensazione) ai M.Q. dei parametri di orientamento esterno di tutti i modelli, che :

- I PUNTI DI LEGAME (TRA MODELLI) SIANO IL PIÙ POSSIBILE COINCIDENTI,
- GLI SCARTI SUI PUNTI DI APPOGGIO SIANO PIÙ PICCOLI POSSIBILE.

# COMPENSAZIONE PLANIMETRICA

Supponiamo di avere formato dei modelli in un piano orizzontale, e di volerli a) collegare e b) orientare su punti noti.

⏩ Come prodotto finale, si vogliono determinare i parametri di orientamento assoluto di ogni modello, e le coordinate X, Y di punti incogniti osservati sui modelli.

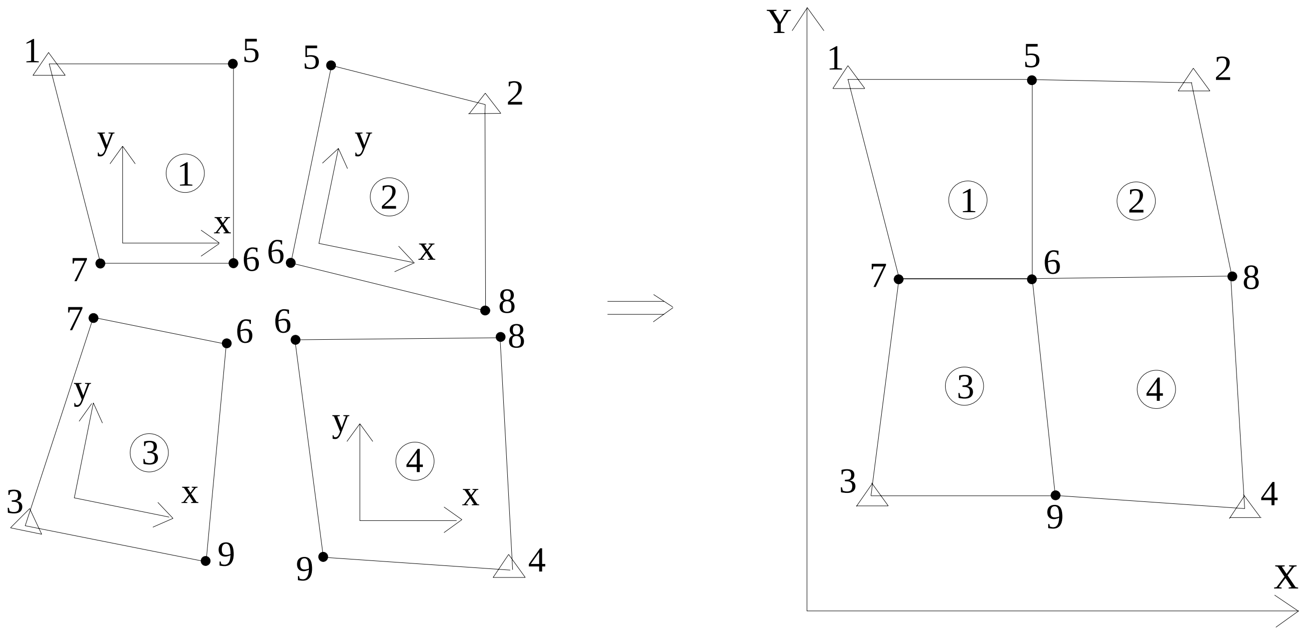
➔ Questi punti serviranno successivamente come punti d'appoggio per i singoli modelli in fase di restituzione.

Dei punti noti si hanno a disposizione coordinate modello (del modello/i in cui si trovano, anche uno solo) e le coordinate assolute (terreno)

Dei punti incogniti sono note solo le coordinate modello: in particolare di ogni punto si avranno a disposizione una coppia di coordinate modello ($x_i$,$y_i$), per ogni modello in cui si trova il punto. (coordinate riferite a 'sistemi modello' indipendenti tra loro)

(ogni punto di legame si troverà almeno su due modelli, mentre ogni punto di appoggio si potrà trovare anche su un solo modello.)

# ESEMPIO




ciascuno dei quattro modelli deve essere trasformato mediante rototraslazione piana con variazione di scala.

Quindi devono essere determinate le seguenti incognite delle trasformazioni :

- due traslazioni
- una rotazione
- un fattore di scala

Per concatenare fra loro i singoli modelli in un unico blocco si usano i punti di legame 5,6,7,8,9 di cui si conoscono solo le coordinate modello.

Per riferire (contemporaneamente) il blocco al sistema terreno si usano i punti di appoggio 1,2,3,4 di cui oltre alle coordinate modello si conoscono anche le coordinate terreno

•La compensazione consiste nel trasformare ciascun modello mediante le equazioni di rototraslazione piana con variazione di scala in modo che:

•i punti di legame risultino il più possibile coincidenti
•gli scarti residui sui punti di appoggio siano i più piccoli possibile.

Le relazioni matematiche fra coordinate modello e coordinate terreno sono espresse dalle equazioni di una trasformazione conforme nel piano:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} \cos \mathrm{K} & -\operatorname{sen} \mathrm{K} \\ \operatorname{sen} \mathrm{K} & \cos \mathrm{K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'estensione di questo sistema di equazioni a un blocco di fotogrammi è detta trasformazione conforme <u>CONCATENATA</u> nel piano.

La non linearità nelle incognite m e K si può eliminare sostituendo:

$$m \cdot \cos \mathrm{K} = a \qquad\qquad m \cdot \operatorname{sen} \mathrm{K} = b$$

Si ottengono così le equazioni lineari:

$$X = X_u + a\ x - b\ y \qquad\qquad Y = Y_u + a\ y + b\ x$$

Per ogni punto noto appartenente ad un modello viene scritta una **coppia di equazioni** contenente i **4 parametri** incogniti (di quel modello).

Per ogni punto di legame viene scritta ancora una coppia di equazioni che **contiene in più le due coordinate terreno $X_p$, $Y_p$ incognite**.

Per ogni punto di appoggio e per ogni modello si scrivono due equazioni nella forma:

$$X = \underline{X}_u + \underline{a}\, x - \underline{b}\, y$$

$$Y = \underline{Y}_u + \underline{a}\, y + \underline{b}\, x$$

mentre per ogni punto di legame le scriviamo nella forma:

$$0 = \underline{X}_u + \underline{a}\, x - \underline{b}\, y - \underline{X}$$

$$0 = \underline{Y}_u + \underline{a}\, y + \underline{b}\, x - \underline{Y}$$

(le incognite sono sottolineate)

Nell'esempio della figura vista prima abbiamo:

4 x 4 = 16 parametri di trasformazione $X_u$, $Y_u$, a, b
5 x 2 = 10 coordinate X, Y dei punti di legame

per un totale di **26 incognite**

4 x 4 x 2 = 32 coordinate modello x, y

per un totale di **32 equazioni**

Il grado di esuberanza risulta uguale a 6.

# Struttura della matrice disegno A

| | $X_{II}^1$ | $Y_{II}^1$ | $X_{II}^2$ | $Y_{II}^2$ | $X_{II}^3$ | $Y_{II}^3$ | $X_{II}^4$ | $Y_{II}^4$ | $a^1$ | $b^1$ | $a^2$ | $b^2$ | $a^3$ | $b^3$ | $a^4$ | $b^4$ | $X_5$ | $Y_5$ | $X_6$ | $Y_6$ | $X_7$ | $Y_7$ | $X_8$ | $Y_8$ | $X_9$ | $Y_9$ | $l$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_x$ | 1 | | | | | | | | $x_1^1$ | $-y_1^1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | $X_1$ | M |
| $v_y$ | | 1 | | | | | | | $y_1^1$ | $x_1^1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | $Y_1$ | o |
| $v_x$ | 1 | | | | | | | | $x_5^1$ | $-y_5^1$ | | | | | | | -1 | | | | | | | | | | | d |
| $v_y$ | | 1 | | | | | | | $y_5^1$ | $x_5^1$ | | | | | | | | -1 | | | | | | | | | | e |
| $v_x$ | 1 | | | | | | | | $x_6^1$ | $-y_6^1$ | | | | | | | | | -1 | | | | | | | | | l |
| $v_y$ | | 1 | | | | | | | $y_6^1$ | $x_6^1$ | | | | | | | | | | -1 | | | | | | | | l |
| $v_x$ | 1 | | | | | | | | $x_7^1$ | $-y_7^1$ | | | | | | | | | | | -1 | | | | | | | o |
| $v_y$ | | 1 | | | | | | | $y_7^1$ | $x_7^1$ | | | | | | | | | | | | -1 | | | | | | **1** |
| $v_x$ | | | 1 | | | | | | | | $x_5^2$ | $-y_5^2$ | | | | | -1 | | | | | | | | | | | M |
| $v_y$ | | | | 1 | | | | | | | $y_5^2$ | $x_5^2$ | | | | | | -1 | | | | | | | | | | o |
| $v_x$ | | | 1 | | | | | | | | $x_2^2$ | $-y_2^2$ | | | | | | | | | | | | | | | $X_2$ | d |
| $v_y$ | | | | 1 | | | | | | | $y_2^2$ | $x_2^2$ | | | | | | | | | | | | | | | $Y_2$ | e |
| $v_x$ | | | 1 | | | | | | | | $x_8^2$ | $-y_8^2$ | | | | | | | | | | | -1 | | | | | l |
| $v_y$ | | | | 1 | | | | | | | $y_8^2$ | $x_8^2$ | | | | | | | | | | | | -1 | | | | l |
| $v_x$ | | | 1 | | | | | | | | $x_6^2$ | $-y_6^2$ | | | | | | | -1 | | | | | | | | | o |
| $v_y$ | | | | 1 | | | | | | | $y_6^2$ | $x_6^2$ | | | | | | | | -1 | | | | | | | | **2** |
| $v_x$ | | | | | 1 | | | | | | | | $x_7^3$ | $-y_7^3$ | | | | | | | -1 | | | | | | | M |
| $v_y$ | | | | | | 1 | | | | | | | $y_7^3$ | $x_7^3$ | | | | | | | | -1 | | | | | | o |
| $v_x$ | | | | | 1 | | | | | | | | $x_6^3$ | $-y_6^3$ | | | | | -1 | | | | | | | | | d |
| $v_y$ | | | | | | 1 | | | | | | | $y_6^3$ | $x_6^3$ | | | | | | -1 | | | | | | | | e |
| $v_x$ | | | | | 1 | | | | | | | | $x_3^3$ | $-y_3^3$ | | | | | | | | | | | | | $X_3$ | l |
| $v_y$ | | | | | | 1 | | | | | | | $y_3^3$ | $x_3^3$ | | | | | | | | | | | | | $Y_3$ | l |
| $v_x$ | | | | | 1 | | | | | | | | $x_9^3$ | $-y_9^3$ | | | | | | | | | | | -1 | | | o |
| $v_y$ | | | | | | 1 | | | | | | | $y_9^3$ | $x_9^3$ | | | | | | | | | | | | -1 | | **3** |
| $v_x$ | | | | | | | 1 | | | | | | | | $X_6^4$ | $-y_6^4$ | | | -1 | | | | | | | | | M |
| $v_y$ | | | | | | | | 1 | | | | | | | $Y_6^4$ | $x_6^4$ | | | | -1 | | | | | | | | o |
| $v_x$ | | | | | | | 1 | | | | | | | | $x_8^4$ | $-y_8^4$ | | | | | | | -1 | | | | | d |
| $v_y$ | | | | | | | | 1 | | | | | | | $y_8^4$ | $x_8^4$ | | | | | | | | -1 | | | | e |
| $v_x$ | | | | | | | 1 | | | | | | | | $x_9^4$ | $-y_9^4$ | | | | | | | | | -1 | | | l |
| $v_y$ | | | | | | | | 1 | | | | | | | $y_9^4$ | $x_9^4$ | | | | | | | | | | -1 | | l |
| $v_x$ | | | | | | | 1 | | | | | | | | $x_4^4$ | $-y_4^4$ | | | | | | | | | | | $X_4$ | o |
| $v_y$ | | | | | | | | 1 | | | | | | | $y_4^4$ | $x_4^4$ | | | | | | | | | | | $Y_4$ | **4** |

APICE = n. del modello PEDICE = n. del punto

Se si riferiscono le coordinate modello, in ciascun modello, al suo baricentro, e si suppone che tutte le osservazioni abbiano lo stesso peso, si ottiene il sistema normale $(A^tA)x=A^tY_0$ la cui matrice N risulta:

| $X_u^i$ | $Y_u^i$ | ... $X_u^m$ | $Y_u^m$ ... | $a^i$ | $b^i$ | ... $a^m$ | $b^m$ ... | $X_j$ | $Y_j$ | ... $X_k$ | $Y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N^i$ | | | | | | | | -1 | | | |
| | $n^i$ | | | | | | | | -1 | | |
| | | $n^m$ | | | | | | -1 | | -1 | |
| | | | $n^m$ | | | | | | -1 | | -1 |
| | | | | $[(\underline{x}^i)^2 + (\underline{y}^i)^2]$ | | | | $-\underline{x}_j^i$ | $\underline{y}_j^i$ | | |
| | | | | | $[(\underline{x}^i)^2 + (\underline{y}^i)^2]$ | | | $-\underline{y}_j^i$ | $-\underline{x}_j^i$ | | |
| | | | | | | $[(\underline{x}^m)^2 + (\underline{y}^m)^2]$ | | $-\underline{x}_j^m$ | $\underline{y}_j^i$ | $-x_k^m$ | $y_k^m$ |
| | | | | | | | $[(\underline{x}^m)^2 + (\underline{y}^m)^2]$ | $-\underline{y}_j^m$ | $-\underline{x}_j^m$ | $-y_k^m$ | $-x_k^m$ |
| | | | | | | | | $h_i$ | | | |
| | | | | *simmetrica* | | | | | $h_i$ | | |
| | | | | | | | | | | $h_k$ | |
| | | | | | | | | | | | $h_k$ |

. . . $n_i$ : numero di punti nel modello *i*-esimo

. . . $h_j$ : numero di modelli in cui cade il punto di legame $P_j$

Il sistema normale relativo alla compensazione planimetrica di un blocco ha una struttura particolare che può essere espressa in forma matriciale nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{S}^T & \boldsymbol{D}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

dove:

$x_1$ sono i parametri di trasformazione incogniti
$x_2$ le coordinate incognite dei punti di legame
$D_1$, $D_2$ matrici diagonali (quadrate)
$S^T$, S matrici sparse
$(n_1,0)$ vettore dei termini noti normali $A^tY_0$

Grazie alla presenza di sotto matrici diagonali è possibile risolvere più rapidamente il sistema normale : si possono eliminare gruppi di incognite e poi fattorizzare opportunamente le matrici restanti.

I programmi di compensazione traggono vantaggio da una struttura a banda della matrice normale, per questo si cerca di riordinare incognite e coefficienti in modo da ottenere questa struttura.

- Se ci sono punti incogniti appartenenti ad un solo modello (isolati) non conviene introdurli nella compensazione, perché appesantiscono il calcolo senza apportare informazioni, cioè senza migliorare la stima.

Le coordinate di tali punti vengono determinate in un secondo tempo, dopo aver determinato i parametri di orientamento esterno dei singoli modelli

La compensazione spaziale del blocco avviene in questo modo:

I punti di ciascun modello sono definiti in un sistema di riferimento tridimensionale indipendente, che si può trasformare nel sistema terreno mediante i sette parametri dell'orientamento assoluto.

Per determinare l'orientamento assoluto simultaneo di tutti i modelli del blocco, si usano, come nel caso planimetrico, le coordinate modello dei punti di legame (compresi i centri di proiezione) e le coordinate modello e terreno dei punti di appoggio

In realtà si opera in due step:
ogni modello viene traslato, orientato e dimensionato in modo che i punti di legame (compresi i centri di presa) risultino il più possibile coincidenti: a questo punto tutti i modelli sono riferiti ad uno stesso sistema di riferimento formando un unico modello stereoscopico (CONCATENAMENTO).

(solitamente tale sistema è quello nel quale è stato calcolato l'orientamento relativo del primo modello della prima strisciata )

in un <u>secondo passo</u> si possono poi determinare i 7 parametri che trasformano le coordinate modello dei punti di appoggio in coordinate terreno (note), in modo che gli scarti residui sui punti di appoggio siano i più piccoli possibili.

Le relazioni matematiche sono quelle dell'orientamento assoluto (trasformazione conforme nello spazio):

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m \cdot R_{\Omega\Phi\mathrm{K}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ogni punto dà luogo a tre equazioni per modello, e in particolare ogni punto di legame (3 equazioni) aggiunge le tre incognite X,Y,Z.

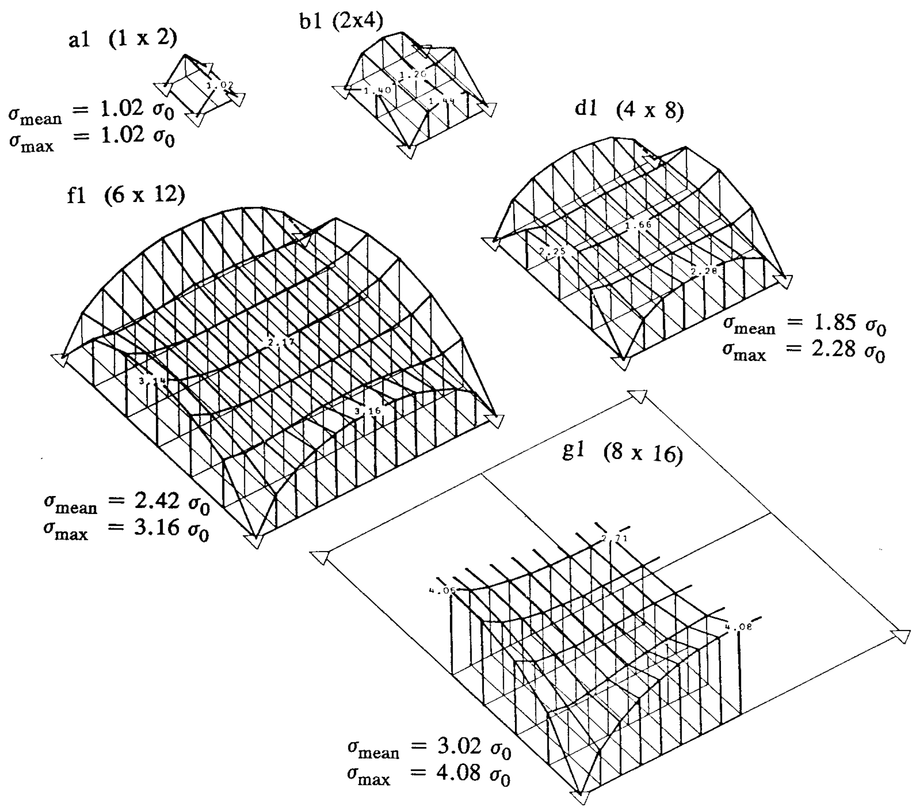
Come <u>risultato</u> della compensazione si avranno i parametri di O.A. di ogni modello, e le <u>coordinate assolute dei punti di legame</u>, compresi i centri di presa di ogni fotogramma.

## PRECISIONE PLANIMETRICA

La precisione delle coordinate X, Y di un punto di legame, in seguito alla compensazione del blocco è esprimibile dalla seguente relazione (da $\sigma_0^2 N^{-1} = C_{XX}$):

$$\sigma_{B,L} = \sqrt{q_{LL}} \cdot \sigma_0 = \sqrt{q_{LL}} \cdot \sigma_{M,L}$$

dove $\sigma_{M,L}$ è la precisione delle coordinate planimetriche del singolo modello




blocchi rettangolari con 4 punti d'appoggio agli spigoli

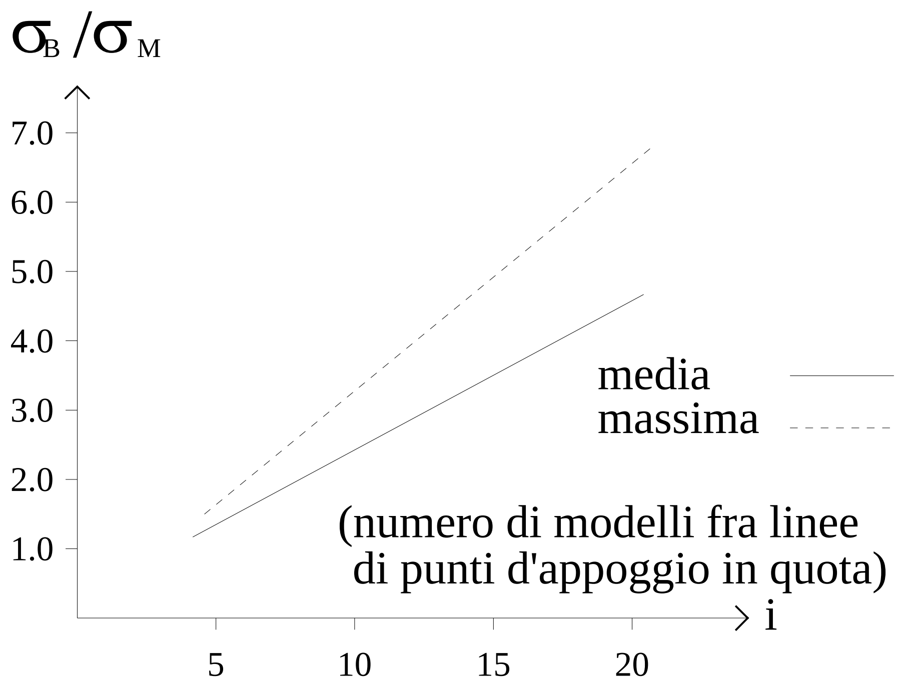
ESEMPIO: un blocco (fotogrammi a scala media 1:6000) costituito da 32 modelli e dotato di quattro punti di appoggio presegnalizzati (caso d1). Risulta $\sigma_{ML}$ = 0.6 10-3 6000 = 3.6 cm ➔ $\sigma_{BL}$ = 6.7 cm

Queste regole per la determinazione della precisione sono applicabili a blocchi rettangolari, ma non valgono nel caso limite di strisciata singola
La quasi uguaglianza tra la precisione del blocco e quella del singolo modello, nel caso di appoggio fitto lungo i bordi, vale anche se i bordi del blocco sono irregolari.

La precisione per i <u>punti isolati (non di legame), cioè appartenenti a un solo modello</u> risulta inferiore di circa il 33% rispetto a quella dei punti di legame.

Alcune esperienze pratiche hanno dimostrato che anche aumentando il numero di punti di legame la precisione dei punti isolati non subisce sensibili miglioramenti
Diverse sono le indicazioni per consentire di eliminare eventuali errori grossolani all’interno del campione di misure. L’esperienza consiglia di usare almeno 8 punti di legame per ciascun modello e coppie di punti di appoggio anziché punti di appoggio isolati.

Precisione altimetrica in funzione di ‘i’ (numero di modelli tra punti altimetrici)



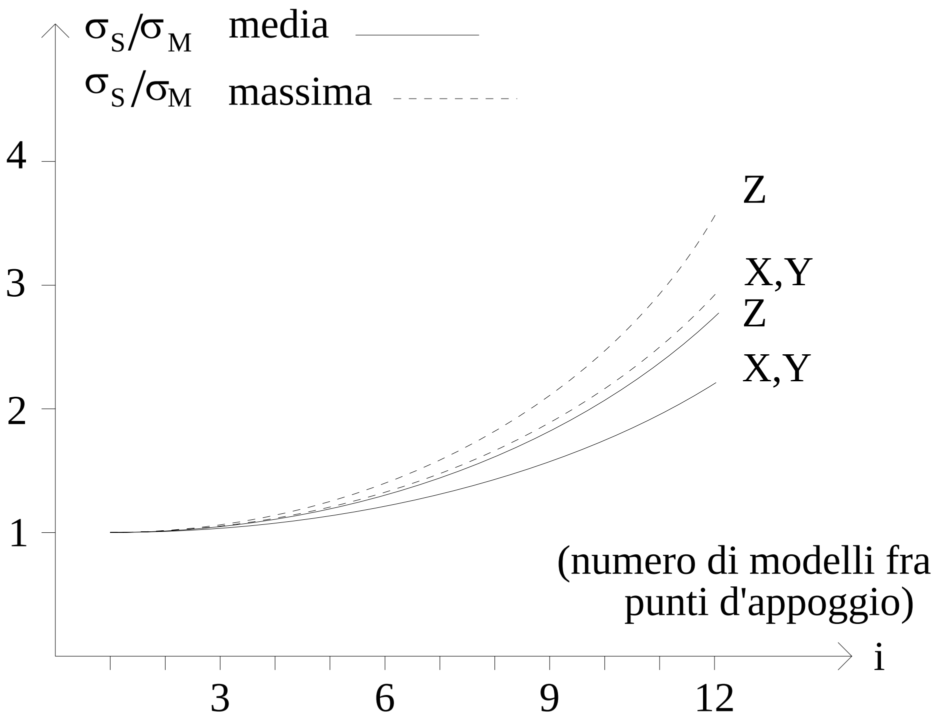

Relazione tra la precisione in quota dei punti agli spigoli dei modelli e il numero i di modelli compresi fra due linee di punti di appoggio altimetrici.
E’ riportata la media degli s.q.m. dell’intero blocco e il valore massimo di s.q.m. nella posizione più sfavorevole.

In confronto alla precisione planimetrica, la precisione altimetrica risulta sensibilmente inferiore.

Se si vuole contenere al massimo il decadimento di precisione è necessario disporre linee di punti di appoggio altimetrico <u>ogni tre modelli</u>.
Tale accorgimento provoca un eccessivo costo per cui nei capitolati è solitamente richiesto di usare file di punti altimetrici <u>ogni quattro modelli</u>.

# PRECISIONE PLANO-ALTIMETRICA DI STRISCIATE SINGOLE

La precisione dei punti ricavati per triangolazione a modelli indipendenti in una strisciata dipende principalmente dal numero dei modelli compresi fra punti di appoggio successivi.




Andamento degli s.q.m. medi e massimi sia in planimetria che in quota