FOTOGRAMMETRIA

DEFINIZIONE

TECNICA DI RILIEVO CHE CONSENTE DI OTTENERE INFORMAZIONI METRICHE (FORMA E POSIZIONE) DI OGGETTI TRIDIMENSIONALI MEDIANTE INTERPRETAZIONE E MISURA DI IMMAGINI FOTOGRAFICHE (TRADIZIONALI O DIGITALI)

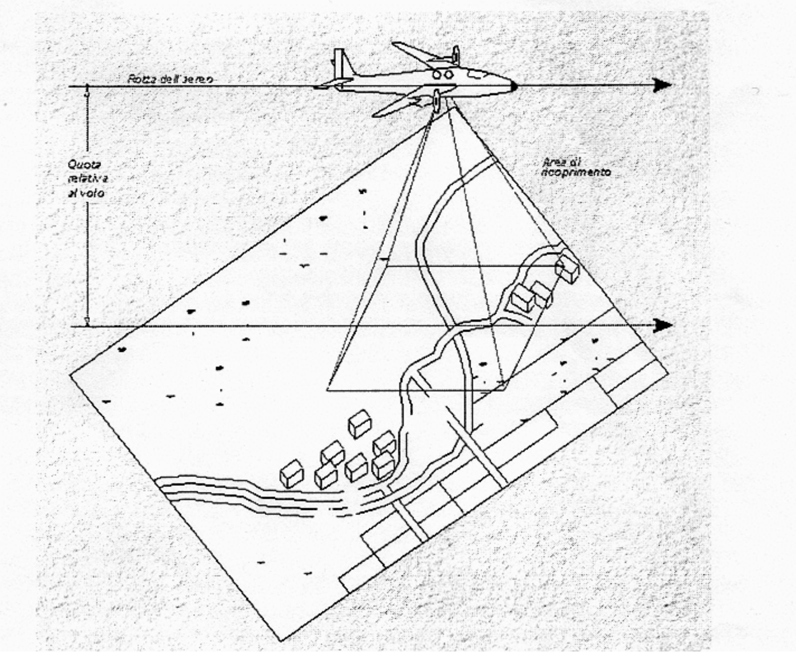
VANTAGGI RISPETTO A RILIEVI DIRETTI:

- consente di determinare caratteristiche di oggetti senza avere contatto fisico con l'oggetto (in tal senso e' un tipo di telerilevamento)
- e' rilievo simultaneo di molti punti (gran quantita' di informazioni)
- le misure vengono fatte off-line (a posteriori, successivamente al rilievo) e quindi possono essere ripetute, modificate, controllate…

Risulta avere caratteristiche di
- rapidità (risp.a topografia, e per l’aggiornamento di carte)
- economicità (< costo unitario di una carta prodotta con metodo fotogrammetrico, rispetto a soli rilievi topografici)
- correttezza (uniformità di precisione)

APPLICAZIONI

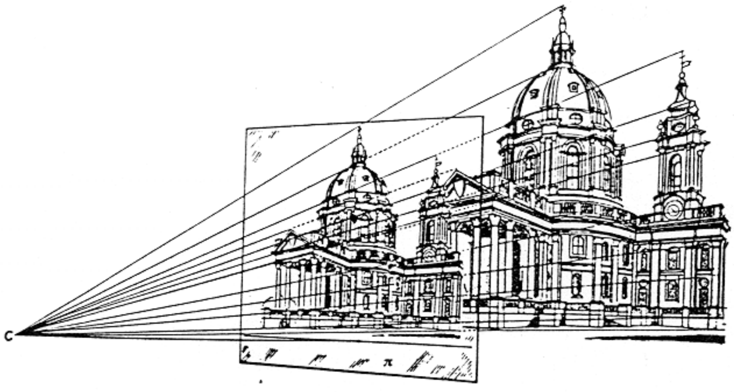
FOTOGRAMMETRIA AEREA (da aereo o da satellite)



RILEVAMENTO SUPERFICIE TERRESTRE PER:

- PRODUZIONE E AGGIORNAMENTO DI CARTE TOPOGRAFICHE (carte nazionali 1:100000, 50000 25000)
- PRODUZIONE E AGGIORNAMENTO DI CARTOGRAFIA NUMERICA (GIS)
- PRODUZIONE DTM
- ORTOFOTOCARTE
- PRODUZIONE CARTE TEMATICHE (geologiche,idrologiche, forestali…)(1:25000, 1:10000)
- PRODUZIONE CARTE A GRANDE SCALA PER PIANIFICAZIONE URBANA E TERRITORIALE
  Tecniche regionali 1:10000, 1:5000
  (o per opere di ingegneria civile) 1:2000,1000,500 tecniche
- RILIEVI CATASTALI E AMBIENTALI

FOTOGRAMMETRIA TERRESTRE



La prospettiva di un oggetto ottenuta con una fotografia.

- RILIEVI PER APPLICAZIONI INGEGNERISTICHE E ARCHITETTONICHE :
  - MISURE DI PRECISIONE PER STRUTTURE INDUSTRIALI
  - RILIEVI PER CONTROLLO DEFORMAZIONI, LESIONI DI EDIFICI
  - DOCUMENTAZIONE E RILIEVO SCAVI ARCHEOLOGICI

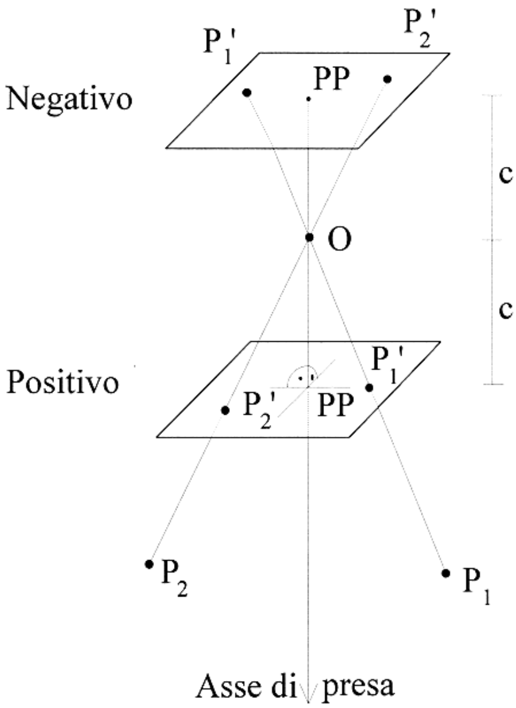
- RILIEVI DI OGGETTI NON FACILMENTE ACCESSIBILI O ACCESSIBILI PER UN TEMPO LIMITATO :
  -ES. RICOSTRUZIONE DI INCIDENTI STRADALI

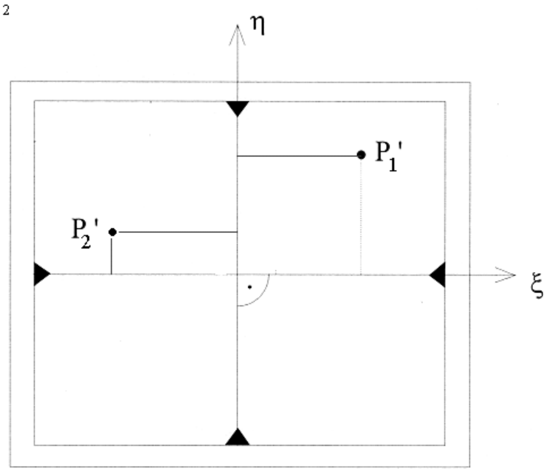
- RILIEVI DI ORGANISMI VIVENTI

ULTIMI SVILUPPI E APPLICAZIONI : MISURE CINEMATICHE E MACHINE VISION :

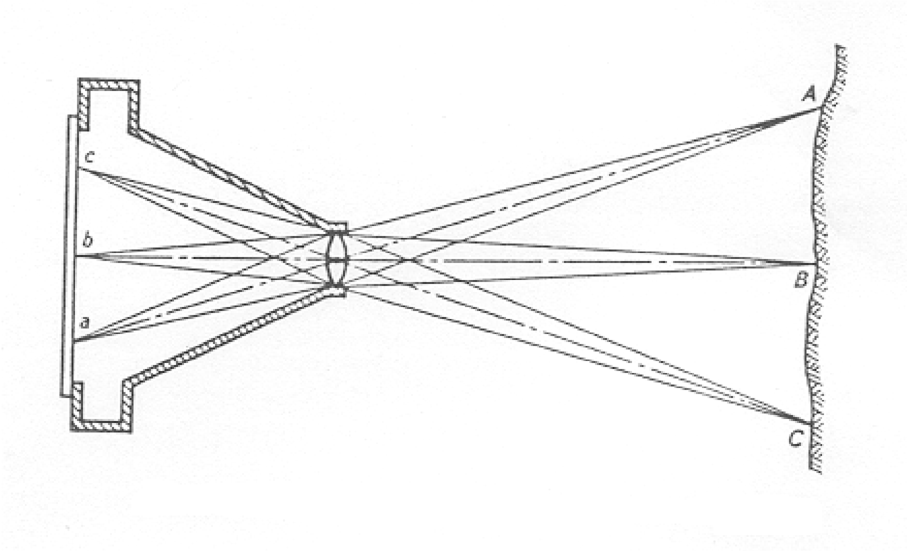
- NAVIGAZIONE
- VISIONE ROBOT

PRINCIPI DELLA FOTOGRAMMETRIA

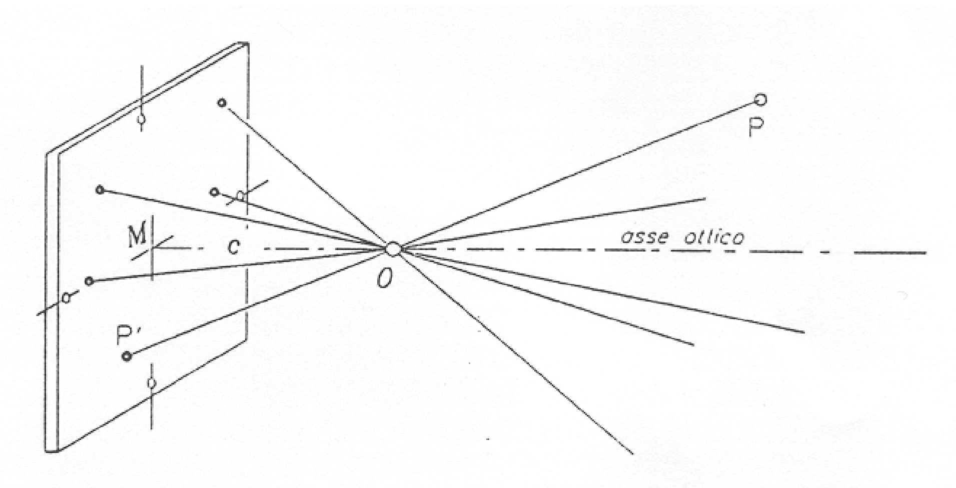




L'IMMAGINE E' UNA PROSPETTIVA CENTRALE
(CENTRO DI PRESA = CENTRO OBBIETTIVO)

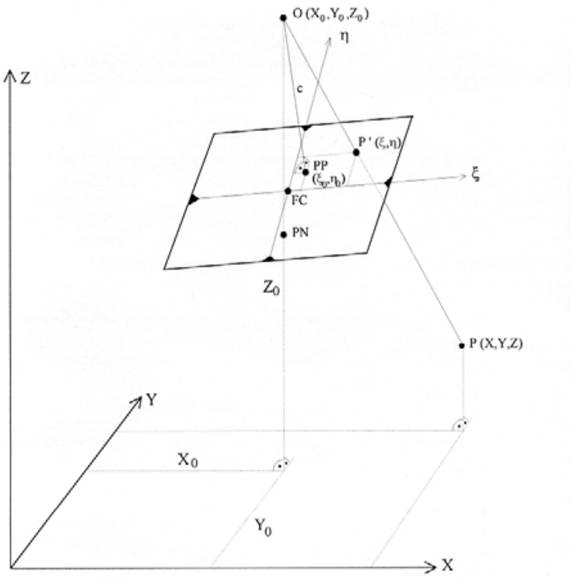


punto oggetto ➔ fascio di raggi ➔ punto immagine

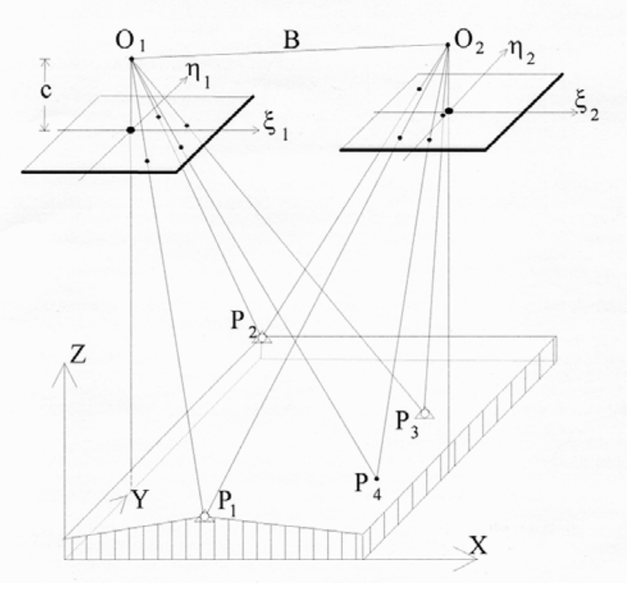


stella di direzioni

PRINCIPIO DELLA FOTOGRAMMETRIA



DA UNA SOLA IMMAGINE NON E' POSSIBILE RICOSTRUIRE LE COORDINATE DEI PUNTI DELL'OGGETTO



UTILIZZANDO DUE IMMAGINI DELLO STESSO OGGETTO PRESE DA DUE PUNTI DI VISTA DIFFERENTI SI UTILIZZANO ALTRI LEGAMI GEOMETRICI CHE ELIMINANO L'INDETERMINAZIONE

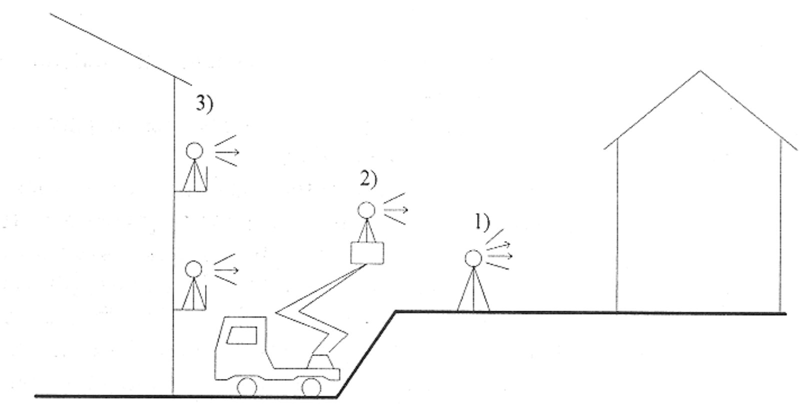
TRE MOMENTI PRINCIPALI DEL PROCESSO FOTOGRAMMETRICO

- ACQUISIZIONE DELLE IMMAGINI (FOTOGRAFICHE O DIGITALI) CON OPPORTUNE CAMERE (PRESA)
- DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI DELLA TRASFORMAZIONE DA (ξ,η) A (X,Y,Z) (ORIENTAMENTO)
- DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE DI MOLTI PUNTI PER LA RICOSTRUZIONE DELL'OGGETTO O PER IL TRACCIAMENTO DELLA CARTA

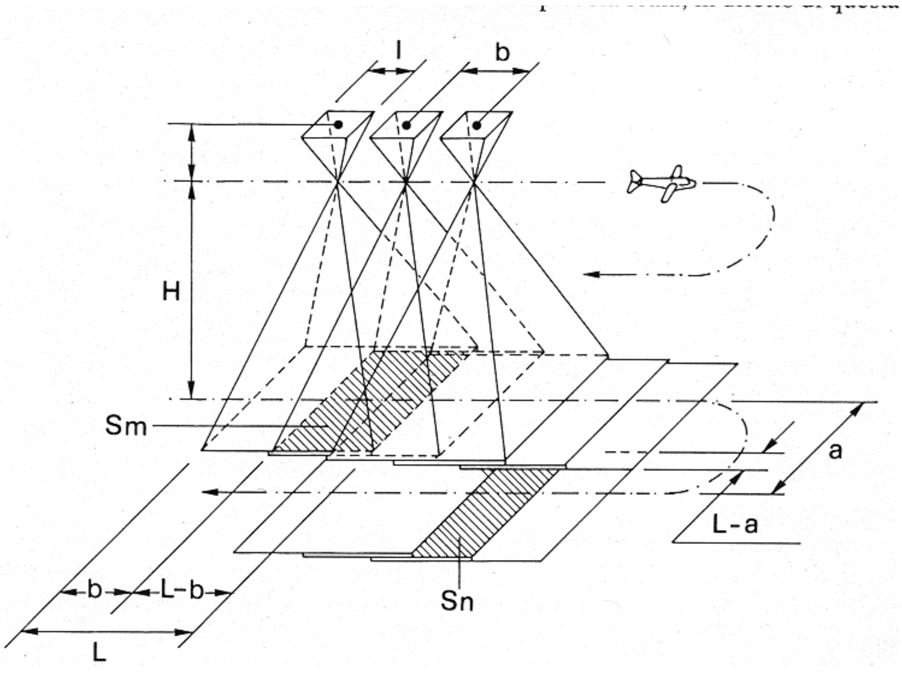
(RESTITUZIONE)

ACQUISIZIONE DELLE IMMAGINI (PRESA FOTOGRAMMETRICA)

TERRESTRI



AEREE



ACQUISIZIONE DELLE IMMAGINI

- FORMAZIONE IMMAGINE (ANALOGICA/DIGITALE)
- SISTEMI DI ACQUISIZIONE

  Camere metriche e semimetriche(terrestri)

  Camere CCD

  Scanner

- DEVIAZIONI dal modello della COLLINEARITA'

  OTTICHE

  STRUMENTALI

  AMBIENTALI

PARAMETRI DI TRASFORMAZIONE

PARAMETRI DI **ORIENTAMENTO INTERNO** :

DESCRIVONO LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE INTERNE DELLA CAMERA :
(possono essere determinati con calcoli a posteriori, ma piu' comunemente sono dati dal costruttore, su certificati di calibrazione)

PARAMETRI DI **ORIENTAMENTO ESTERNO** :

DESCRIVONO LA POSIZIONE IN CUI E' STATA PRESA L'MMAGINE, RISPETTO ALL'OGGETTO, O TERRENO, OSSIA LA POSIZIONE DELLA CAMERA ALL'ISTANTE DELLO SCATTO (posizione del centro di presa, inclinazioni e rotazioni relative tra camera e oggetto)

PER DETERMINARE QUESTI PARAMETRI OCCORRE CONOSCERE LA POSIZIONE DI ALCUNI PUNTI DELL'OGGETTO BEN VISIBILI SU ENTRAMBE LE IMMAGINI :

PUNTI NOTI o D'APPOGGIO.

FASI DEL PROCESSO FOTOGRAMMETRICO

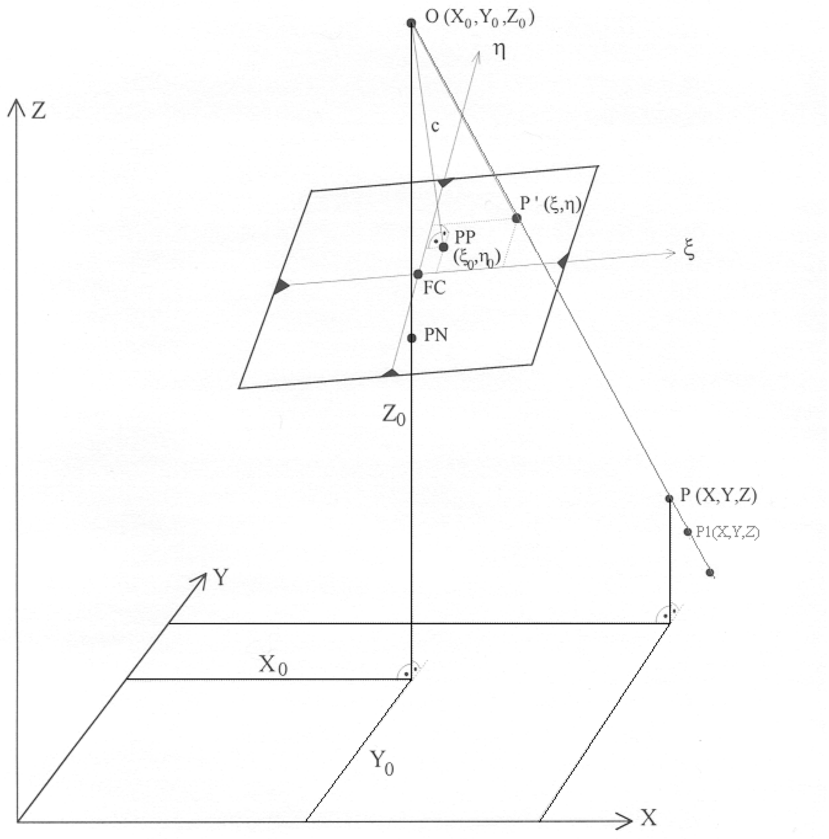
- PROGETTO
- ACQUISIZIONE
- APPOGGIO (RILIEVO TOPOGRAFICO)
- ORIENTAMENTO ESTERNO
- RESTITUZIONE / RADDRIZZAMENTO
- RAPPRESENTAZIONE (e integrazione)

Le **<u>equazioni di collinearita'</u>**, verranno usate nelle tre fasi principali del processo fotogrammetrico:

- Passaggio da coordinate oggetto a coordinate immagine ➔ presa
- Determinazione dei parametri di trasformazione ➔ orientamento
- Determinazione delle coordinate dei punti oggetto ➔ restituzione

Le relazioni si trovano scrivendo le **trasformazioni tra i due sistemi di coordinate**, il sistema dell'oggetto (definito da rilievo topografico) e il sistema di coordinate immagine, definito dalla geometria interna della camera, e le **equazioni di una retta** nello spazio che passi per i tre punti O, P(X,Y,Z), P'(ξ,η).

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'
(proiezione)



AD OGNI PUNTO OGGETTO CORRISPONDE UN PUNTO IMMAGINE

$$\xi = \xi_0 - c\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

AD OGNI PUNTO IMMAGINE POSSONO CORRISPONDERE INFINITI PUNTI OGGETTO

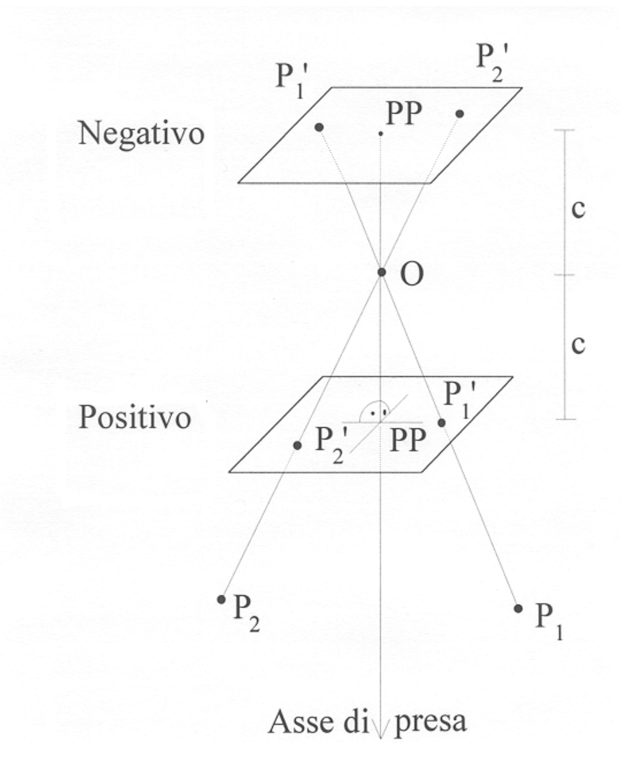
$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

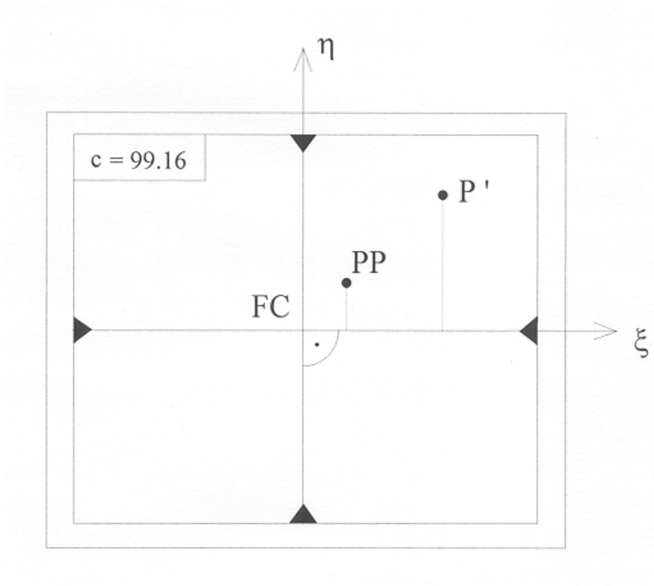
$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

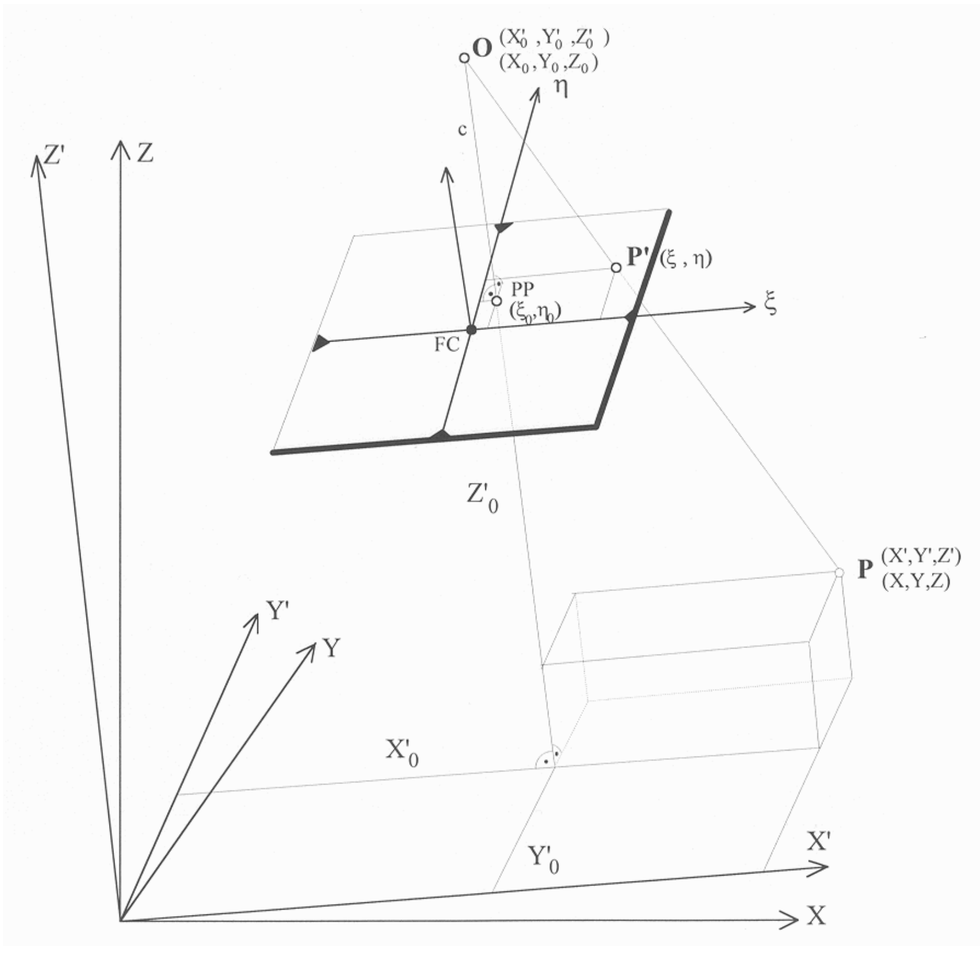
Vogliamo ricavare le **<u>equazioni di collinearita'</u>**, che verranno poi usate nelle tre fasi principali del processo fotogrammetrico:

- Passaggio da coordinate oggetto a coordinate immagine ➔ presa
- Determinazione dei parametri di trasformazione ➔ orientamento
- Determinazione delle coordinate dei punti oggetto ➔ restituzione

Le relazioni si trovano scrivendo le **trasformazioni tra i due sistemi di coordinate**, il sistema dell'oggetto (definito da rilievo topografico) e il sistema di coordinate immagine, definito dalla geometria interna della camera, e le **equazioni di una retta** nello spazio che passi per i tre punti O, P(X,Y,Z), P'(ξ,η).

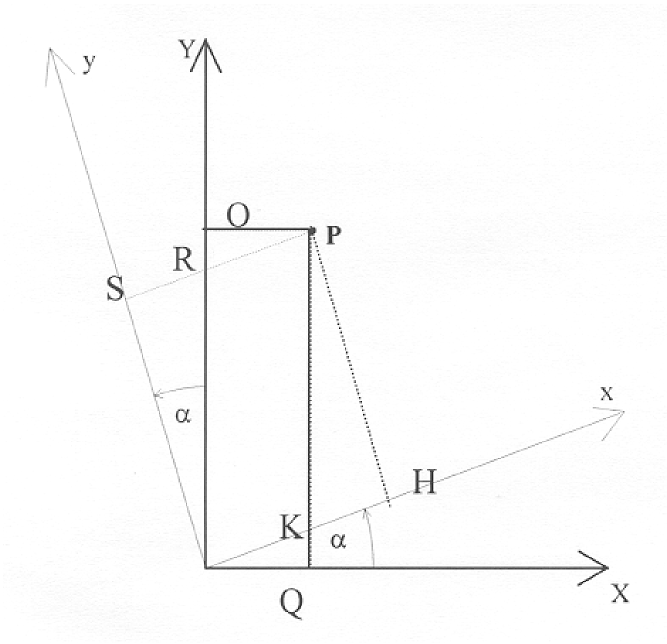


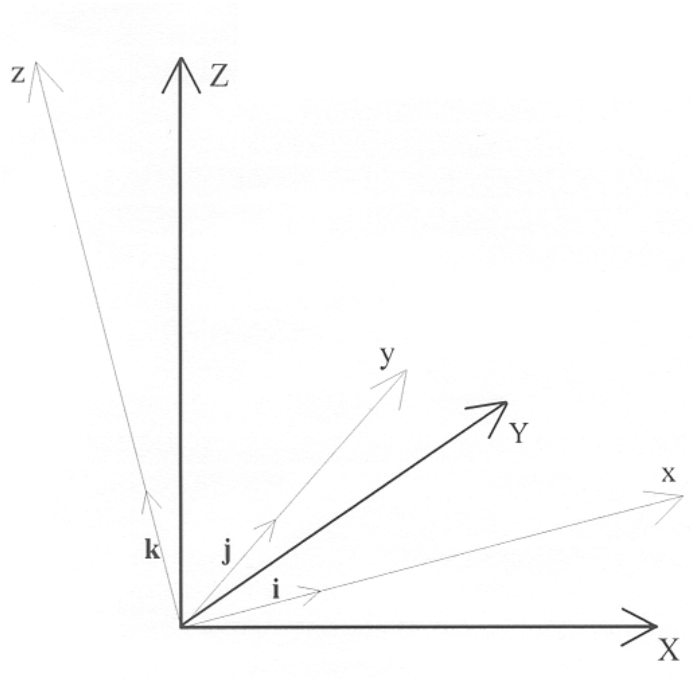




LE TRASFORMAZIONI SONO ROTOTRASLAZIONI NELLO SPAZIO

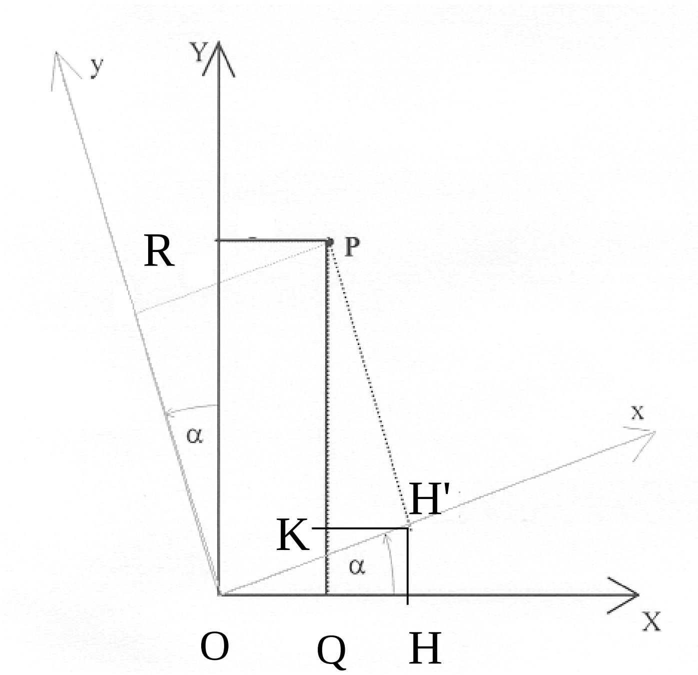
ROTAZIONI NEL PIANO E NELLO SPAZIO





ROTAZIONI NEL PIANO

Il sistema di coordinate (ortogonali) x,y e' ruotato in senso antiorario di un angolo α rispetto al sistema di coordinate (ortogonali) X,Y.
Si vogliono ricavare le coordinate X,Y di un punto P che ha coordinate x,y nel primo sistema di coordinate.



$$X = OQ = OH - QH = OH - KH' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y = OR = PK + KQ = PK + HH' = y \cos \alpha + x \operatorname{sen} \alpha$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\,\mathbf{x} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

R = matrice di rotazione, quadrata (non simmetrica)

In algebra lineare, una matrice simmetrica è una matrice quadrata che ha la proprietà di essere la trasposta di se stessa.

R puo' anche essere espressa usando i coseni direttori degli assi x,y rispetto al sistema X,Y :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX \\ \cos xY & \cos yY \end{pmatrix}$$

che coincidono con le componenti dei versori **i**,**j** degli assi x,y nel sistema X,Y :

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} \cos xX \\ \cos xY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ sen\,\alpha \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \cos yX \\ \cos yY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sen\,\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

I quattro elementi r_{ij} soddisfano le seguenti condizioni di ortogonalità e di normalizzazione:

$$\mathbf{i}^T\mathbf{i} = \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 = r^2_{11} + r^2_{21}$$

$$\mathbf{j}^T\mathbf{j} = sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 = r^2_{12} + r^2_{22}$$

$$\mathbf{i}^T\mathbf{j} = -\cos\alpha\, sen\,\alpha + \cos\alpha\, sen\,\alpha = 0 = r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22}$$

QUATTRO ELEMENTI + TRE CONDIZIONI ➔ UN SOLO PARAMETRO INDIPENDENTE : L'ANGOLO α

Una matrice che soddisfa queste condizioni è detta matrice ortonormalizzata (det R=1)

Per determinare la <u>trasformazione</u> di coordinate <u>inversa</u>, da X,Y a x,y, occorre conoscere la matrice di rotazione inversa $\mathbf{R}^{-1}$.

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{X}$$

Si dimostra facilmente che nel caso di matrici di rotazione (che risultano essere ortonormali) vale l'importante proprietà

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}.$$

Infatti :

$$\mathbf{R}^{T} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

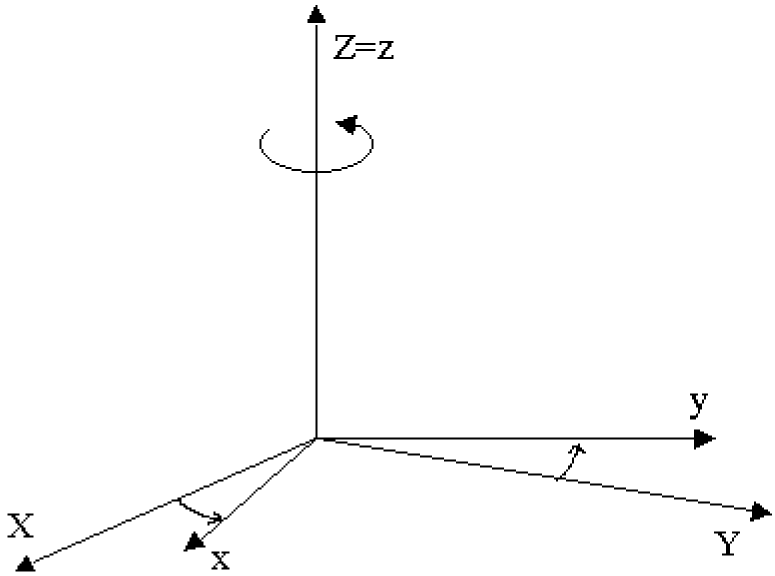
Si puo' quindi scrivere

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{R}\,\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}^{T}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Cioe' $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Questa matrice puo' anche essere ottenuta con considerazioni geometriche (trigonometriche, analoghe a quelle gia' fatte), che trasformano X,Y in x,y , mediante una rotazione <u>oraria</u> , e quindi considerata <u>negativa</u>, cioe' cambiando <u>α in $-\alpha$</u> nelle relazioni precedenti.

Un caso semplice di rotazione nello spazio e' una rotazione attorno ad un asse :



La matrice di rotazione corrispondente e' :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e la rotazione inversa è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ROTAZIONE COMPLETA NELLO SPAZIO

Per fissare la posizione di una retta (direzione) nello spazio occorre fissare 2 angoli (cfr.azimut e zenit) .

Per definire la posizione di una terna ortogonale nello spazio occorre fissare un'altra direzione in un piano ortogonale alla prima retta, e per questo occorre fissare ancora un angolo (come in una rotazione piana) (oltre all'origine, ovviamente)

3 ANGOLI DEFINISCONO UNA ROTAZIONE NELLO SPAZIO

LA TRASFORMAZIONE CHE PORTA UN SISTEMA DI COORDINATE (X,Y,Z) IN UN ALTRO RUOTATO (x,y,z) (con origini coincidenti) PUO' ESSERE ESPRESSA MEDIANTE UNA <u>MATRICE DI ROTAZIONE</u>:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

Come nel caso piano questa puo' essere scritta in termini di coseni direttori

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} \cos xX & \cos yX & \cos zX \\ \cos xY & \cos yY & \cos zY \\ \cos xZ & \cos yZ & \cos zZ \end{pmatrix}$$

E, come prima, le colonne della matrice coincidono con i versori **i,j,k** degli assi x,y,z nel sistema (X,Y,Z).

Per i versori **i,j,k** valgono 6 ~~3~~ condizioni di ortogonalita' ~~e 3 di normalizzazione~~

PERCIO' SOLO 3 DEI 9 PARAMETRI r_{ij} DELLA MATRICE **R** SONO INDIPENDENTI.

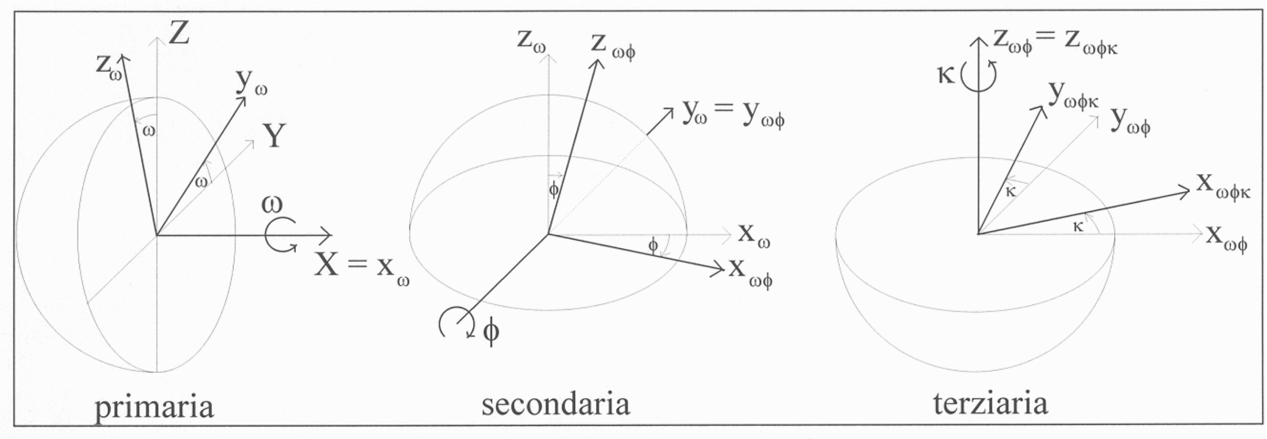
(questo coincide col dire che e' sufficiente fissare tre angoli per definire la trasformazione)
la matrice e' ortonormale, come nel caso piano, LA SUA INVERSA COINCIDE CON LA TRASPOSTA:

$$\mathbf{R^{-1}=R^{T}}$$

Si puo' dimostrare che una rotazione nello spazio si puo' scomporre in 3 rotazioni piane successive.

In fotogrammetria si usa considerare 3 particolari angoli di rotazione, e una precisa sequenza di rotazioni.

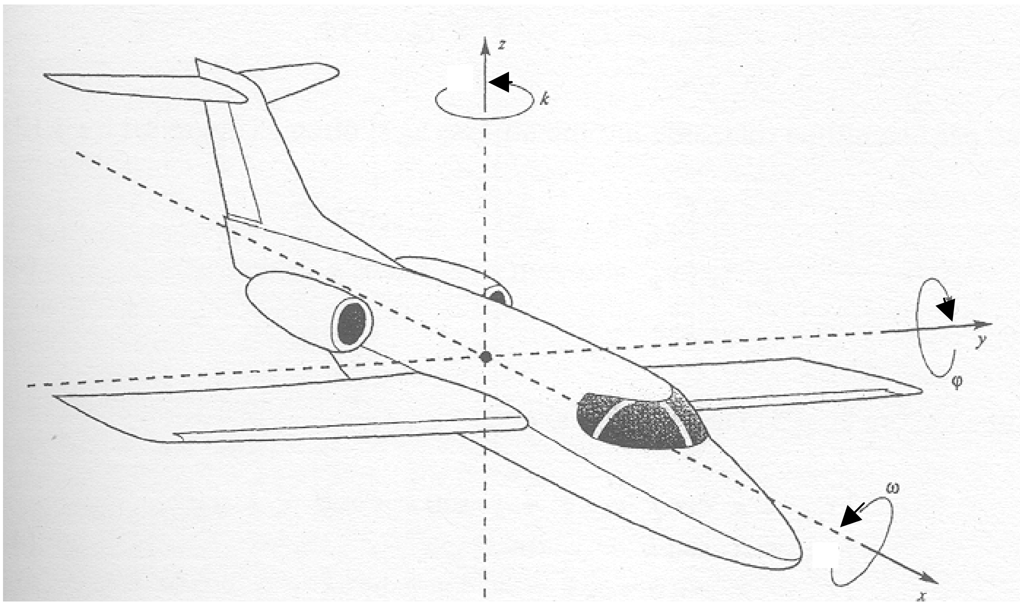
(antioraria=positiva   oraria=negativa ; guardando verso l'origine)



ROTAZIONE NELLO SPAZIO

COMPOSIZIONE DI TRE ROTAZIONI PIANE
(corrispondenti a tre movimenti dell'aereo)

- Primaria (rollio) ω intorno asse X
- Secondaria (beccheggio) ϕ intorno asse Y_ω
- Terziaria (deriva) κ intorno asse $Z_{\omega\phi}$



SI VUOLE DETERMINARE LA TRASFORMAZIONE CHE PORTA (ξ,η,ζ) (IMMAGINE), IN (X,Y,Z) (OGGETTO), QUINDI CALCOLIAMO LA MATRICE DI ROTAZIONE CHE PORTA **DA (X',Y',Z')**, SISTEMA PARALLELO A (ξ,η,ζ) MA TRASLATO NELL'ORIGINE DEL SISTEMA OGGETTO, **A (X,Y,Z)** COME SEQUENZA DELLE TRE ROTAZIONI PIANE ω, ϕ, κ.
COSTRUIAMO LA MATRICE INVERSA $\mathbf{R}^{-1}$

ROTAZIONE PRIMARIA

$$\begin{pmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \operatorname{sen}\omega \\ 0 & -\operatorname{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$(x_\omega = X)$

ROTAZIONE SECONDARIA

$$\begin{pmatrix} x_{\omega\phi} \\ y_{\omega\phi} \\ z_{\omega\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{pmatrix}$$

$(y_{\omega\phi} = y_\omega)$

ROTAZIONE TERZIARIA

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\omega\phi\kappa} \\ y_{\omega\phi\kappa} \\ z_{\omega\phi\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\kappa & \operatorname{sen}\kappa & 0 \\ -\operatorname{sen}\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\omega\phi} \\ y_{\omega\phi} \\ z_{\omega\phi} \end{pmatrix}$$

$(z_{\omega\phi\kappa} = z_{\omega\phi})$

ROTAZIONE COMPLESSIVA

$$\mathbf{X'} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = R_\kappa R_\phi R_\omega \mathbf{X}$$

$$R^{-1} = R_\kappa R_\phi R_\omega =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\kappa\cos\phi & \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega + \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa & \mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa - \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\omega \\ -\mathrm{sen}\,k\cos\phi & \cos\kappa\cos\omega - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\kappa & \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\kappa + \cos\kappa\,\mathrm{sen}\,\omega \\ \mathrm{sen}\,\phi & -\mathrm{sen}\,\omega\cos\phi & \cos\phi\cos\omega \end{pmatrix}$$

QUINDI LA MATRICE CERCATA (INVERSA) E’:

$$R = \begin{pmatrix} cos\kappa\, cos\phi & -sen k\, cos\phi & sen\phi \\ cos\kappa\, sen\phi\, sen\omega + cos\omega\, sen\kappa & cos\kappa\, cos\omega - sen\phi\, sen\omega\, sen\kappa & -sen\omega\, cos\phi \\ sen\omega\, sen\kappa - cos\kappa\, sen\phi\, cos\omega & cos\omega\, sen\phi\, sen\kappa + cos\kappa\, sen\omega & cos\phi\, cos\omega \end{pmatrix}$$

QUESTA COINCIDE CON LA MATRICE DI TRASFORMAZIONE DA (ξ’,η’,ζ’) (parallelo a (ξ,η,ζ) e centrato in O) A (x,y,z) (parallelo a (X,Y,Z) e centrato in O).

SE SI CONSIDERA UN DIVERSO ORDINE DELLE TRE ROTAZIONI PIANE LA FORMA DEGLI ELEMENTI DELLA MATRICE CAMBIANO

(a parità di rotazione complessiva cambiano i valori degli angoli ω,κ,ϕ, ma i valori r_{ij} restano gli stessi)

Data la matrice di rotazione spaziale, ricavare gli angoli di rotazione ω, ϕ, κ :

$$\tan\omega = -\frac{r_{23}}{r_{33}}$$

$$sen\phi = r_{13}$$

$$tank = -\frac{r_{12}}{r_{11}}$$

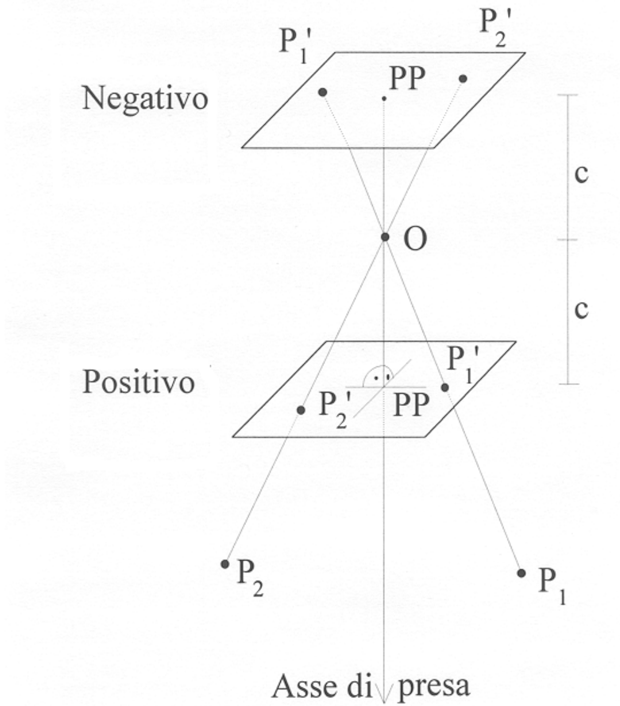
RELAZIONI NON UNIVOCHE ➔ p.e. dalla seconda ricavo due valori per ϕ.

ELIMINATA L'AMBIGUITA' IN ϕ SI ELIMINANO ANCHE LE ALTRE :

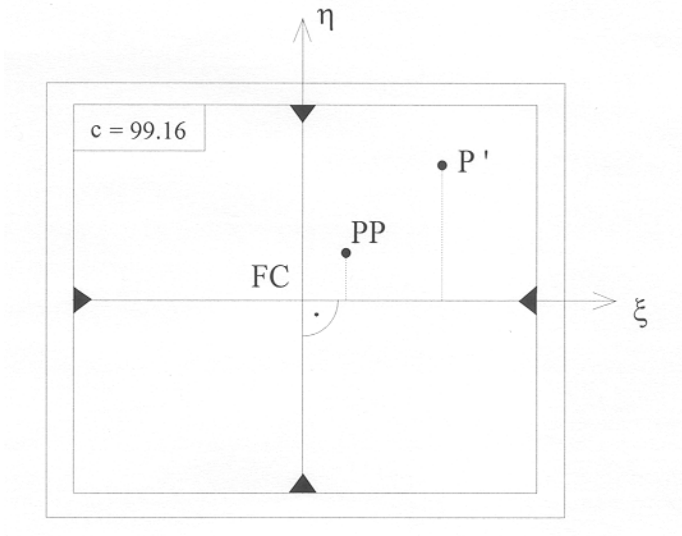
$$r_{23} = -\operatorname{sen}\omega\cos\phi \qquad r_{33} = cos\omega cos\phi$$

$$r_{12} = -senk\,cos\phi \qquad r_{11} = cos\phi cos\kappa$$

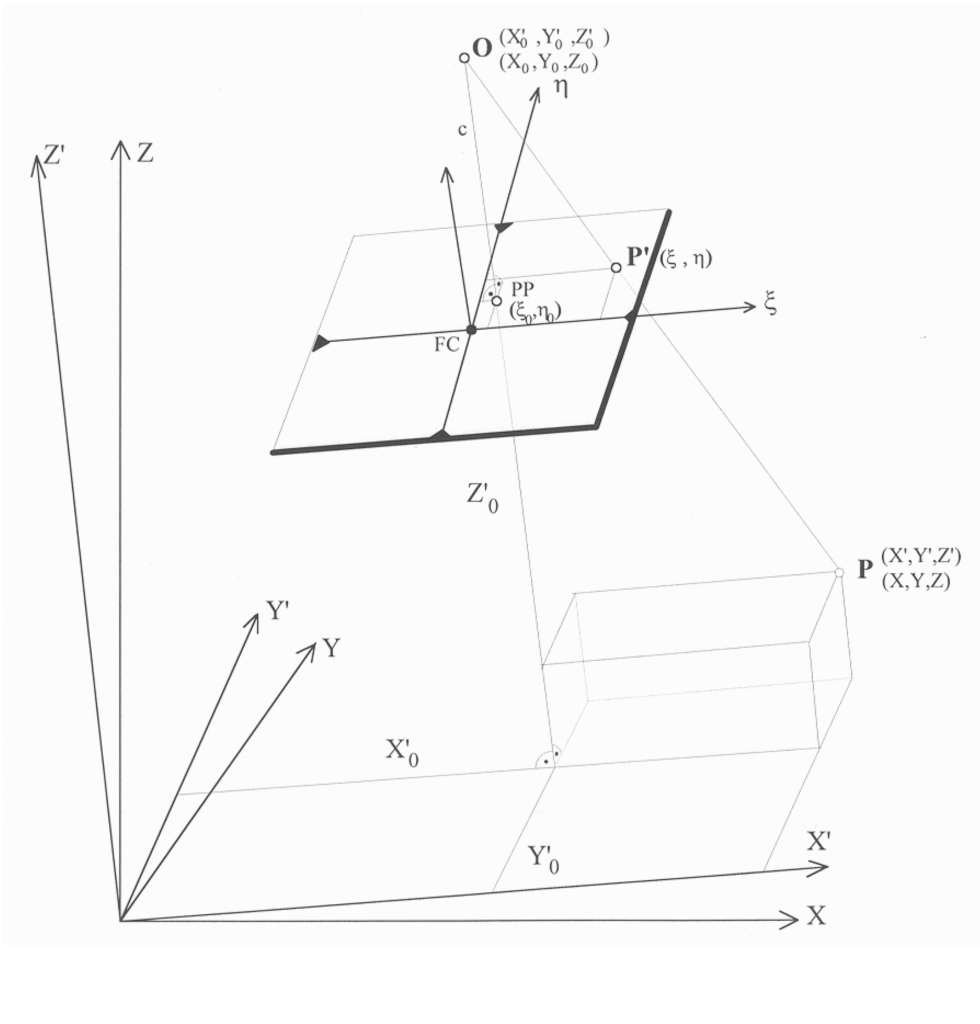
➔ DUE SERIE POSSIBILI DI ANGOLI



PROSPETTICA CENTRALE NELLO SPAZIO



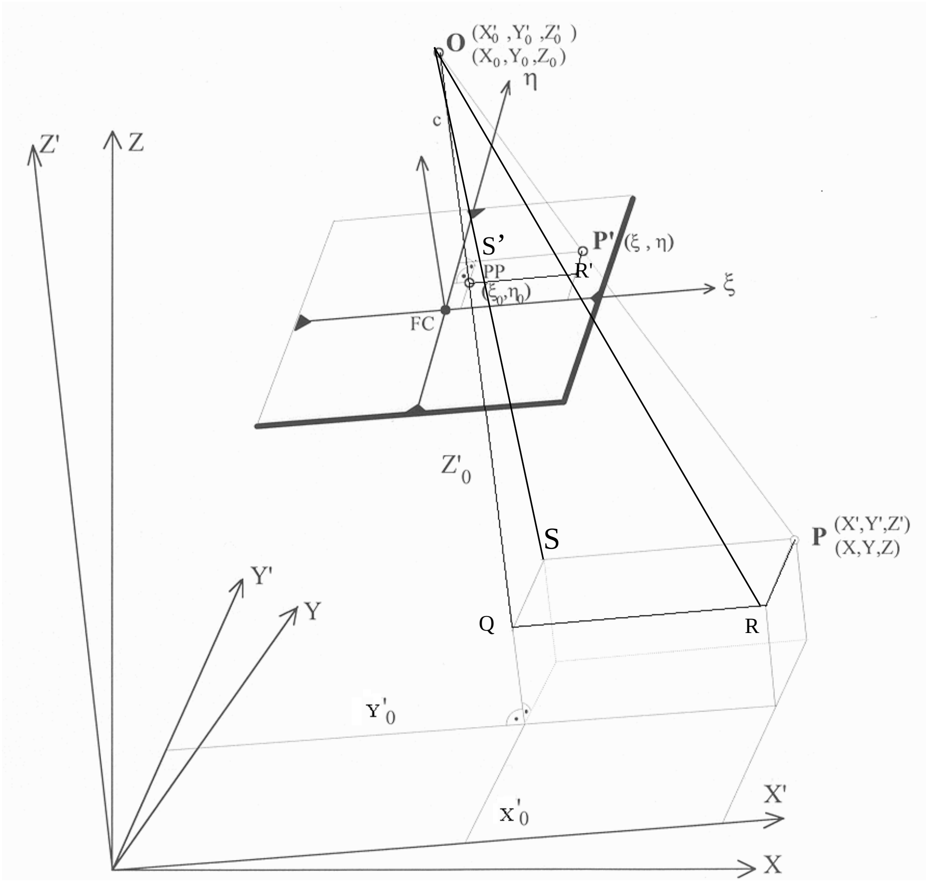
FC: centro fiduciale
PP: punto principale
O: centro di proiezione
c: distanza principale



LE TRASFORMAZIONI SONO ROTOTRASLAZIONI NELLO SPAZIO

RELAZIONI DI SIMILITUDINE TRA TRIANGOLI:

Nel sistema di riferimento (X’,Y’,Z’) parallelo al sistema immagine ma con origine coincidente con (X,Y,Z):



$$\frac{\xi-\xi_0}{\zeta-c}=\frac{X'-X'_0}{Z'-Z'_0} \qquad \frac{\eta-\eta_0}{\zeta-c}=\frac{Y'-Y'_0}{Z'-Z'_0}$$

$$\zeta=0$$

oppure

$$\frac{\overline{R'PP}}{\overline{OPP}}=\frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} \qquad \frac{\overline{S'PP}}{\overline{OPP}}=\frac{\overline{SQ}}{\overline{OQ}}$$

ζ= 0 per tutti i punti immagine e ζ= c per il centro di presa

$$\frac{\xi - \xi_0}{-c} = \frac{X' - X'_0}{Z' - Z'_0} \qquad \frac{\eta - \eta_0}{-c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z'_0}$$

ricavando da queste relazioni ξ ed η , e trasformando le coordinate (X',Y',Z') e (X_0',Y_0',Z_0') nel sistema di riferimento (oggetto) (X,Y,Z) mediante la matrice di rotazione trovata prima ($R^{-1}=R^{\mathbf{T}}$) :

$$\begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

si arriva alle relazioni cercate tra coordinate immagine e coordinate terreno :

EQUAZIONI DI COLLINEARITA'

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0)}{r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)}$$

I PARAMETRI CHE COMPAIONO IN QUESTE EQUAZIONI SONO NOVE :

$$\xi = \xi_0 - c\,\frac{r_{11}\left(X - X_0\right) + r_{21}\left(Y - Y_0\right) + r_{31}\left(Z - Z_0\right)}{r_{13}\left(X - X_0\right) + r_{23}\left(Y - Y_0\right) + r_{33}\left(Z - Z_0\right)}$$

$$\eta = \eta_0 - c\,\frac{r_{12}\left(X - X_0\right) + r_{22}\left(Y - Y_0\right) + r_{32}\left(Z - Z_0\right)}{r_{13}\left(X - X_0\right) + r_{23}\left(Y - Y_0\right) + r_{33}\left(Z - Z_0\right)}$$

- **ORIENTAMENTO INTERNO**

c — distanza principale (costante della camera)

ξ_0, η_0, — coordinate del punto principale

- **ORIENTAMENTO ESTERNO**

X_0, Y_0, Z_0 — coordinate assolute del centro di presa

ω, ϕ, κ, — tre rotazioni d'assetto

➔ OCCORRONO DUE IMMAGINI

➔ AD OGNI PUNTO OGGETTO CORRISPONDE UNA COPPIA DI PUNTI OMOLOGHI SULLE DUE IMMAGINI

➔ PER UN PUNTO OGGETTO HO DUE EQUAZIONI DI COLLINEARITA' PER OGNI IMMAGINE

I PARAMETRI DI ORIENTAMENTO INTERNO SONO GLI STESSI NELLE DUE COPPIE DI EQUAZIONI

I PARAMETRI DI ORIENTAMENTO ESTERNO SONO 6 PER OGNI IMMAGINE (HANNO ASSETTO DIVERSO)

SE O.I. E' NOTO, CON TRE PUNTI DI COORDINATE NOTE (PER OGNI IMMAGINE) POSSO SCRIVERE 3X4=12 EQUAZIONI IN 12 INCOGNITE E QUINDI DETERMINARE L'ORIENTAMENTO ESTERNO DEI FOTOGRAMMI

NOTI I 12(+3 or.int.) PARAMETRI POSSO RICAVARE LE COORDINATE OGGETTO DI OGNI PUNTO DI CUI MISURO LE COORDINATE IMMAGINE ξ,η

ATTENZIONE : USANDO PUNTI DI COORDINATE (X,Y,Z) NON NOTE, posso scrivere comunque 2eq. per ogni punto, per ogni immagine, cioè 4 equazioni per punto, in 12 incognite, a cui si aggiungono come nuove incognite, le coordinate terreno X,Y,Z del punto, cioè 3 incognite per punto. Si può arrivare a scrivere quindi un numero di equazioni pari al numero di incognite, (4n=12+3n). MA senza punti noti il sistema risulta indeterminato (deficienza di rango =7) Questo coincide col dire che non posso effettuare l'orientamento completo della coppia di fotogrammi se non ho punti di coordinate note a terra, vedremo che l'indeterminatezza è tale da consentirmi il solo orientamento relativo della coppia.

Per definire la prospettiva centrale di un oggetto tridimensionale occorrono, <u>per ogni fotogramma</u>, 9 parametri:

- 3 parametri di orientamento interno,
- 6 parametri di orientamento esterno.

Per ottenere le coordinate oggetto (terreno) a partire dalle coordinate fotogramma occorrono due fotogrammi.

PROSPETTIVA CENTRALE DI UN PIANO (OMOGRAFIA)

Si puo' porre il piano dell'oggetto coincidente con il piano XY:

$$Z=0$$

Le equazioni di collinearità

$$X = X_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{11}(\xi - \xi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0)\frac{r_{21}(\xi - \xi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23}c}{r_{31}(\xi - \xi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33}c}$$

in questo caso diventano:

$$X = \frac{\bar{a}_1\xi + \bar{a}_2\eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3} \qquad Y = \frac{\bar{b}_1\xi + \bar{b}_2\eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1\xi + \bar{c}_2\eta + \bar{c}_3}$$

QUINDI <u>UN SOLO FOTOGRAMMA</u> E' SUFFICIENTE PER LA RICOSTRUZIONE DI UN OGGETTO PIANO (raddrizzamento, fotopiano)

I nuovi parametri $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i$ sono funzioni dei parametri delle equazioni di collinearità

Dividendo per $\bar{c}_3$ si possono scrivere in funzione di soli 8 parametri indipendenti:

EQUAZIONI DELL'OMOGRAFIA

$$X = \frac{a_1\xi + a_2\eta + a_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1}$$

$$Y = \frac{b_1\xi + b_2\eta + b_3}{c_1\xi + c_2\eta + 1}$$

trasformazione fra coordinate definita dagli

8 parametri a_i, b_i, c_i

4 punti d'appoggio ➔ 8 equazioni in 8 incognite ➔ 8 parametri incogniti

Una volta determinati gli 8 parametri è possibile determinare le coordinate oggetto X, Y di un qualsiasi punto di cui si siano misurate le coordinate immagine ξ,η.

(la trasformazione omografica non è una trasformazione affine)

In geometria, si definisce trasformazione affine dello spazio euclideo qualunque composizione di una trasformazione lineare L con una traslazione

In matematica, uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale munito di un prodotto interno reale (prodotto scalare). Si tratta di un particolare esempio di spazio affine reale che fornisce una generalizzazione degli spazi a due e a tre dimensioni studiati dalla geometria euclidea.

CASO PARTICOLARE: **PIANO DELL'IMMAGINE PARALLELO AL PIANO DELL'OGGETTO**

Con questa ipotesi $\omega=0$, $\varphi=0$, quindi la matrice di rotazione R diventa (sola rotaz.κ):

$$R = \begin{bmatrix} cos\,\kappa & -sen\,\kappa & 0 \\ sen\,\kappa & cos\,\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sostituendo R nelle equazioni di collinearità (sempre con Z = 0) si ottiene:

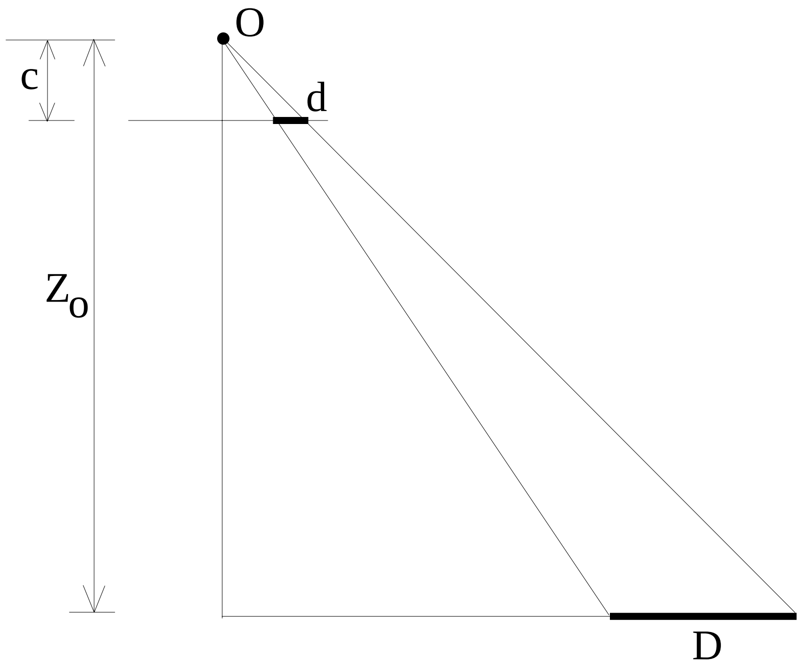
$$X = X_0 + \frac{Z_0}{c}\left[cos\,\kappa\,(\xi - \xi_0) - sen\,\kappa\,(\eta - \eta_0)\right]$$

$$Y = Y_0 + \frac{Z_0}{c}\left[sen\,\kappa\,(\xi - \xi_0) + cos\,\kappa\,(\eta - \eta_0)\right]$$

Introducendo la quantità $\boxed{\frac{Z_0}{c} = m_b}$ chiamata **fattore di scala,** e riscrivendo le relazioni in forma matriciale :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + m_b \begin{pmatrix} cos\,\kappa & -sen\,\kappa \\ sen\,\kappa & cos\,\kappa \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi - \xi_0 \\ \eta - \eta_0 \end{pmatrix}$$

si vede che la trasformazione e' una rotazione piana, con traslazione e con variazione di scala, quindi in questo caso particolare, **il fotogramma rappresenta il piano oggetto in scala ridotta**, cioè simile a una **rappresentazione cartografica**.



I parametri incogniti di questa trasformazione sono sei (9 , di cui 8 indipendenti, meno 2 angoli fissati)

X_0, Y_0, ξ_0, η_0	traslazioni
κ	rotazione
m_b	fattore di scala

se è noto l'orientamento interno, per determinare i **4** parametri rimanenti bastano **due punti d'appoggio**

Osservazione

Il **fattore di scala è costante** su tutto il fotogramma (nel caso di oggetto piano, e immagine parallela all'oggetto).

Il valore di m_b puo' essere anche ricavato geometricamente

$$m_b = \frac{D}{d} = \frac{Z_0}{c}$$

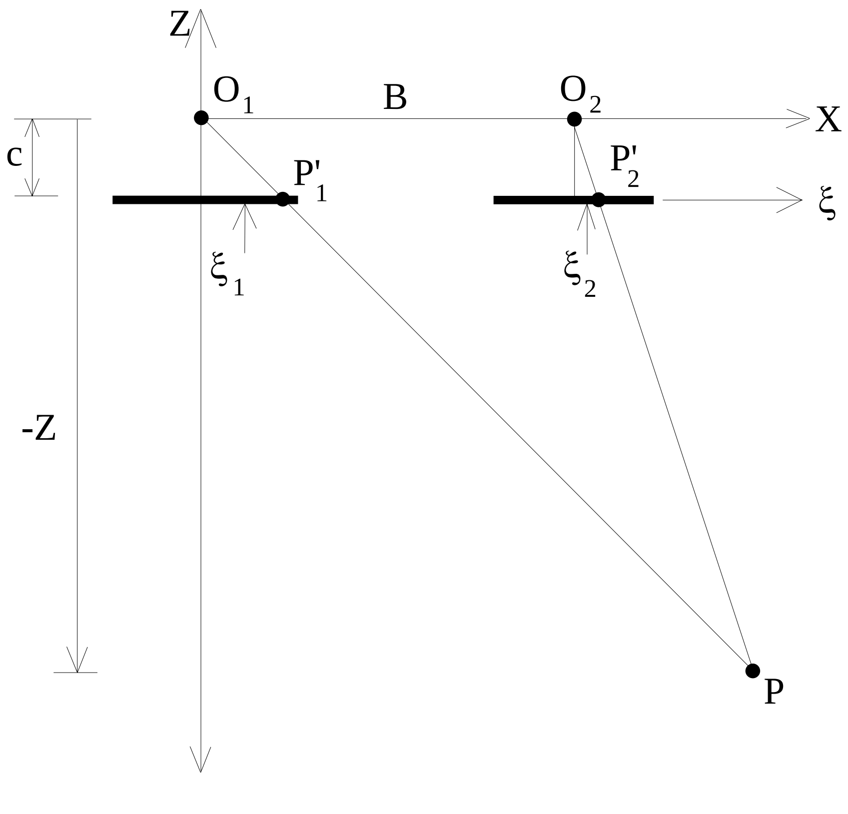
IL CASO NORMALE NELLA RESTITUZIONE STEREOSCOPICA

Presa normale:

assi delle camere perpendicolari alla base di presa B e paralleli tra loro

(condizione praticamente impossibile da realizzare in fotogrammetria aerea, ma a cui si cerca di essere il più possibile prossimi)

In questo caso è facile scrivere le equazioni di collinearità per i due fotogrammi e risolvere il problema della stereorestituzione, usando un sistema di coordinate oggetto (X, Y, Z) particolarmente comode e facendo ipotesi semplificative sui parametri di orientamento interno dei due fotogrammi.



Coordinate dei punti di presa (parametri di traslazione)

$$O_1(0,0,0) \quad \leftarrow \quad X_{01} = Y_{01} = Z_{01} = 0$$

$$O_2(B,0,0) \quad \leftarrow \quad X_{02} = B \qquad Y_{02} = Z_{02} = 0$$

Parametri di rotazione

$$\begin{matrix} \omega_1 = \varphi_1 = \kappa_1 = 0 \\ \omega_2 = \varphi_2 = \kappa_2 = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Parametri di orientamento interno

ipotesi : PP ≡ FC : $\begin{matrix} \xi_{01} = \eta_{01} = 0 \\ \xi_{02} = \eta_{02} = 0 \end{matrix}$

Le equazioni di collinearità si semplificano

FOTO 1 $\quad X = Z \dfrac{\xi_1}{-c} \qquad Y = Z \dfrac{\eta_1}{-c}$

FOTO 2 $\quad X = B + Z \dfrac{\xi_2}{-c} \qquad Y = Z \dfrac{\eta_2}{-c}$

Dalle due equazioni in Y si ricava la condizione:

$$\eta_1 = \eta_2$$

(cioè è sempre nulla la **parallasse trasversale** $p_\eta = \eta_1 - \eta_2$)

Dalle prime due equazioni si ricava il valore di Z:

$$-Z\frac{\xi_1}{c} = B - Z\frac{\xi_2}{c} \qquad \Rightarrow \quad -Z = \frac{B \cdot c}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{Bc}{p_\xi}$$

E dalle altre si ricava il valore di X e di Y:

$$X = -Z\frac{\xi_1}{c} = \frac{B \cdot c}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\xi_1}{c} \quad = \frac{B \cdot \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{B\xi_1}{p_\xi}$$

$$Y = -Z\frac{\eta_1}{c} = \frac{B \cdot c}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\eta_1}{c} \quad = \frac{B \cdot \eta_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{B\eta_1}{p_\xi}$$

(avendo definito $p_\xi=\xi_1-\xi_2$ = **parallasse longitudinale)**

La geometria euclidea è la geometria che si basa sui cinque postulati di Euclide e in particolar modo sul postulato delle parallele.

Le geometrie che si basano su postulati diversi da quelli elencati da Euclide sono dette geometrie non euclidee.

I 5 postulati di Euclide sono:

Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;
Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;
Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro;
Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

CASO NORMALE: PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Le equazioni precedenti consentono di ricavare le coordinate terreno (X, Y, Z) di un generico punto P a partire **dalle coordinate immagine ξ_1, η_1 e dalla parallasse p_ξ** (misure)

Sapendo che le misure di ξ, η, p_ξ sono affette da errori (noti), si vogliono calcolare gli errori corrispondenti delle coordinate X, Y, Z.

equazioni del caso normale:

$$X = \frac{B\,\xi_1}{p_\xi} \qquad Y = \frac{B\,\eta_1}{p_\xi} \qquad Z = -\frac{c\,B}{p_\xi}$$

applichiamo la legge di propagazione degli errori da ξ, η, p_ξ, a X, Y, Z (c e B si considerano prive di errore)

la piu' semplice e' σ^2_Z :

$$Z = -\frac{c\,B}{p_\xi} \quad \Rightarrow \quad \sigma_Z^2 = \left(\frac{\partial Z}{\partial p_\xi}\right)^2 \sigma_{p_\xi}^2 = \left(\frac{c\,B}{p_\xi^2}\right)^2 \sigma_{p_\xi}^2$$

σ^2_Z puo' essere scritta

$$\sigma_Z^2 = \left(cB\,\frac{Z^2}{c^2B^2}\right)^2 \sigma_{p_\xi}^2 = \left(\frac{Z}{c}\right)^2 \left(\frac{Z}{B}\right)^2 \sigma_{p_\xi}^2$$

$$\sigma_Z = \left(\frac{Z}{c}\right)\left(\frac{Z}{B}\right)\sigma_{p_\xi}$$

Definiamo:

$\frac{Z}{c} = m_b$ fattore di scala (scala media del fotogramma)

$\frac{B}{Z}$ rapporto di base

Quindi

$$\sigma_Z = m_b \frac{Z}{B} \sigma_{p_\xi}$$

Analogamente si ricava :

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{B}{P_\xi} \right)^2 \sigma_\xi^2 + \left(\frac{B\xi_1}{P_\xi^2} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2 = m_b^2 \cdot \sigma_\xi^2 + m_b^2 \left(\frac{\xi_1}{c} \frac{Z}{B} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2$$

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{B}{P_\xi} \right)^2 \sigma_\eta^2 + \left(\frac{B\eta}{P_\xi^2} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2 = m_b^2 \cdot \sigma_\eta^2 + m_b^2 \left(\frac{\eta_1}{c} \frac{Z}{B} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2$$

In definitiva le espressioni degli scarti quadratici medi (sqm) delle tre coordinate terreno (X, Y, Z) sono date da:

$$\sigma_X = m_b \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{c} \frac{Z}{B} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2 + \sigma_\xi^2}$$

$$\sigma_Y = m_b \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{c} \frac{Z}{B} \right)^2 \sigma_{P_\xi}^2 + \sigma_\eta^2}$$

$$\sigma_Z = m_b \frac{Z}{B} \sigma_{p_\xi}$$

REGOLE GENERALI SULLA PRECISIONE FOTOGRAMMETRICA.

	$B/Z = 1:1$		$B/Z = 1:3$		$B/Z = 1:10$		$B/Z = 1:20$	
m_b	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z	σ_{XY}	σ_Z
50000	m 0.36	0.25	0.43	0.75	0.90	2.50	1.70	5.00 *m*
10000	dm 0.72	0.50	0.86	1.5	1.81	5.00	3.41	10.00 *dm*
1000	cm 0.72	0.50	0.86	1.5	1.81	5.00	3.41	10.00 *cm*
100	mm 0.72	0.50	0.86	1.5	1.81	5.00	3.41	10.00 *mm*
25	mm 0.18	0.13	0.22	0.38	0.45	1.25	0.85	2.50 *mm*

- Per uno stesso rapporto di base, gli scarti quadratici medi delle tre coordinate sono direttamente proporzionali al fattore di scala del fotogramma, perciò si può ottenere ‘qualunque’ precisione purché si scelga la scala opportuna.

- Per una stessa scala del fotogramma, gli errori in Z sono inversamente proporzionali al rapporto di base; d’altra parte, gli errori in X e Y aumentano solo di poco al diminuire di detto rapporto; se il rapporto di base è di poco inferiore a 1:1, tutte e tre le coordinate oggetto avranno la stessa precisione.

- Per una data base B, gli errori in Z aumentano con il quadrato della distanza fra camera e oggetto.