Richiami di Geometria delle curve e delle superfici

1 – Superfici e curve nello spazio in coordinate cartesiane

Si consideri, nello spazio a 3 dimensioni, un sistema di riferimento costituito da una terna cartesiana ortogonale Oxyz

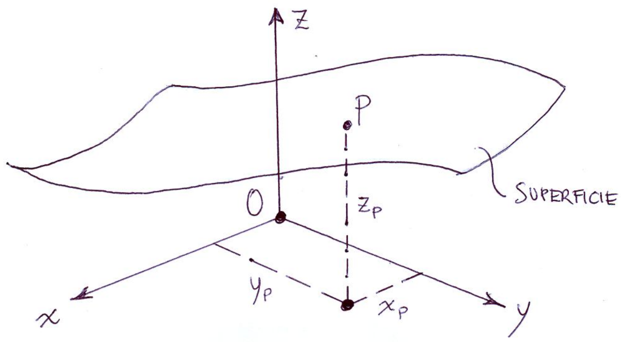
1.1. Equazione cartesiana di una generica superficie

L'equazione di una superficie rappresenta analiticamente la condizione di appartenenza dei punti dello spazio alla superficie. La superficie è il luogo geometrico dei punti dello spazio che soddisfano la sua equazione.
L'equazione può essere scritta in uno dei due modi seguenti:

$F(x,y,z)=0$ (forma IMPLICITA)

oppure

$z=f(x,y)$ (forma ESPLICITA)

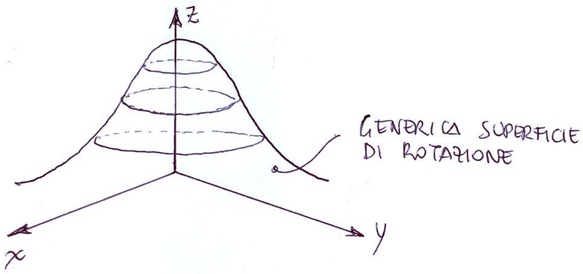


Se un punto P appartiene alla superficie, le sue coordinate devono soddisfare l'equazione.

1.2. Equazione cartesiana di una superficie di rotazione

Se la superficie è ottenuta *dalla rotazione di una curva* attorno all'asse z, la sua equazione assume una forma del tipo:

$$x^2+y^2\text{-}f(z)=0$$

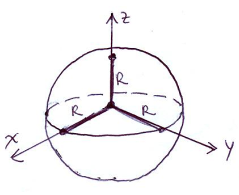


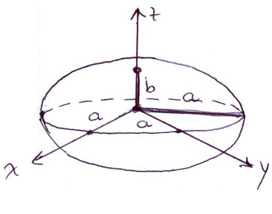
Sezionandola con piani perpendicolari all'asse z si ottengono delle circonferenze

Casi particolari di superfici di rotazione:

$x^2+y^2+z^2=R^2$	Sfera di raggio R
$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$	Ellissoide di rotazione di semiassi a,

↑ equazioni "canoniche", con origine degli assi nel centro



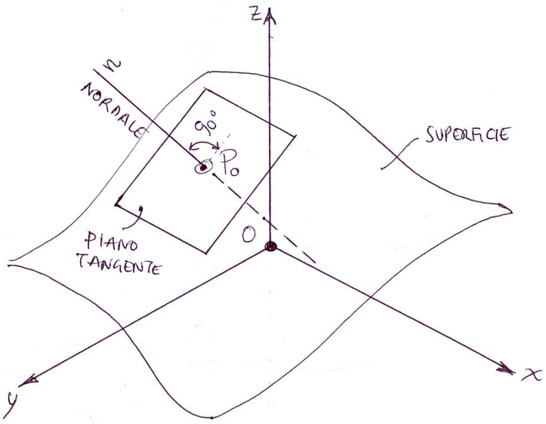


1.3. Piano tangente a una superficie

Il *piano tangente* a una superficie in un suo generico punto Po(xo, yo, zo) ha equazione:

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

Ha per coefficienti(*) le derivate parziali della F, calcolate nel punto di tangenza Po



(*) Ricordiamo che un **piano generico** (caso particolare di superficie) ha un'equazione lineare in x, y e z, con *coefficienti a*, *b*, *c* e *termine noto d*:

$$ax+by+cz+d=0$$

1.4. Retta normale a una superficie

detta anche semplicemente *normale* alla superficie, in un suo generico punto Po(xo, yo, zo), è la retta perpendicolare al piano tangente nel punto Po; la sua equazione si ottiene dalla precedente ricordando la condizione di perpendicolarità tra retta e piano (i coefficienti del piano diventano i *parametri direttori* della retta):

$$\frac{(x-x_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}=\frac{(y-y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}=\frac{(z-z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

equazione della normale in forma *frazionaria*: le due uguaglianze che ne derivano rappresentano le equazioni di due piani, la cui intersezione è la retta normale (v. pagina seguente)

I *coseni direttori* della normale *n* (componenti cartesiane del *versore* diretto lungo la normale) si ottengono dividendo i parametri direttori per il *modulo M* (v. pag. seguente):

$$M=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

$$\cos xn=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{M}$$

$$\cos yn=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{M}$$

$$\cos zn=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{M}$$

(per equazione in forma implicita)

$$M=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+(-1)^2}$$

$$\cos xn=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{M}$$

$$\cos yn=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{M}$$

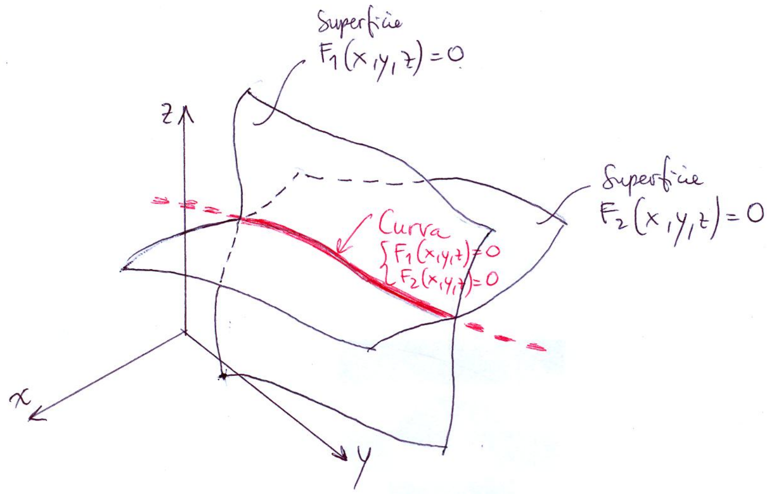
$$\cos zn=-\frac{1}{M}$$

(per equazione in forma esplicita)

1.5. Equazioni cartesiane di una curva nello spazio

Una curva nello spazio è definita dall'intersezione di due superfici. I punti appartenenti alla curva devono soddisfare contemporaneamente le equazioni delle due superfici, ovvero il sistema delle due equazioni:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



N.B. E' possibile che le due superfici si intersechino anche in altre curve oltre a quella che ci interessa.
Se una delle due superfici è un piano, la curva è contenuta in esso e si dice **curva piana**.
Una curva che non sia piana si dice **curva sghemba**.

1.6. Equazioni cartesiane di una retta nello spazio

Una retta nello spazio si ottiene dall'intersezione di due piani. I punti appartenenti alla curva devono soddisfare contemporaneamente le equazioni dei due piani, ovvero il sistema delle due equazioni (caso particolare del precedente).
Di solito si preferisce scrivere le equazioni della retta nella seguente forma detta **frazionaria** che esprime l'allineamento di un punto generico P(x, y, z) con due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ che definiscono la retta:

$$\frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} = \frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)} = \frac{(z-z_1)}{(z_2-z_1)}$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{(x-x_1)}{l} = \frac{(y-y_1)}{m} = \frac{(z-z_1)}{n}$$

Le quantità *l*, *m* ed *n* a denominatore vengono dette **parametri direttori** della retta e sono le componenti cartesiane x, y, z di un vettore che giace lungo la retta. Il *modulo M* di tale vettore è dato da:

$$M = \pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

I **coseni direttori** della retta (componenti del *versore* che giace lungo la retta) si ottengono dividendo i parametri direttori per il modulo:

$$\cos xr = \frac{l}{M} \qquad \cos yr = \frac{m}{M} \qquad \cos zr = \frac{n}{M}$$

1.7. Angolo tra due rette nello spazio

Date due rette *r* ed *s* nello spazio aventi rispettivamente i parametri direttori l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2, l'angolo tra le due rette si ottiene da:

$$\cos rs = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\pm\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

2 – Superfici e curve in coordinate curvilinee

Spesso è conveniente utilizzare, anziché le coordinate cartesiane, altri tipi di coordinate dette *coordinate curvilinee*, che permettono di dare rappresentazioni di superfici o curve di tipo *parametrico*.

2.1. Equazioni parametriche di una superficie

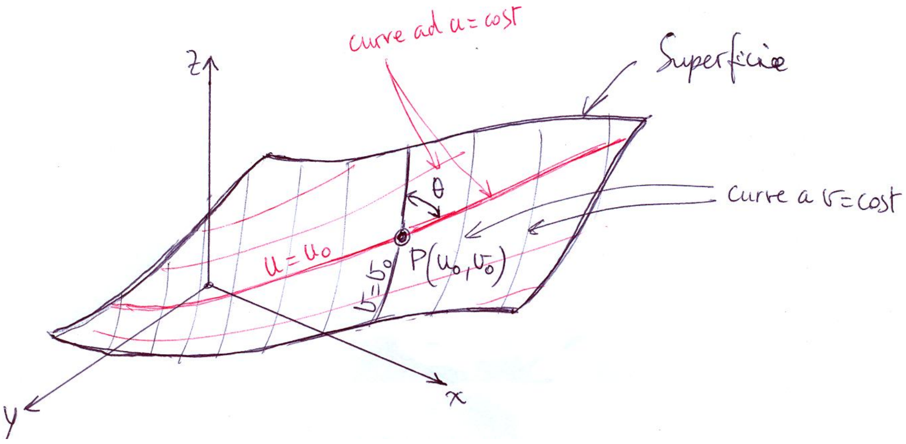
Una superficie è un ente geometrico a due dimensioni, in quanto nella sua equazione (vista al punto 1) se si assegnano due coordinate resta determinata la terza. Per definire la posizione di un punto su una superficie basta quindi assegnare <u>due parametri indipendenti</u>.
Introduciamo quindi due variabili indipendenti *u*, *v* . Una superficie può essere definita come il luogo dei punti dello spazio che verificano contemporaneamente le tre condizioni:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

dette **equazioni parametriche** della superficie

Le *tre* coordinate di un punto appartenente alla superficie sono funzioni di *due* parametri

Mantenendo costante *u* si ottiene un insieme di ∞^1 curve ad *u = cost*
Mantenendo costante *v* si ottiene un insieme di ∞^1 curve a *v = cost*
Ogni punto della superficie si trova nell'intersezione tra una curva ad *u = cost* ed una a *v = cost* ; la posizione del punto risulta quindi individuata dalla coppia di valori *(u, v)* che per questo vengono detti **coordinate curvilinee**.

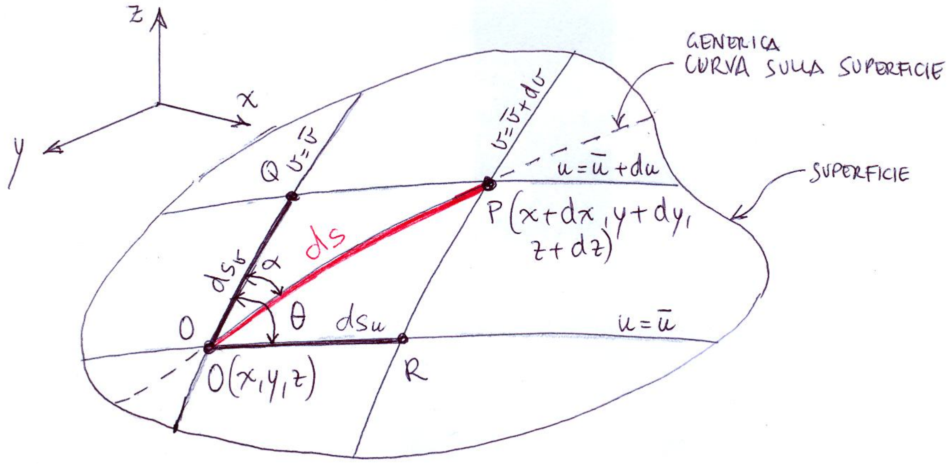


I due insiemi di curve a *u = cost* e a *v = cost* formano un **reticolato** sulla superficie che può essere utilizzato per definire la posizione di un punto su di essa

L'angolo θ tra le curve ad *u = cost* e a *v = cost* può assumere qualsiasi valore; se θ è ovunque un angolo retto, il sistema di coordinate curvilinee si dice **ortogonale**.

2.2. Elemento di una curva su una superficie

E' importante, per lo studio dell'andamento delle curve su una superficie (problema di grande interesse per la geodesia classica, dove la superficie considerata è l'ellissoide terrestre), partire dallo studio *locale* della curva, considerandone un *elemento infinitesimo*.
Si consideri allora un elemento infinitesimo di una generica curva appartenente a una generica superficie della quale sono note le equazioni parametriche nelle coordinate curvilinee *u, v*.
L'elemento d'arco ha per estremi due punti O e P infinitamente vicini tra loro ed ha lunghezza *ds*; esso risulta compreso tra due coppie di curve ad *u=cost* e a *v=cost* (vedi figura):



L'elemento *ds*, essendo infinitesimo, può essere assimilato ad un segmento di retta le cui proiezioni sugli assi cartesiani sono *dx*, *dy* e *dz*. In coordinate cartesiane vale allora la seguente relazione:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Le quantità *dx*, *dy* e *dz* si possono ottenere in funzione delle coordinate curvilinee differenziando le tre equazioni parametriche (differenziale di funzioni a più variabili):

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

Quadriamo e sommiamo i tre termini, e sostituiamoli nell'espressione scritta sopra.
Si ottiene la seguente importante formula che esprime l'elemento d'arco in funzione delle coordinate curvilinee:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (1)$$

I simboli *E*, *F* e *G* rappresentano sinteticamente alcune combinazioni di derivate parziali delle funzioni a secondo membro delle equazioni parametriche della superficie, riportate per esteso alla pagina seguente

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

Questa particolare simbologia è usata con ricorrenza nella geodesia classica

N. B.: le derivate si intendono tutte calcolate nel punto O

Se nella (1) poniamo *u=cost* ne segue che *du=0*, per cui l'elemento della curva a *u=cost* uscente da O (v. figura pag. precedente) è dato da:

$$ds_u = \sqrt{G}\, dv$$

Analogamente, ponendo *v=cost* si ha *dv=0*, per cui l'elemento di curva a *v=cost* è dato da:

$$ds_v = \sqrt{E}\, du$$

2.3. Angolo compreso tra le curve a *u=cost* e a *v=cost*

Determiniamo ora l'angolo θ compreso tra le curve a *u=cost* e a *v=cost*. Per farlo, applichiamo il teorema di Carnot al triangolo OPQ (v. figura precedente). Il quadrilatero infinitesimo OQPR può essere assimilato a un parallelogramma, per cui l'angolo PQO è (180° - θ):

$$ds^2 = ds_v^2 + ds_u^2 - 2\, ds_v\, ds_u \cos(180° - \theta)$$

da cui si ottiene:

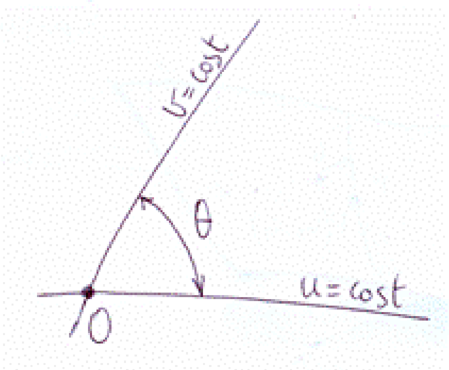
$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 + 2\sqrt{EG}\, du\, dv \cos\theta$$

confrontando quest'ultima espressione con la (1) si ha:

$$2F = 2\sqrt{EG}\cos\theta$$

da cui si ricava il coseno di θ:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$ e il seno di θ si ottiene poi da: $$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}$$



I termini E, F e G, come sempre, vanno calcolati nel punto O, in cui si vuole ricavare θ

2.4. Coordinate curvilinee ortogonali

Se in ogni punto della superficie risulta *F = 0*, dalle espressioni di θ appena ricavate si ottiene che cos θ=0 e sin θ=1, per cui θ=90° . In altre parole, le curve a *u=cost* e a *v=cost* si incontrano sempre ad angolo retto.
Se ciò accade, il sistema di coordinate curvilinee si dice ortogonale.

Per un sistema ortogonale l'espressione dell'elemento d'arco (1) si semplifica, in quanto scompare il termine misto e si ha:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \qquad (2)$$

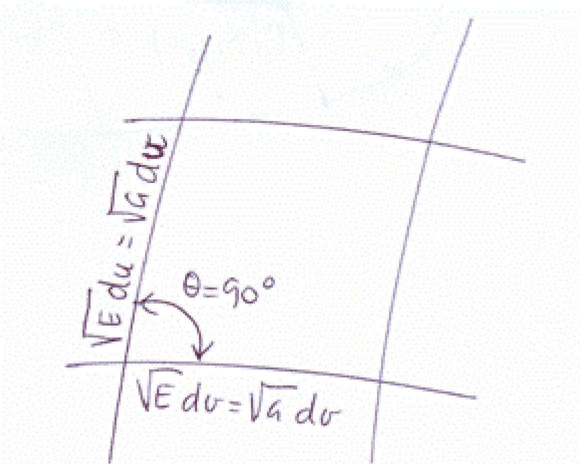
2.5. Coordinate curvilinee isometriche

Se oltre ad essere *F = 0* si ha anche, su tutta la superficie, *E = G* , allora le coordinate curvilinee, oltre che ortogonali, si dicono **isometriche**. Il sistema di parametri viene anche detto **isotermo**.
L'espressione (1) dell'elemento d'arco si semplifica ulteriormente:

$$ds^2 = E\left(du^2 + dv^2\right) = G\left(du^2 + dv^2\right) \qquad (3)$$

Vedremo in seguito che il sistema delle coordinate geografiche sull'ellissoide terrestre è ortogonale ma non isometrico. Può essere però ridotto a un sistema isometrico operando un opportuno cambio di variabile per la latitudine.

Sistema **ortogonale** ma **non isometrico**



Sistema **ortogonale** e **isometrico** (o **isotermo**)

2.6. Funzioni trigonometriche dell'azimut

Consideriamo un sistema di coordinate curvilinee ortogonali, e determiniamo l'angolo α compreso tra la curva generica (a cui appartiene *ds*) e la linea a *v=cost* (si veda sempre la figura a pag. 5).
Nel caso dell'ellissoide terrestre vedremo che la linea a *v=cost* è il *meridiano*, e l'angolo α prende il nome di **azimut**.
Se il sistema è ortogonale il triangolo OPQ è rettangolo, per cui risulta:

$$\cos\alpha = \frac{ds_v}{ds} = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}$$

$$\sin\alpha = \frac{ds_u}{ds} = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}$$

$$\tan\alpha = \frac{ds_u}{ds_v} = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}$$

2.7. Area del quadrilatero elementare

Torniamo a considerare coordinate curvilinee con θ generico, e determiniamo l'area *dσ* del quadrilatero elementare OQPR compreso tra due coppie di curve a *u=cost* e *v=cost* infinitamente vicine (v. sempre la figura a pag. 5). Tale quadrilatero, come già detto, può essere assimilato a un parallelogramma:

$$d\sigma = 2\cdot\left(\frac{1}{2}ds_v ds_u \sin\theta\right)$$ (si scompone in due triangoli uguali)

sostituendo le espressioni precedentemente ricavate si ottiene:

$$d\sigma = \sqrt{E}\,du\cdot\sqrt{G}\,dv\cdot\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$ da cui, semplificando:

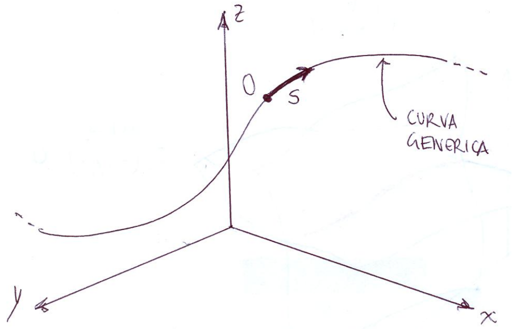
$$d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

Se le coordinate curvilinee sono ortogonali (F=0) l'espressione si semplifica ulteriormente:

$$d\sigma = \sqrt{EG}\,du\,dv$$

2.8. Equazioni parametriche di una curva nello spazio

Una curva nello spazio (che in generale è *sghemba*, cioè non piana) è un ente geometrico a *una dimensione*. Un punto vincolato a rimanere sulla curva si può muovere solo lungo di essa, in avanti o all'indietro. Per questo motivo, è possibile esprimere analiticamente una curva in funzione di **un solo parametro**.
Di solito si considera come parametro l'**ascissa curvilinea** *s*, ovvero la lunghezza (sviluppo) di un arco di curva contata da un'origine arbitraria, con un verso positivo anch'esso arbitrario.



Le **equazioni parametriche di una curva** nello spazio hanno quindi la seguente forma:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

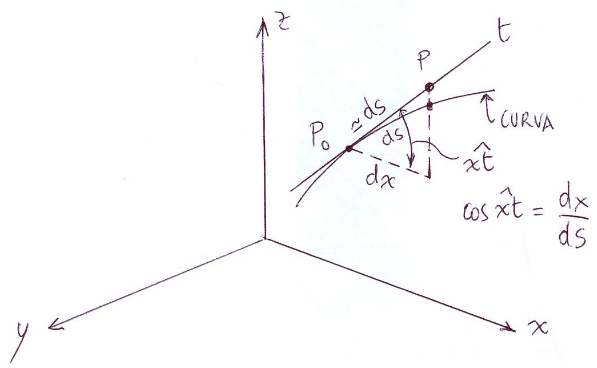
assegnando un valore di *s* si ricavano le coordinate cartesiane di un punto che appartiene alla curva

2.9. Retta tangente a una curva

La **tangente** a una curva in un suo punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ ha la seguente equazione:

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{ds}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{ds}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{ds}}$$

Ha per *parametri direttori* le derivate prime dei secondi membri delle tre equazioni parametriche, come si vede dalla figura sottostante (che rappresenta un esempio con curva giacente sul piano xz, ma è generalizzabile)



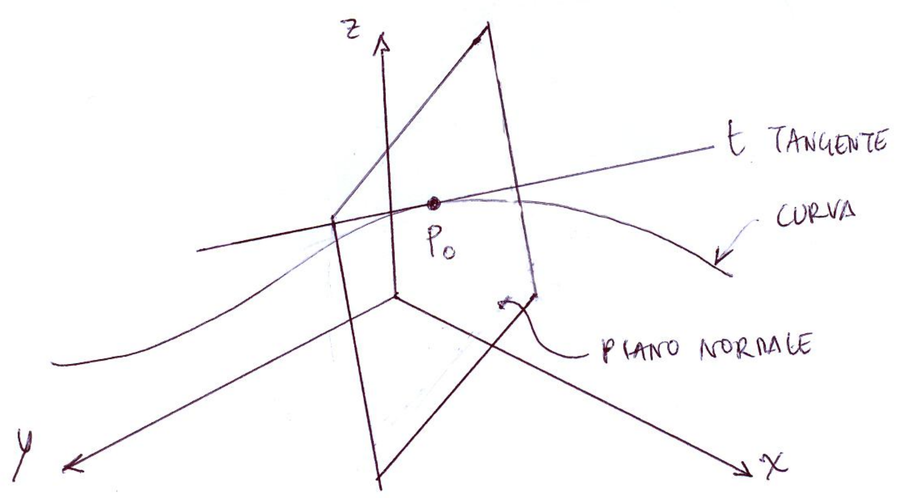
I *coseni direttori* della tangente coincidono con i parametri direttori in quanto il modulo è pari a 1:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 \qquad \text{da cui} \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

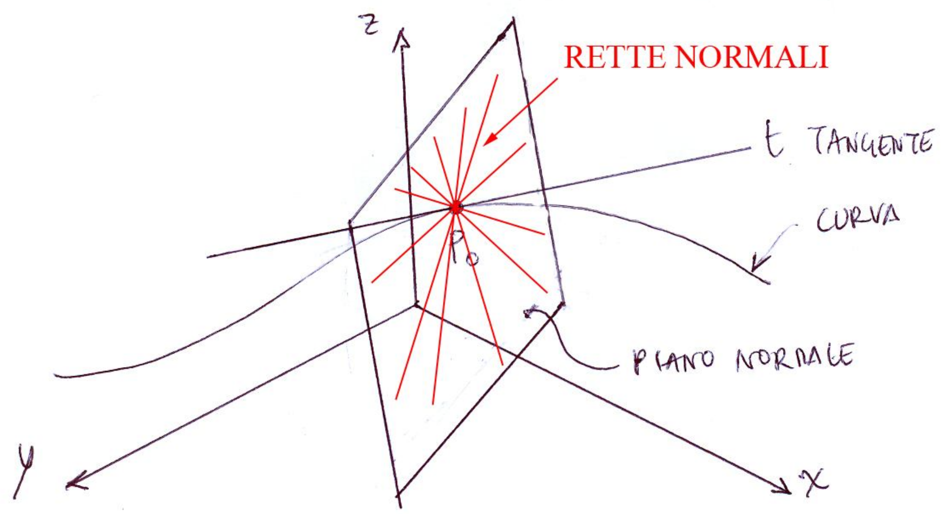
2.10. Piano normale a una curva

Il **piano normale** a una curva in un suo punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ è il piano perpendicolare in tale punto alla retta tangente. Per la condizione di perpendicolarità tra retta e piano, la sua equazione ha per coefficienti i parametri direttori della tangente:

$$(x-x_0)\frac{dx}{ds}+(y-y_0)\frac{dy}{ds}+(z-z_0)\frac{dz}{ds}=0$$

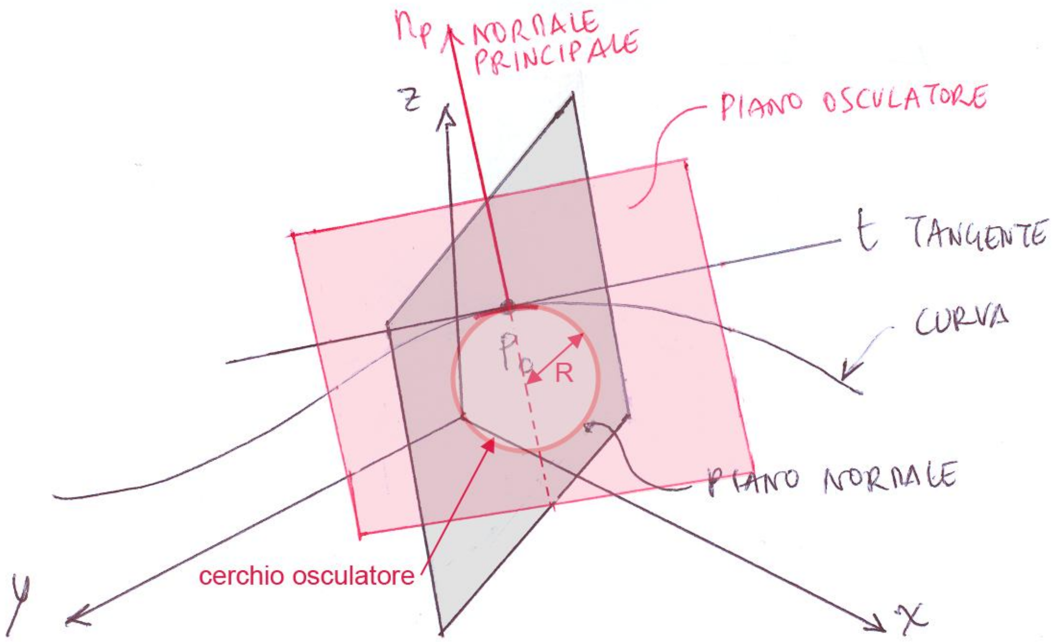


Tutte le rette giacenti sul piano normale e passanti per Po sono normali alla curva.
Esse costituiscono un fascio di ∞^1 **rette normali**, giacenti sul piano normale.



2.11. Normale principale di una curva

Si è appena visto che sul piano normale esiste un fascio di ∞^1 rette normali. Tra esse ve ne è una particolarmente importante, detta **normale principale**, che è l'intersezione del *piano normale* con il *piano osculatore*.



Il *piano osculatore* di una curva in un suo punto Po è definito come la posizione limite di un piano che contenga la tangente alla curva in Po ed un altro punto P della curva, al tendere di P a Po.
In pratica, considerando la curva (sghemba) come formata da una successione di elementi infinitesimi di curva piana, il piano osculatore è il piano che contiene l'elementino di curva nell'intorno di Po.
Al piano osculatore appartiene il *cerchio osculatore*, che è la circonferenza che meglio approssima la curva nell'intorno di Po. Il raggio del cerchio osculatore è detto *raggio di prima curvatura*, o semplicemente *raggio di curvatura* della curva; il suo centro è detto *centro di prima curvatura*.

L'**equazione della normale principale** è la seguente:

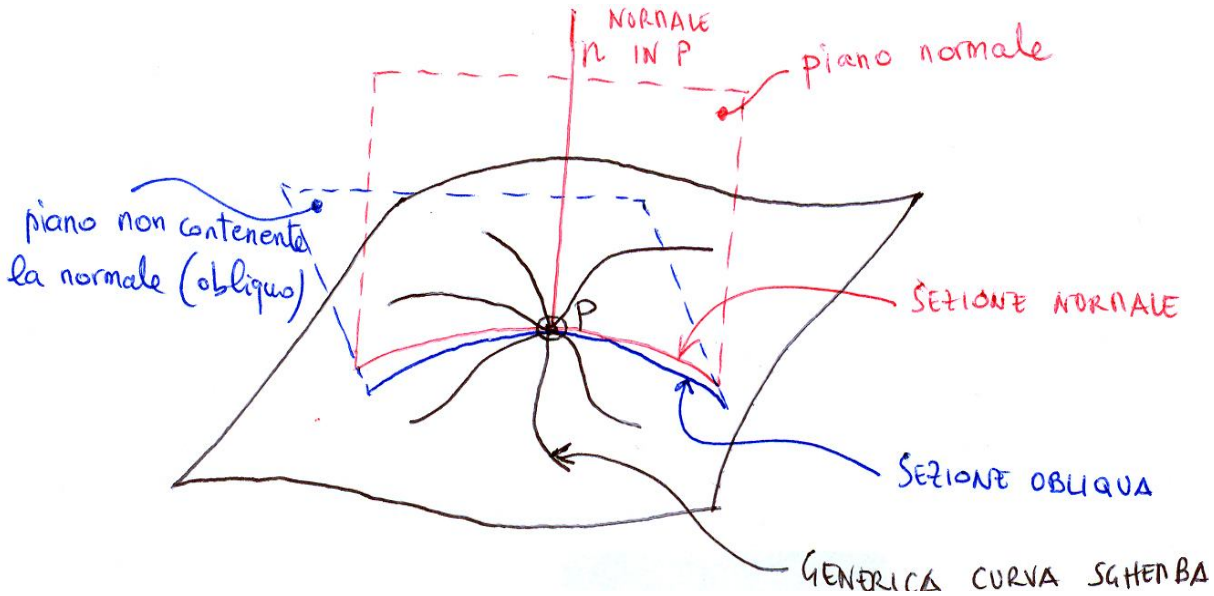
$$\frac{x-x_0}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{y-y_0}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{z-z_0}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

I *parametri direttori* della normale principale sono le derivate seconde dei primi membri delle equazioni parametriche della curva.
Si può dimostrare che il *modulo* è l'inverso del quadrato del raggio di prima curvatura. Quindi, i *coseni direttori* sono dati dalle seguenti tre espressioni, dette *formule di Frenet* -→

$$M = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = \frac{1}{R}$$

$$\begin{cases} \cos xn_p = \dfrac{\frac{d^2x}{ds^2}}{M} = R\cdot\dfrac{d^2x}{ds^2} \\ \cos yn_p = \dfrac{\frac{d^2y}{ds^2}}{M} = R\cdot\dfrac{d^2y}{ds^2} \\ \cos zn_p = \dfrac{\frac{d^2z}{ds^2}}{M} = R\cdot\dfrac{d^2z}{ds^2} \end{cases}$$

3 - Raggi di curvatura delle curve su una superficie: i teoremi di Meusnier ed Eulero



3.1. Curve di una superficie passanti per uno stesso punto

Dato un generico punto P su una superficie, per esso passano infinite curve appartenenti alla superficie. Consideriamo l'insieme di queste curve passanti per P. Possiamo distinguerle in diverse tipologie:

CURVE PIANE {
- SEZIONI NORMALI
- SEZIONI OBLIQUE

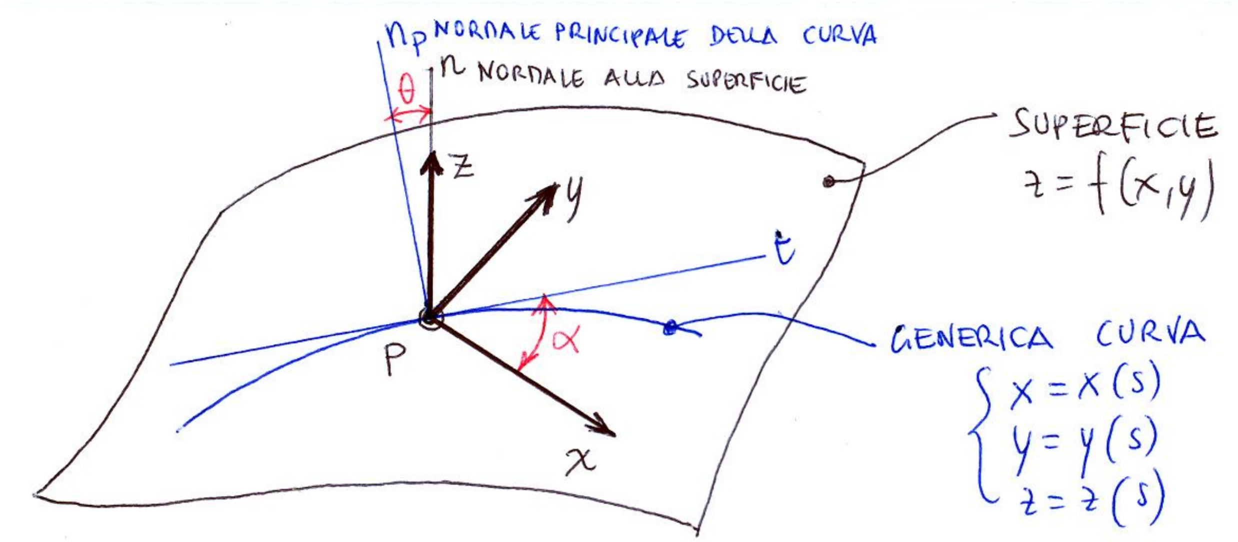
CURVE SGHEMBE

Si dicono **sezioni normali** le curve (piane) che si ottengono sezionando la superficie con un piano contenente la normale in P
Si dicono **sezioni oblique** le curve (piane) che si ottengono sezionando la superficie con un piano qualsiasi passante per P
Le **curve sghembe** sono invece tutte le generiche curve non piane appartenenti alla superficie.

Tutte queste curve, per il fatto di appartenere a una stessa superficie, devono avere qualche relazione tra loro. In particolare:

1) le loro **tangenti** in P appartengono tutte allo stesso piano (*piano tangente* alla superficie in P)

2) i loro **raggi di curvatura** in P sono legati da alcune importanti relazioni tra cui i teoremi di Eulero e di Meusnier che vedremo tra poco.



<u>3.2. Relazioni tra le curve aventi la stessa tangente</u>

Vogliamo studiare il comportamento *locale* delle curve passanti per uno stesso punto. Assumiamo allora un sistema di riferimento locale, costituito dalla **terna euleriana** Pxyz con origine in P, asse *z* coincidente con la normale *n* alla superficie, assi *x* ed *y* sul piano tangente alla superficie. Consideriamo l'equazione della superficie in forma esplicita rispetto alla *z*.

Consideriamo una **generica curva** (in generale sghemba) appartenente alla superficie e passante per P. La **tangente** *t* alla curva giace sul piano tangente (xy) e forma con l'asse x un angolo α. La **normale principale** n_p della curva non coincide in generale con la **normale alla superficie** ma forma con essa un angolo che chiamiamo θ.
(Attenzione a non confonderlo con il θ definito in precedenza, angolo tra le curve a u = cost e a v = cost)

Con questa particolare scelta del sistema di riferimento, il versore giacente lungo la normale, coincidente con l'asse z, ha componenti x ed y nulle. Allora i coseni direttori rispetto agli assi x ed y della normale alla superficie sono pari a zero:

cos xn = 0 , cos yn = 0 , per cui, ricordando le loro espressioni (par. 1.4) si ha:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_o = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_o = 0$$

L'angolo θ è l'angolo compreso tra la normale principale e l'asse z, quindi il suo valore è quello del 3° coseno direttore della normale principale (formule di Frenet, par. 2.11):

$$\cos\theta = R\frac{d^2z}{ds^2}$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{d^2z}{ds^2}$$

Il rapporto tra cosθ e il raggio di curvatura di una generica curva è pari alla derivata seconda della z

Partiamo da questa relazione $\frac{\cos\theta}{R} = \frac{d^2 z}{ds^2}$ e svolgiamo la derivata

Per farlo, deriviamo due volte l'equazione della superficie in forma esplicita:

E' $z = z(x, y)$ ma essendo x ed y funzione di s (equazioni parametriche della curva) si ha:

$z = z[x(s), y(s)]$ funzione di 2 variabili, a loro volta funzione di s

Derivata prima:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds}$$

Derivata seconda:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} \right) \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{ds^2}$$

Questa espressione può essere scritta in forma più compatta introducendo i cosiddetti SIMBOLI DI MONGE, simbologia sintetica molto utilizzata in geodesia:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

e ricordando l'espressione dei coseni direttori della tangente (par. 2.9):

$$\cos xt = \cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \cos yt = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{dy}{ds}$$

Sostituendo e semplificando si ottiene questa importante espressione:

$$\frac{\cos\theta}{R} = r_0 \cos^2\alpha + 2 s_0 \sin\alpha \cos\alpha + t_0 \sin^2\alpha \qquad (4)$$

Analizziamo questa espressione :

r_0, s_0 , t_0 (simboli di Monge) sono derivate seconde della equazione della superficie calcolate in P, quindi sono quantità costanti una volta definito il punto P

il rapporto **cosθ / R** è solo funzione dell'angolo α, quindi **è costante per tutte le curve che abbiano la stessa tangente**

Da questa espressione e dalle considerazioni sopra fatte derivano alcune importanti conseguenze, tra le quali i teoremi di Meusnier e di Eulero

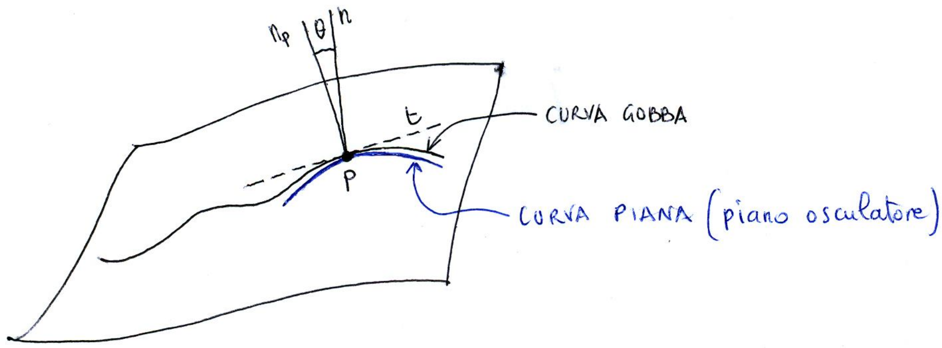
3.3. Curva sghemba e curva piana

Data una superficie, consideriamo su di essa due particolari curve aventi la stessa tangente in un punto P (v. figura):

- una **curva sghemba** generica;

- la **curva piana** ottenuta intersecando la superficie con il piano osculatore della curva sghemba

Per quanto visto sopra dovrà essere: $\frac{\cos\theta}{R} = \frac{\cos\theta_1}{R_1}$



ma essendo $\boldsymbol{\theta=\theta_1}$ (la normale principale alla curva gobba per definizione è contenuta nel piano osculatore), conseguentemente dovrà risultare $\mathbf{R=R_1}$ ovvero **le due curve hanno lo stesso raggio di curvatura.** Vale quindi il seguente enunciato:

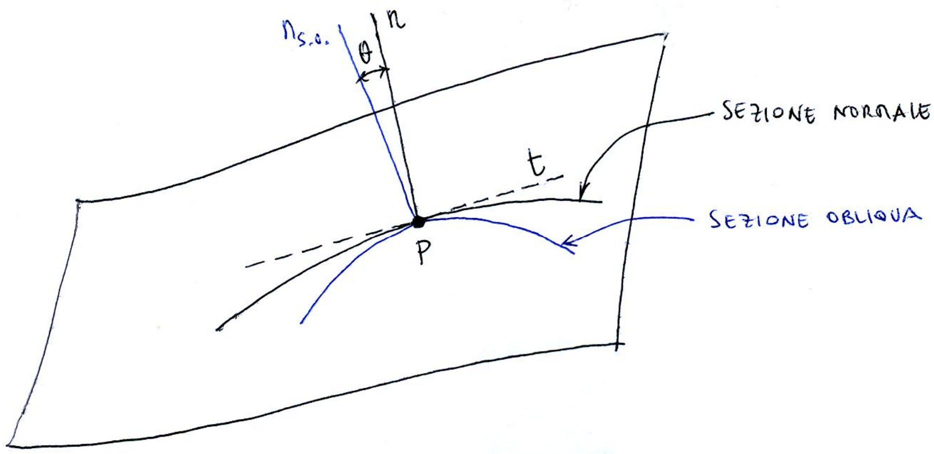
Una curva sghemba su una superficie ha in un punto lo stesso raggio di curvatura della curva piana ottenuta sezionando la superficie con il piano osculatore alla curva sghemba.

Ciò permette di studiare localmente una curva gobba sostituendola con una curva piana, più semplice.

3.4. Sezione normale e sezione obliqua: Teorema di Meusnier

in maniera analoga, consideriamo sulla superficie le seguenti due curve passanti per P (v. figura):

- una **curva piana** generica (**sezione obliqua**) la cui normale (appartenente al piano di sezione) formi un angolo θ con la normale alla superficie;
- la **sezione normale** per P avente la stessa tangente *t* della sezione obliqua



Per la sezione normale si ha θ = 0 , da cui cos θ = 1

Detto Rα il raggio di curvatura della sezione normale ed r quello della sezione obliqua, si ha pertanto:

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{R_\alpha}$$

da cui si ottiene:

$$r = R_\alpha \cdot \cos\theta \quad \text{(Teorema di Meusnier)}$$

che si enuncia come segue:

Il raggio di curvatura di una sezione piana obliqua la cui normale formi con la normale alla superficie un angolo θ è pari al raggio di curvatura della sezione normale avente la stessa tangente moltiplicato per il coseno di θ

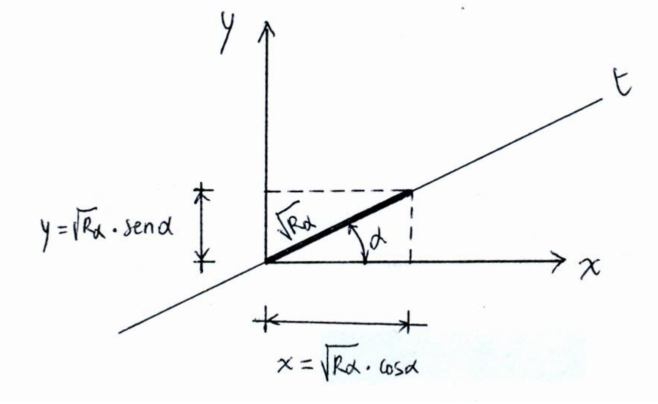
Questo teorema e quello precedente permettono di calcolare il raggio di curvatura di una curva qualsiasi (sghemba) per mezzo di quello della sezione normale avente stessa tangente (molto più semplice da studiare)

3.5. Raggi di curvatura delle sezioni normali: Teorema di Eulero

Per una sezione *normale*, essendo θ = 0 e quindi cos θ = 1, l'espressione (4) di **cosθ/R** diventa:

$$\frac{1}{R_\alpha} = r_0 \cos^2\alpha + 2s_0 \sin\alpha\cos\alpha + t_0 \sin^2\alpha$$

Questa formula esprime la variazione del raggio delle sezioni normali in un punto P di una superficie al variare dell'angolo α (che possiamo sin da ora chiamare *azimut* per il significato che assumerà sull'ellissoide terrestre)
Dalla formula sopra se ne può ricavare una più adatta all'uso pratico mediante la seguente costruzione geometrica:



Si riporta un segmento di lunghezza $\sqrt{R_\alpha}$ sulla tangente alla sezione normale e lo si proietta sugli assi x ed y della terna euleriana. Le proiezioni valgono:

$$x = \sqrt{R_\alpha}\cdot\cos\alpha \quad , \quad y = \sqrt{R_\alpha}\cdot\sin\alpha$$

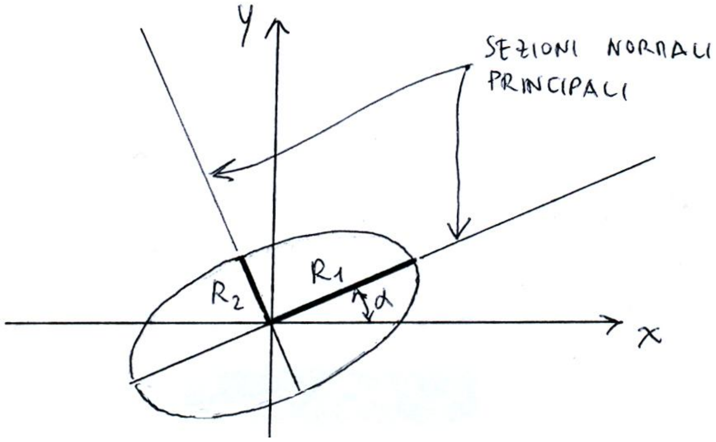
da cui:

$$\cos^2\alpha = \frac{x^2}{R_\alpha} \quad , \quad \sin^2\alpha = \frac{y^2}{R_\alpha}$$

Sostituendo nella espressione di 1/Rα si ottiene:

$$\frac{1}{R_\alpha} = r_0 \frac{x^2}{R_\alpha} + 2s_0 \frac{xy}{R_\alpha} + t_0 \frac{y^2}{R_\alpha}$$ da cui: $$r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2 = 1$$

che è l'<u>equazione di un'ellisse</u> sul piano xy, con semiassi non paralleli agli assi x e y (ha il termine misto)
L'ellisse è quella che il segmento $\sqrt{R_\alpha}$ descrive al variare di α, e pertanto **rappresenta graficamente la <u>legge di variazione del raggio di curvatura</u>** delle sezioni normali al variare di α :



Il raggio di curvatura delle sezioni normali in un punto varia quindi con α seguendo un andamento ellittico, assumendo un valore **massimo R_1** e un valore **minimo R_2** lungo due direzioni ortogonali tra loro (direzioni principali), le cui corrispondenti sezioni normali vengono dette **sezioni normali principali.**

Se si effettua una rotazione di assi assumendo come assi x e y le direzioni principali, nell'equazione dell'ellisse sparisce il termine in xy, e nell'espressione di 1/Rα sparisce il termine in sinα·cosα :

$$\frac{1}{R_\alpha} = r_0 \cos^2\alpha + t_0 \sin^2\alpha$$

Per α = 0° si ha $r_0 = 1/R_1$, per α = 90° si ha $t_0 = 1/R_2$

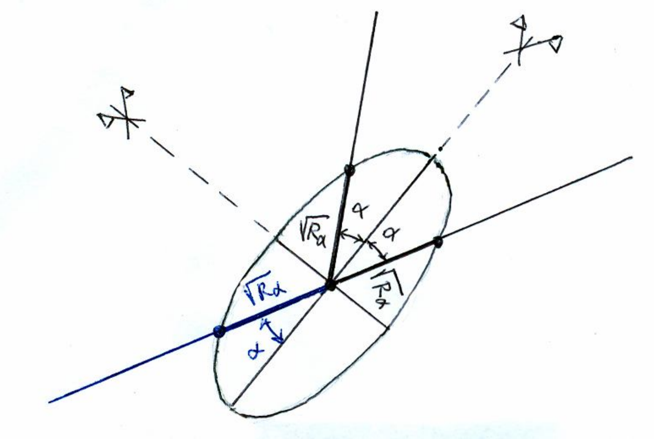
Sostituendo nella espressione soprastante si ottiene:

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} \quad \text{(Teorema di Eulero)}$$

importante formula che permette di calcolare **il raggio di curvatura di una sezione normale qualsiasi in funzione dei raggi di curvatura delle due sezioni normali principali**

3.6. Alcune conseguenze del Teorema di Eulero

1) L'ellisse è una figura simmetrica rispetto ad entrambi i suoi assi.
Ne consegue che **due sezioni normali aventi le tangenti simmetriche rispetto a una delle due sezioni normali principali hanno lo stesso raggio di curvatura** (v. figura)



2) E' possibile calcolare il **valor medio del raggio di curvatura** delle infinite sezioni normali passanti per il punto P al variare di α . La media si ottiene integrando la funzione Rα (α):

$$R_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\alpha d\alpha$$

per la simmetria dell'ellisse e ricavando R_α dal teorema di Eulero l'integrale si può calcolare così:

$$\frac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R_1 R_2}{R_2\cos^2\alpha + R_1\sin^2\alpha} d\alpha$$

Dividiamo numeratore e denominatore per $R_2\cos^2\alpha$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{R_1}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{R_1}{R_2}\tan^2\alpha} d\alpha$$

integriamo per sostituzione ponendo $t = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\tan\alpha$ e $d\alpha = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\cos^2\alpha \cdot dt$

$$R_m = \frac{2}{\pi}\sqrt{R_1 R_2}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi}\sqrt{R_1 R_2}\left[\arctan t\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\pi}\sqrt{R_1 R_2}\,\frac{\pi}{2} = \sqrt{R_1 R_2}$$

$$\boxed{R_m = \sqrt{R_1 R_2}}$$

Il **raggio medio** (detto **raggio medio gaussiano**) è la **media geometrica dei raggi di curvatura delle due sezioni normali principali**. Esso rappresenta il raggio della sfera che meglio approssima la superficie nell'intorno di P (**SFERA LOCALE**)