

ISTITUTO UNIVERSITARIO NAVALE
FACOLTÀ DI SCIENZE NAUTICHE
ISTITUTO DI ASTRONOMIA NAUTICA E NAVIGAZIONE

ANIELLO RUSSO

DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE
IN NAVIGAZIONE

GIANNINI EDITORE
NAPOLI 1987

INTRODUZIONE

La Navigazione è la scienza che studia i problemi della traiettoria e della posizione dei mobili in mare, nell'aria, nello spazio.

Per andare da un punto ad un altro la Navigazione fornisce i dati della traiettoria che il mobile dovrà seguire; per la determinazione della sua posizione durante la traversata, essa propone varie tecniche basate su misure di alcuni parametri (distanze, somme o differenze di due distanze, angoli, velocità relative radiali) da effettuarsi a bordo del mobile o all'esterno di questo. Con la misura di uno di detti parametri si ottiene un luogo di posizione, cioè quell'insieme di punti dai quali si effettua del parametro la stessa misura. La posizione del mobile viene determinata dall'intersezione di più luoghi di posizione, resi simultanei se le relative misure sono state effettuate in istanti differenti.

Altre tecniche, oltre questa geometrica testé enunciata, vengono utilizzate per la determinazione della posizione, ad esempio l'inerziale e la Doppler, tecniche che non vengono qui trattate.

È importante la conoscenza dell'ambiente in cui si sposta il mobile; per le perturbazioni di detto ambiente e per gli eventuali errori degli apparati di guida il mobile si allontana dalla traiettoria nominale. La determinazione della posizione permette di valutare lo scarto da detta traiettoria, decidendo, di conseguenza, il ritorno su di essa o la determinazione di una nuova traiettoria, tenendo presente la posizione reale del mobile ed il punto di arrivo.

A seconda dell'ubicazione della traiettoria la Navigazione si divide in Navigazione marittima, aerea, orbitale, spaziale.

LUOGO DI POSIZIONE

1.1 - GENERALITÀ

La determinazione della posizione, come già accennato, si basa sulla misura di alcuni parametri, effettuata generalmente a bordo del mobile.

Con la misura di un dato parametro si ottiene un *luogo di posizione*, cioè l'insieme dei punti dai quali si effettua la stessa misura: una curva o una superficie di posizione.

La posizione risulta dall'intersezione di almeno tre istantanei luoghi di posizione, numero che può ridursi a due se per terzo luogo si considera la superficie della sfera o dell'ellissoide terrestre sulla quale si trova il mobile.

Se le misure non sono simultanee occorre riportare i luoghi di posizione allo stesso istante mediante un procedimento detto *trasporto*, che può essere grafico o analitico.

I parametri che generalmente vengono misurati in navigazione marittima ed aerea sono: distanze, somme o differenze di due distanze, angoli, velocità relative radiali; in navigazione spaziale sono per lo più utilizzate misure angolari e distanze.

La strumentazione per tali misure fa parte di specifici sistemi di navigazione che si dividono in *asserviti* ed *autonomi*, a seconda della loro dipendenza o non da stazioni fisse di appoggio o di controllo; pertanto le tecniche di misura diconsi *attive* se c'è partecipazione da parte delle località o delle stazioni rispetto alle quali vengono effettuate le misure, *passive* in caso contrario.

La posizione in navigazione marittima ed aerea viene espressa in coordinate geografiche, anche se qualche volta è agevole calcolarla in coordinate cartesiane, assumendo per queste ultime una terna di assi ortogonali con origine nel centro della Terra, l'asse z coincidente con quello di rotazione ed orientato per il polo nord, gli assi x ed y nel piano equatoriale, con l'asse x orientato per l'origine delle longitudini. Sono ben note le relazioni che legano i due sistemi di coordinate.

In navigazione spaziale, oltre alla predetta terna cartesiana, è possibile riferirsi anche ad altre terne opportunamente centrate ed orientate.

1.2 - EQUAZIONE GENERALE DI UN LUOGO DI POSIZIONE

Se L è la misura di uno dei parametri citati, priva di errori, l'equazione del rispettivo luogo di posizione è espressa da una delle seguenti relazioni:

$$L = f(\varphi, \lambda) \quad (1.1a)$$

$$L = g(x, y, z) \quad (1.1b)$$

intendendo con la (1.1a), espressa in coordinate geografiche, una curva di posizione sulla superficie terrestre, con la (1.1b) una superficie di posizione riferita alla terna cartesiana di cui al paragrafo precedente o ad un'altra comunque orientata.

Orbene, per un dato parametro si dispone di una famiglia di luoghi di posizione, ciascuno caratterizzato da un dato valore di L e con gradiente in un suo punto il cui modulo è espresso da:

$$\nabla L = \frac{dL}{ds} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.2a)$$

$$\nabla L = \frac{dL}{ds} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.2b)$$

secondo che si tratti della (1.1a) o della (1.1b).

Occorre precisare che l'intorno del punto della curva di posizione in cui si desidera il valore del gradiente, espresso dalla (1.2a), viene considerato confuso col piano tangente alla superficie terrestre in tale punto e le direzioni delle componenti del gradiente sono quelle della coppia di assi cartesiani ortogonali con origine nel punto ed orientati per meridiano e parallelo.

Trattandosi, invece, di una superficie di posizione, le componenti del gradiente sono riferite ad una terna di assi cartesiani con origine nel punto e parallela a quella relativa all'equazione di detta superficie.

Risulta immediata l'interpretazione delle derivate parziali delle relazioni (1.2): esse rappresentano i coseni direttori della direzione del gradiente rispetto agli assi coordinati.

1.3 - LINEARIZZAZIONE

Premesso che del luogo di posizione, sia esso una curva che una superficie, interessa solamente quella parte che capita nell'intorno della

posizione stimata del mobile, si consideri il caso della misura L , priva di errori, alla quale corrisponde sulla superficie terrestre la curva di posizione u (fig. 1.1).

In figura è segnata anche la curva di posizione u_s passante per la posizione stimata O_s del mobile; in ogni suo punto e quindi anche in O_s , la misura del parametro risulta L_s , entità che può essere facilmente calcolata mediante la (1.1a), essendo note le coordinate di O_s .

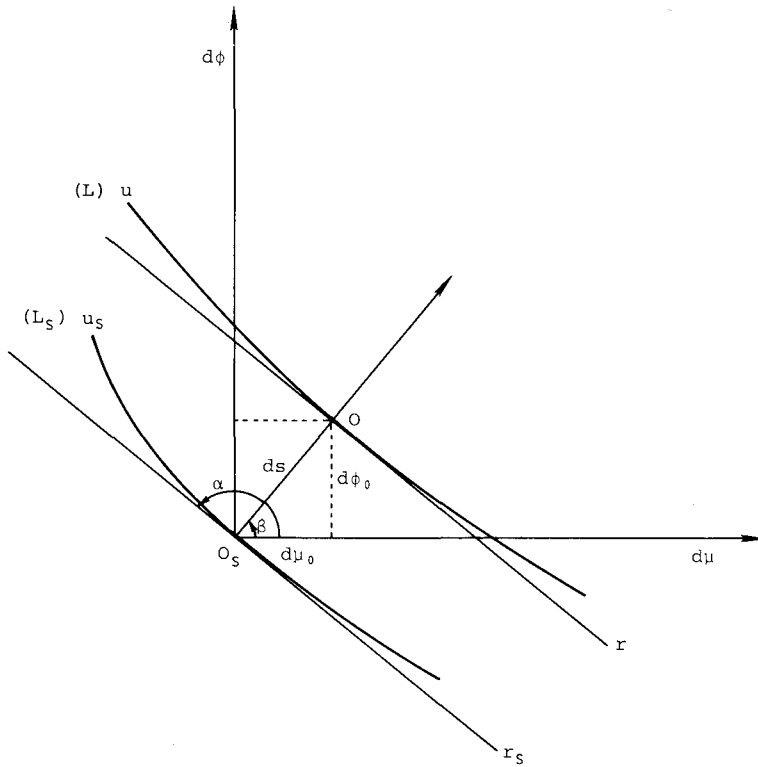


FIG. 1.1.

Sviluppando la (1.1a) relativa a questa seconda curva, $L_s = f(\varphi, \lambda)$, in serie di Taylor, con inizio dal punto stimato e con arresto ai termini del primo ordine, si ha:

$$L_s = f(\varphi_s, \lambda_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s \delta \varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s \delta \lambda \quad (1.3)$$

Essendo:

$$L_s = f(\varphi_s, \lambda_s)$$

e

$$\delta \lambda = \delta \mu \sec \varphi_s$$

la (1.3) diventa:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_s \delta \mu + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s \delta \varphi = 0 \quad (1.4)$$

relazione, quest'ultima, che esprime l'equazione della retta r_s , tangente alla curva u_s nel punto O_s e riferita alla coppia di assi cartesiani ortogonali con origine in detto punto e coincidenti con le sue linee coordinate. L'intorno di O_s viene, per l'arresto dello sviluppo ai termini del primo ordine, confuso col piano tangente in esso punto alla superficie terrestre.

È certo, in forza di quanto precedentemente premesso, che il mobile si trova su quel tratto di curva u più vicino al punto stimato, tratto che può essere considerato confuso con la retta r , tangente alla curva u nel suo punto più vicino ad O_s (punto O in figura). Ed essendo questi due punti estremamente vicini, il punto O dovrà trovarsi sulla direzione di massima variazione di L a partire da O_s , cioè sulla direzione del gradiente di L nel punto O_s ; di conseguenza la retta r risulterà parallela ad r_s . La distanza $O_s O$ rappresenta lo spostamento $d s$ della relazione (1.2a) per la variazione $d L = L - L_s$ (differenza tra misura effettuata e quella calcolata per il punto stimato).

La retta r è detta *retta di posizione*: su questa si trova il mobile. Non resta che ricavarne l'equazione, con riferimento alla stessa coppia di assi cartesiani di cui alla figura (1.1).

Noto il coefficiente angolare della retta r_s , dato da:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_s \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s^{-1} \quad (1.5)$$

è possibile ottenere quello della direzione del gradiente, essendo $\beta = \alpha - 90^\circ$; si ha:

$$\operatorname{tg} \beta = - \operatorname{cotg} \alpha = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_s^{-1} \quad (1.6)$$

La distanza $O_s O = d s$ risulta per la (1.2a):

$$d s = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_s^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s^2 \right]^{-1/2} d L \quad (1.7)$$

dove $d L = L - L_s$.

Le coordinate del punto O sono date da:

$$d \mu_o = d s \cos \beta \quad d \varphi_o = d s \sin \beta \quad (1.8)$$

con $d s$ data dalla (1.7) e $\sin \beta$ e $\cos \beta$ ricavabili dalla (1.6).

L'equazione della retta di posizione r risulta:

$$d \varphi - d \varphi_o = \operatorname{tg} \alpha (d \mu - d \mu_o) \quad (1.9)$$

Per le relazioni (1.5) e (1.8), considerando quantità piccole e finite al posto dei differenziali e ricordando inoltre la citata relazione tra arco di parallelo e simile arco di equatore, la (1.9) diventa:

$$L - L_s = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s \delta \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s \delta \varphi \quad (1.10)$$

Ponendo:

$$l = L - L_s \quad h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s \quad h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s \quad (1.11)$$

la (1.10) risulta così espressa:

$$l = h_1 \delta \lambda + h_2 \delta \varphi \quad (1.12)$$

Analogo ragionamento può essere fatto per la linearizzazione della (1.1b), ottenendo:

$$L - L_s = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s \delta x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s \delta y + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s \delta z \quad (1.13)$$

equazione di un piano, detto *piano di posizione*, che risulta tangente alla superficie di posizione nel suo punto più vicino a quello stimato. Tale piano si confonde con la superficie di posizione nell'intorno del punto di tangenza.

Ponendo:

$$\begin{aligned} l &= L - L_s & h_1 &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s \\ h_2 &= \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s & h_3 &= \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s \end{aligned} \quad (1.14)$$

la (1.13) diventa:

$$l = h_1 \delta x + h_2 \delta y + h_3 \delta z \quad (1.15)$$

Le equazioni (1.12) e (1.15) sono note anche come *equazioni di misura* ed espresse nella forma compatta:

$$l = \mathbf{h}^T \mathbf{x} \quad (1.16)$$

con \mathbf{h} e \mathbf{x} rispettivamente il *vettore di misura* e *di stato*:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= (h_1 \ h_2)^T & \mathbf{h} &= (h_1 \ h_2 \ h_3)^T \\ \mathbf{x} &= (\delta \lambda \ \delta \varphi)^T & \mathbf{x} &= (\delta x \ \delta y \ \delta z)^T \end{aligned}$$

Nella (1.16) la quantità scalare l risulta essere il prodotto tra il vettore riga \mathbf{h} e quello colonna \mathbf{x} .

Se la misura L è affetta dall'errore δL ($\delta L = L_e - L$, con L_e la misura errata) si ha:

$$l = L - L_s = L_e - \delta L - L_s = (L_e - L) - \delta L = l_e - \delta L$$

per cui la (1.16) diventa:

$$l_e = \mathbf{h}^T \mathbf{x} + \delta L \quad (1.17)$$

Si può arrivare alla (1.10) con un ragionamento puramente analitico, semplice ma meno intuitivo di quello geometrico-analitico testé trattato.

Tenendo presente la fig. 1.1, le coordinate di un generico punto della curva di posizione u e la relativa misura L effettuata (considerata esatta) possono essere così espresse:

$$\varphi = \varphi_s + \delta \varphi \quad \lambda = \lambda_s + \delta \lambda \quad L = L_s + \delta L$$

per cui l'equazione (1.1a) diventa:

$$L_s + \delta L = f(\varphi_s + \delta \varphi, \lambda_s + \delta \lambda)$$

Sviluppando quest'ultima relazione in serie di Taylor a partire dal punto stimato e con arresto ai termini del primo ordine, rimanendo così in un intorno del detto punto, si ottiene:

$$L_s + \delta L = f(\varphi_s, \lambda_s) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s \delta \varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_s \delta \lambda$$

relazione che si semplifica in:

$$\delta L = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s \delta \varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_s \delta \lambda$$

È ben chiaro che per δL in questa dimostrazione viene considerata la differenza tra la misura effettuata ed esatta e quella calcolata rispetto alla posizione stimata dell'osservatore.

Lo stesso procedimento vale per la (1.13).

1.4 - INCERTEZZA DI UN LUOGO DI POSIZIONE

Se la misura L è affetta da errore si viene ad individuare un luogo errato; da qui l'incertezza di quest'ultimo, intesa quale distanza tra la posizione esatta del mobile ed il luogo errato.

Le relazioni (1.2) forniscono per l'appunto tale incertezza se il rapporto tra i differenziali dL e ds viene considerato rapporto tra quantità piccole e finite e se per δL si intende proprio l'errore commesso sulla misura ($\delta L = L_e - L$ con L_e la lettura errata).

Si ha:

$$\delta s = \pm \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi}\right)^2 \right]^{-1/2} \delta L \quad (1.18a)$$

$$\delta s = \pm \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 \right]^{-1/2} \delta L \quad (1.18b)$$

giustificando il doppio segno con la considerazione che in un verso della direzione del gradiente c'è incremento di L (errore positivo), nel verso opposto un decremento (errore negativo).

Alle (1.18) si può giungere anche dopo aver linearizzato le equazioni (1.1) nell'intorno della posizione stimata del mobile, ottenendo, com'è noto, la retta o il piano di posizione. Per ognuno di questi due luoghi di posizione un errore di misura provoca una traslazione del luogo, per cui

l'incertezza è data dalla distanza tra la retta di posizione esatta e quella errata, oppure tra il piano di posizione esatto e quello errato.

L'incertezza δs , oltre ad essere funzione dell'errore di misura, dipende generalmente anche dalla posizione geografica del mobile. In figura (1.2) sono segnati sia i luoghi di posizione errati relativi all'errore $\pm \delta L$ (curve u_{e_1} e u_{e_2}) che quello esatto relativo alla misura L (curva u). Nel punto O l'incertezza è rappresentata dai tratti di perpendicolari OH_1 , e OH_2 , mentre nel punto O' dai tratti $O'H_1$ e $O'H_2$.

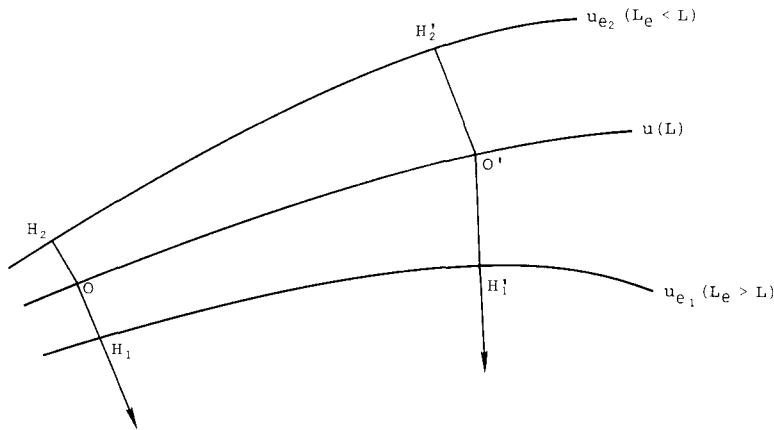


FIG. 1.2

1.5 - RAPPRESENTAZIONE DI UN LUOGO DI POSIZIONE SULLE CARTE DI NAVIGAZIONE

Per conoscere l'andamento di un luogo di posizione, espresso dalla relazione (1.1a), su una data carta di navigazione, come su una qualsiasi carta geografica, si può procedere sia per via analitica che grafica.

Con la prima occorre esprimere le coordinate φ e λ della sua equazione in funzione delle relazioni di corrispondenza della carta prescelta, ottenendo così l'espressione analitica della curva rappresentativa del luogo considerato.

Il luogo di posizione può anche essere tracciato per punti sulla carta: basta risolvere la (1.1a) già richiamata rispetto a φ , conoscendo λ , o viceversa. Si vengono, in tal modo, a definire le coordinate dei punti d'intersezione del luogo di posizione con dati meridiani o paralleli. Riportati tali punti sulla carta ed accuratamente uniti si ottiene la curva desiderata.

Volendo, per esempio, conoscere l'andamento della (1.12) sul piano nautico o sulla carta di Mercatore, basta tener conto delle rispettive relazioni di corrispondenza, esprimendo $\delta \lambda$ e $\delta \varphi$ in funzione di esse.

Per il piano nautico (piano di proiezione tangente nel punto stimato) le relazioni di corrispondenza sono:

$$x = \delta \lambda \cos \varphi_s \quad y = \delta \varphi$$

per cui la (1.12) diventa:

$$l = h_1 \sec \varphi_s x + h_2 y \quad (1.19)$$

Le relazioni di corrispondenza della carta di Mercatore per una zona poco estesa in latitudine (costruzione approssimata) sono:

$$x = \delta \lambda \quad y = \delta \varphi \sec \varphi_s$$

onde la (1.12) si trasforma in:

$$l = h_1 x + h_2 \cos \varphi_s y \quad (1.20)$$

Nelle relazioni di corrispondenza richiamate è stato considerato uguale all'unità il raggio della Terra rappresentativa.

Le (1.19) e (1.20) esprimono ancora l'equazione di una retta; dal che può concludersi che anche sul piano nautico e sulla carta di Mercatore si può considerare rettilineo (ed è ovvio) il tratto del luogo di posizione nell'intorno della posizione stimata del mobile. Tale tratto, che conserva

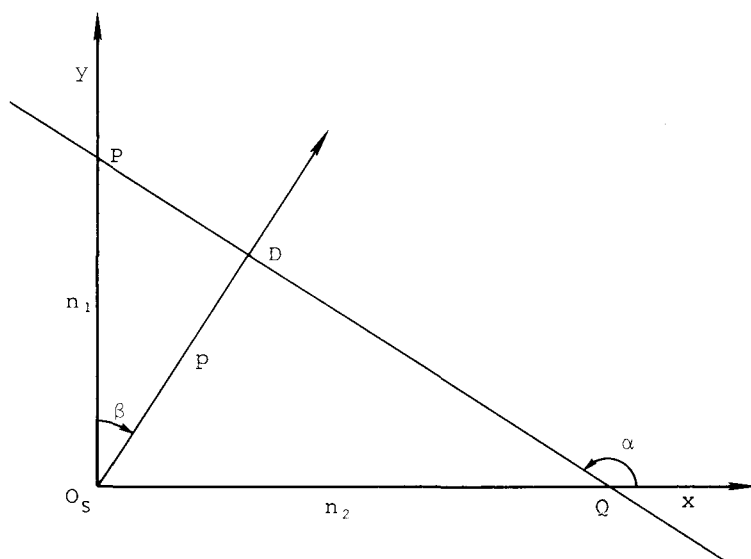


FIG. 1.3.

la denominazione di *retta di posizione*, è riferito sulle due rappresentazioni ad un sistema di assi cartesiani ortogonali con l'origine nel punto stimato ed orientati, come sulla superficie terrestre, secondo le sue linee coordinate.

Da come è stata dedotta la retta di posizione sul piano nautico e sulla carta di Mercatore, può questa essere considerata per il piano nautico quale tratto di geodetica, per la carta di Mercatore quale tratto di losodromia tangenti entrambi al luogo di posizione sulla superficie terrestre nel suo punto più vicino a quello stimato.

Il tracciamento della retta di posizione, espressa dalla (1.19) e dalla (1.20), può essere agevolmente effettuato calcolando le sue intercette n_1 e n_2 con gli assi coordinati (fig. 1.3) od anche la sua distanza p dall'origine degli assi ed il rispettivo azimut β di questa rispetto al punto O_s . L'azimut è legato all'angolo α che la retta forma col verso positivo dell'asse x dalla relazione:

$$\beta = 180^\circ - \alpha$$

1.6 - CONSIDERAZIONI VARIE

Ci si limita solamente ad alcune considerazioni sui luoghi di posizione relativi alla superficie terrestre, espressi, com'è noto, dalla (1.1a).

A conforto della linearizzazione effettuata, occorre valutare lo scostamento dei luoghi dalla tangente, sia sulla superficie terrestre che sulle due rappresentazioni cartografiche considerate.

Nel caso piano (caso cartografico) lo scostamento, misurato sulla normale alla curva nel suo punto situato a distanza Δs da quello di tangenza, è dato dalla relazione:

$$\varepsilon_{u,t} = -\frac{\Delta s^2}{2} \frac{1}{\rho} + \frac{\Delta s^3}{6} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \quad (1.21)$$

con ρ il raggio di curvatura nel punto di tangenza (fig. 1.4).

Il primo termine della (1.21) rappresenta lo scostamento della circonferenza osculatrice dalla tangente per essere $\frac{d\rho}{ds} = 0$

$$\varepsilon_{c,t} = -\frac{\Delta s^2}{2} \frac{1}{\rho} \quad (1.22)$$

ed il secondo permette di ottenere quello della curva dalla circonferenza osculatrice:

$$\varepsilon_{u,c} = \frac{\Delta s^3}{6} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \quad (1.23)$$

Gli scostamenti positivi vanno contati nel senso positivo della normale, verso il centro di curvatura; di conseguenza il segno negativo della (1.22) sta a significare che la tangente è esterna alla circonferenza osculatrice e quest'ultima può risultare interna od esterna alla curva a seconda del segno della derivata.

In valore assoluto l'importo della (1.22) è maggiore di quello della (1.23).

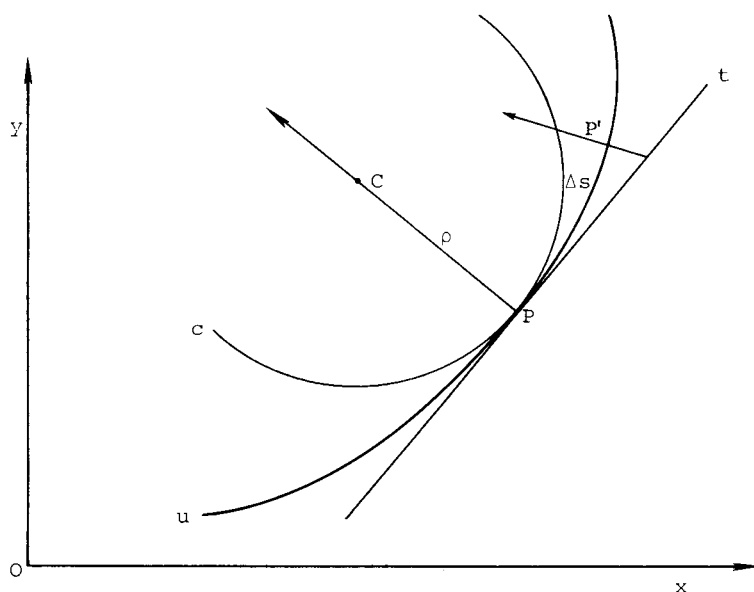


FIG. 1.4. - u = curva; c = circonferenza osculatrice della curva u nel punto di tangenza; t = tangente.

Un altro elemento da calcolare sulla superficie terrestre è l'angolo che in un suo punto un luogo di posizione forma col meridiano. Quest'angolo (azimut) risulta necessario quando si vuole considerare la linearizzazione nel punto d'incontro del luogo di posizione col meridiano o col parallelo del punto stimato.

Sia u il luogo di posizione, considerato per semplicità sulla sfera terrestre (fig. 1.5) ed A il punto in cui si vuole determinare l'azimut α . Il

parallelo del punto B della curva, punto molto vicino ad A , incontra il meridiano di quest'ultimo nel punto C . Dal triangolo mistilineo rettangolo $A B C$, considerato piano perché infinitesimo, si ottiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C B}{A C} = \frac{d p}{d \varphi}$$

e ricordando la relazione tra arco di parallelo e simile arco di equatore:

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varphi \frac{d \lambda}{d \varphi} \quad (1.24)$$

relazione che permette di calcolare l'angolo desiderato dopo aver ricavato il rapporto $\frac{d \lambda}{d \varphi}$ dall'equazione (1.1a)

La linearizzazione trattata nel paragrafo 1.2 viene effettuata nel punto O del luogo di posizione u (fig. 1.6), punto più vicino a quello stimato O_s ; le due linearizzazioni dianzi accennate vengono invece considerate nei punti O_1 e O_2 , rispettivamente incontri della curva u col meridiano e col parallelo del punto stimato.

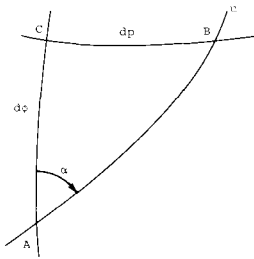


FIG. 1.5.

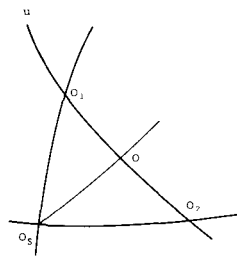


FIG. 1.6.

Il punto O è sempre determinabile, a contrario dei punti O_1 e O_2 ; uno di questi può risultare anche molto lontano da O_s , secondo l'andamento del luogo di posizione nell'intorno di quest'ultimo. La linearizzazione può anche essere effettuata considerando noti, nell'intorno del punto stimato, due punti molto vicini del luogo di posizione; punti ottenuti dall'incontro di questo con due meridiani o paralleli. In tal caso la retta di posizione non è tangente ma secante al luogo di posizione.

MISURE DI DISTANZE

2.1 - LUOGO DI POSIZIONE

Le distanze possono essere ottenute col telemetro, con tecniche radioelettriche, ma possono anche essere dedotte da misure di angoli orizzontali e verticali.

Ed ancora, misurando col sestante, in un dato istante, l'altezza di un astro sull'orizzonte del mare ed apportando a questa le dovute correzioni per riferirla al piano dell'orizzonte astronomico, si ottiene, come si vedrà più avanti, la distanza dell'osservatore dal *punto subastrale*, proiezione dell'astro sulla superficie terrestre.

Considerando la Terra sferica, e ciò sarà tenuto presente per tutti i luoghi di posizione che saranno trattati, con la misura della distanza d dal punto A , di note coordinate, si ottiene quale luogo di posizione la circonferenza u , avente per centro il punto A e per raggio la distanza d (fig. 2.1).

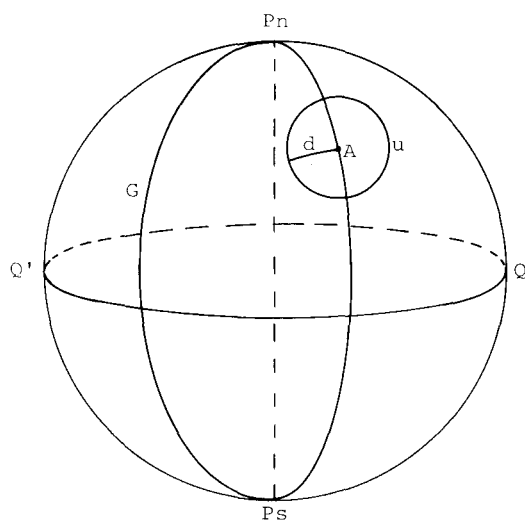


FIG. 2.1.

Questa circonferenza è detta *circonferenza di uguale distanza* o più semplicemente *circonferenza di distanza*; essa limita la calotta sferica avente per polo il punto A e per raggio la distanza d .

Nel caso di misura dell'altezza di un astro la circonferenza è chiamata *circonferenza d'altezza*.

Una circonferenza di distanza è detta di 1^a , 2^a e 3^a specie secondo che il polo dell'emisfero del centro A sia esterno ad essa, interno o proprio su di essa. In figura (2.2) le circonferenze u_1 , u_2 , u_3 rappresentano rispettivamente una circonferenza di distanza 1^a , 2^a , 3^a specie.

Il punto più elevato in latitudine della circonferenza di distanza dicesi *vertice*, quello più basso *base*.

La zona compresa tra i paralleli della base e del vertice viene chiamata *zona di distanza*.

Dalla figura (2.2) si nota:

$$\begin{aligned} \varphi_{B_{1,2,3}} &= \varphi_{A_{1,2,3}} - d & \lambda_{B_{1,2,3}} &= \lambda_{A_{1,2,3}} \\ \varphi_{V_1} &= \varphi_{A_1} + d & \lambda_{V_1} &= \lambda_{A_1} \\ \varphi_{V_2} &= 180^\circ - (\varphi_{A_2} + d) & \lambda_{V_2} &= \lambda_{A_2} \pm 180^\circ \\ \varphi_{V_3} &= 90^\circ \end{aligned}$$

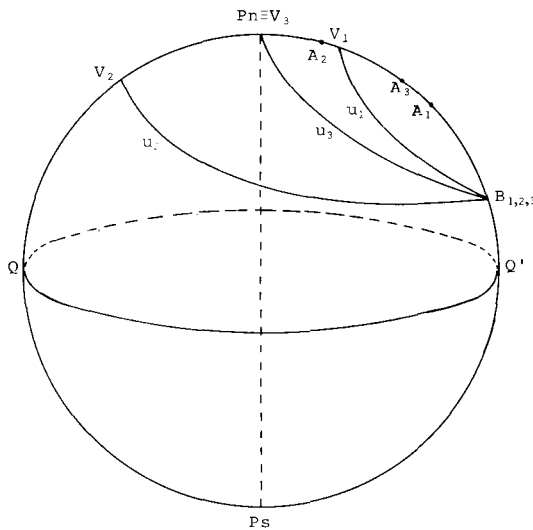


FIG. 2.2.

e che una circonferenza di distanza è di 1^a , 2^a e 3^a specie a seconda che $d < c_A$, $d > c_A$ e $d = c_A$, con c_A la colatitudine del punto A .

La circonferenza di distanza di 2^a specie si estende in longitudine per tutti i 360° , quella di 3^a specie per 180° , 90° da una parte e 90° dall'altra

rispetto al meridiano del punto A . La circonferenza di 1^a specie, invece, si estende per:

$$\Delta \lambda_{\max} = \text{sen}^{-1} \frac{\text{sen } d}{\text{sen } c_A}$$

come può notarsi dal triangolo sferico rettangolo APT di fig. 2.3.

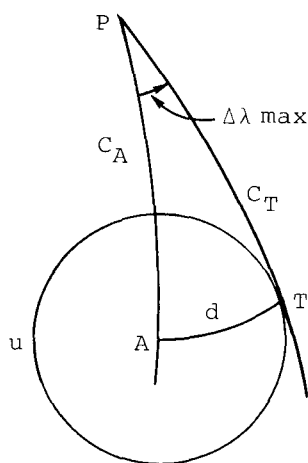


FIG. 2.3.

La classificazione data ad una circonferenza di distanza (1^a, 2^a e 3^a specie) riguarda solamente il problema della sua rappresentazione sulla carta di Mercatore che, com'è noto, non può estendersi alle zone polari (i poli su questa sono rappresentati all'infinito).

Due circonferenze di distanza diconsi *coniugate* quando sono contenute nella stessa zona di distanza; sono una di 1^a specie e l'altra di 2^a (fig. 2.4).

Indicando con d_1 e d_2 le due distanze, si può scrivere:

$$\varphi_{A_1} + d_1 = 180^\circ - (\varphi_{A_2} + d_2)$$

$$\varphi_{A_1} - d_1 = \varphi_{A_2} - d_2$$

relazioni che permettono di ottenere, dopo averle sommate e sottratte membro a membro (la 2^a dalla 1^a):

$$c_{A_1} = d_2 \quad c_{A_2} = d_1$$

dal che, per due circonferenze di distanza coniugate, la colatitudine del centro di una di queste è uguale alla distanza relativa all'altra.

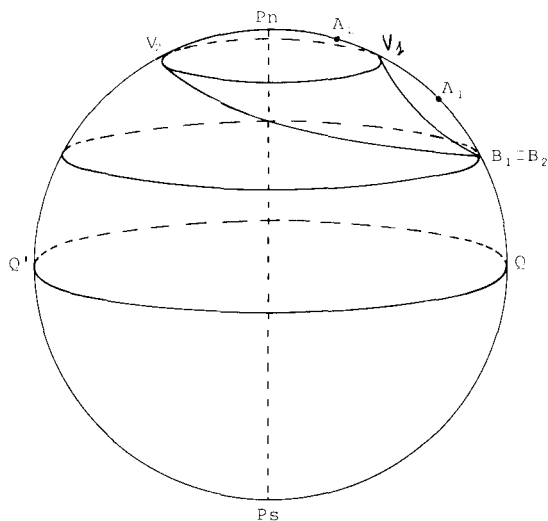


FIG. 2.4.

Ed ora alcune proprietà delle circonferenze di distanza:

— la circonferenza di distanza è normale in ogni suo punto alla direzione azimutale del suo centro ed è simmetrica rispetto al meridiano di questo; ovvia la seconda parte, pure intuibile la prima per essere le circonferenze massime passanti per il centro di una circonferenza minore perpendicolari a quest'ultima.

In fig. 2.5 la circonferenza u risulta nel suo punto O perpendicolare all'arco di circonferenza massima \widehat{OA} , che definisce la direzione azimutale del centro A rispetto al meridiano del punto O .

— per due punti di pari latitudine, situati su due circonferenze di distanza coniugate, l'angolo azimutale, in uno di questi, del centro della rispettiva circonferenza e riferito al polo dell'emisfero dei due centri è uguale alla differenza di longitudine tra il meridiano dell'altro punto e quello del centro della sua rispettiva circonferenza.

Per essere (fig. 2.6):

$$\begin{aligned} \widehat{P_n A_1} &= \widehat{A_2 O_2} \\ \widehat{P_n A_2} &= \widehat{A_1 O_1} \\ \widehat{P_n O_1} &= \widehat{P_n O_2} \end{aligned}$$

i due triangoli $P_n O_1 A_1$ e $P_n O_2 A_2$ sono uguali, per cui:

$$Z_1 = \Delta \lambda_2 ; \quad Z_2 = \Delta \lambda_1$$

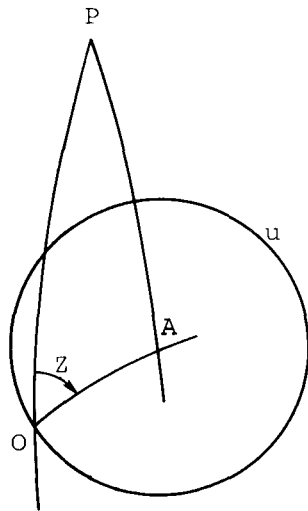


FIG. 2.5.

— in ogni punto di una circonferenza di 3^a specie l'angolo azimutale del centro è uguale alla differenza di longitudine tra il meridiano di questo e quello del punto.

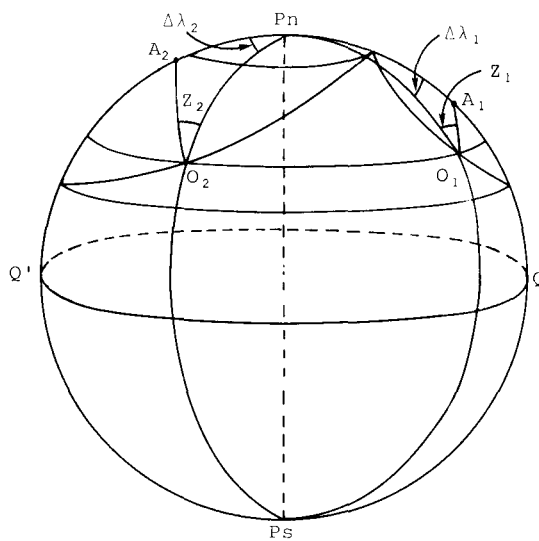


FIG. 2.6.

In fig. 2.7, essendo:

$$\widehat{P_n A} = \widehat{A O}$$

il triangolo sferico $P_n A O$ è isoscele e quindi:

$$Z = \Delta \lambda$$

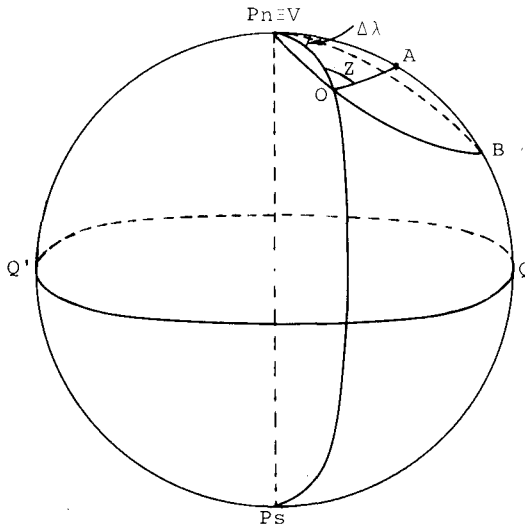


FIG. 2.7.

2.2 - DISTANZE CON MISURE DI ALTEZZE DI ASTR

Rappresenti la figura 2.8 la sfera celeste geocentrica. La freccia f indica il moto di rotazione della Terra, quella f' il corrispondente moto apparente della sfera celeste.

Il meridiano fondamentale proiettato sulla sfera celeste è rappresentato dalla semicirconferenza massima $P_{en} Z_G P_{cs}$, con Z_G lo zenit dell'osservatorio di Greenwich.

Si consideri, ora, un osservatore che nell'istante TMG misura col sestante l'altezza dell'astro A ed apporta poi a questa le dovute correzioni per riferirla al piano dell'orizzontale astronomico, ottenendo così l'altezza vera (h).

Il punto A' , proiezione dell'astro A sulla superficie terrestre, è detto *punto subastrale*; da questo punto l'astro è visto allo zenit (da qui il suo nome). Facilmente dalla figura si nota che le coordinate del punto subastrale sono date da:

$$\varphi_{A'} = \delta_A; \quad \lambda_{A'} = P_{GA}$$

conseguenza l'osservatore viene a trovarsi in un punto della circonferenza minore u' , proiezione della circonferenza u sulla superficie terrestre e, più propriamente, nel punto di u' corrispondente allo zenit su u .

La circonferenza minore u deve considerarsi pertanto il luogo degli zenit dei punti della Terra, appartenenti tutti alla circonferenza minore u' , dai quali nell'istante dato si misura dell'astro A la medesima altezza (riferita all'orizzonte vero).

Le generatrici del cono con vertice nel centro della Terra T , ottenuto dalla proiezione della circonferenza minore u , rappresentano le direzioni delle verticali dei punti della circonferenza u' . Quest'ultima conserva lo stesso raggio sferico ed ha per centro il punto subastrale.

Entrambe le circonferenze vengono denominate *circonferenze d'altezza*; per la determinazione della posizione si considera indifferentemente l'una o l'altra.

2.3 - EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI DISTANZA

Sia (fig. 2.9) u la circonferenza minore relativa alla misura della distanza d dal punto A , di note coordinate φ_A, λ_A e sia O un punto generico di questa nel quale viene considerato l'osservatore, di coordinate φ, λ .

Dal triangolo sferico OPA si ricava:

$$\cos d = \sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos (\lambda_A - \lambda) \quad (2.1)$$

relazione che rappresenta l'equazione del luogo di posizione.

La (2.1) può essere scritta anche nel seguente modo, in armonia con la (1.1a):

$$d = \cos^{-1} (\sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos (\lambda_A - \lambda)) \quad (2.1')$$

dove:

φ_A e λ_A rappresentano le coordinate del centro, d il raggio e φ e λ le coordinate di un punto generico della circonferenza minore.

Nel caso della misura dell'altezza di un astro nella (2.1) alla distanza d va sostituita la distanza zenitale vera mentre φ_A e λ_A rappresentano le coordinate del punto subastrale.

Per la risoluzione della (2.1), ed anche delle equazioni degli altri luoghi di posizione che saranno trattati in seguito, occorre definire il polo del triangolo sferico OPA che è quello dell'emisfero di uno degli altri due vertici, punti O ed A ; pertanto la latitudine del punto che definisce il polo dev'essere considerata, per i segni delle funzioni trigonometriche,

angolo positivo (1° quadrante), mentre, quella dell'altro punto, angolo positivo se dello stesso segno del primo (1° quadrante), altrimenti angolo negativo (4° quadrante).

Tanto premesso, dalla risoluzione della (2.1) rispetto ad una delle coordinate, nota l'altra, sono previste due radici reali e distinte, reali e coincidenti oppure immaginarie, secondo che la linea coordinata assunta intersechi la circonferenza di distanza oppure risulti ad essa tangente od esterna.

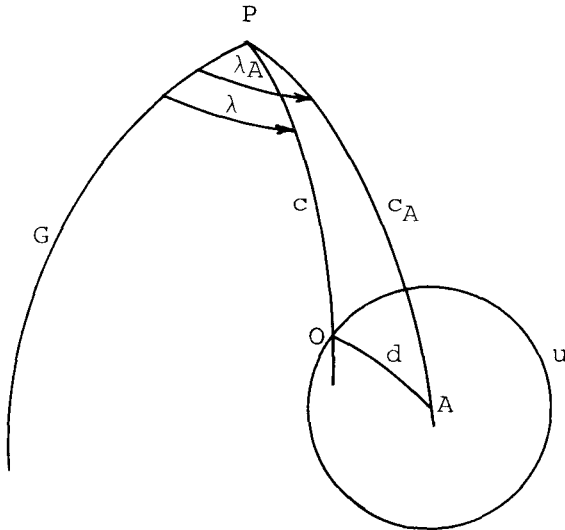


FIG. 2.9.

Immediata la risoluzione rispetto alla coordinata λ ; infatti si ricava:

$$\cos (\lambda_A - \lambda) = \frac{\cos d - \operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi_A \cos \varphi} \quad (2.2)$$

assegnando entrambi i segni alla differenza $\lambda_A - \lambda$, che può essere minore o maggiore di 90° a seconda del segno del rapporto del secondo membro.

La (2.2) può essere trasformata in formula logaritmica, ottenendo una delle tre formule di Borda.

Più impegnativa la risoluzione rispetto alla coordinata φ , essendo questa espressa nella (2.1) per seno e per coseno.

Mettendo in evidenza al secondo membro il prodotto:

$$\cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)$$

si ha:

$$\cos d = \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda) [\operatorname{tg} \varphi_A \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sec} (\lambda_A - \lambda) + \cos \varphi]$$

e ponendo:

$$\operatorname{cotg} M = \operatorname{tg} \varphi_A \operatorname{sec} (\lambda_A - \lambda) \quad (2.3)$$

si perviene a:

$$\cos d = \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda) \frac{\operatorname{sen} (\varphi + M)}{\operatorname{sen} M}$$

da cui:

$$\operatorname{sen} (\varphi + M) = \cos d \operatorname{sen} M \operatorname{sec} \varphi_A \operatorname{sec} (\lambda_A - \lambda) \quad (2.4)$$

Or dunque, le relazioni (2.3) e (2.4) permettono di ricavare l'incognita desiderata.

Con $(\lambda_A - \lambda) = 90^\circ$ la (2.4) risulta indeterminata; in tal caso può ottenersi una nuova coppia di formule mettendo in evidenza $\operatorname{sen} \varphi_A$ nel secondo membro della (2.1):

$$\cos d = \operatorname{sen} \varphi_A [\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{cotg} \varphi_A \cos \varphi \cos (\lambda_A - \lambda)]$$

Ponendo:

$$\operatorname{tg} M = \operatorname{cotg} \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda) \quad (2.5)$$

facilmente si ricava:

$$\operatorname{sen} (\varphi + M) = \cos d \cos M \operatorname{cosec} \varphi_A \quad (2.6)$$

relazione che porta all'indeterminazione per $\varphi_A = 0^\circ$.

La risoluzione della (2.1) rispetto alla coordinata φ può essere effettuata anche nel seguente modo.

Sostituendo le espressioni:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \quad \cos \varphi = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

nella (2.1) si ottiene l'equazione di 2° grado in $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$:

$$[\cos d + \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)] \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + [\cos d - \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)] = 0$$

le cui radici sono date da:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi_A \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varphi_A - \cos^2 d + \cos^2 \varphi_A \cos^2 (\lambda_A - \lambda)}}{\cos d + \cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)} \quad (2.7)$$

2.4 - CIRCONFERENZA DI DISTANZA SULLA CARTA DI MERCATORE

Per lo studio della circonferenza di distanza sulla carta di Mercatore occorre tener conto delle relazioni di corrispondenza di tale carta che, considerando unitario il raggio della Terra rappresentativa, sono:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dalla seconda relazione, ricordando le funzioni iperboliche, si ha:

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{tgh} y \quad \cos \varphi = \operatorname{sech} y \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{senh} y \quad (2.9)$$

Sostituendo nella (2.1) la prima delle (2.8) e le prime due delle (2.9) si ottiene:

$$\cos d \cosh y - \operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{senh} y = \cos \varphi_A \cos (x_A - x) \quad (2.10)$$

equazione della curva rappresentativa della circonferenza di distanza sulla carta nautica, comunemente detta *curva di distanza* e più specificatamente *curva d'altezza* nel caso della misura dell'altezza di un astro.

La (2.10) assume tre forme distinte a seconda del tipo di circonferenza. Se questa è di prima specie, essendo $d < c_A$, si ha:

$$\cos d > \operatorname{sen} \varphi_A \quad \text{e quindi} \quad \cos^2 d - \operatorname{sen}^2 \varphi_A > 0 \quad (2.11)$$

Si ponga:

$$\begin{aligned} \cos d &= K_1 \cosh y_0 \\ \operatorname{sen} \varphi_A &= K_1 \operatorname{senh} y_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

per cui:

$$\cos^2 d - \operatorname{sen}^2 \varphi_A = K_1^2$$

risultando, per la (2.11), K_1 una quantità reale positiva. Noto il suo valore è possibile ricavare quello dell'ordinata y_0 .

Sostituendo le (2.12) nella (2.10) si ottiene:

$$K_1 \cosh (y_0 - y) = \cos \varphi_A \cos (x_A - x) \quad (2.13)$$

Siano, ora, a e b due parametri così legati:

$$\cos b = \frac{1}{\cosh a} = \frac{K_1}{\cos \varphi_A} \quad (2.14)$$

per cui:

$$a = \ln \operatorname{tg} (45^\circ + b/2) \quad (2.15)$$

Dalla (2.15) può dedursi che è sempre $a > b$.

Per la (2.14) l'equazione (2.13) assume le seguenti due espressioni:

$$\begin{aligned} \cos b \cosh (y_0 - y) &= \cos (x_A - x) \\ \cosh (y_0 - y) &= \cosh a \cos (x_A - x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

che definiscono la forma della curva: un ovale simmetrico rispetto a due assi paralleli agli assi coordinati che s'intersecano nel punto O di coordinate: $x_0 = x_A, y_0$. Tale punto è il centro dell'ovale, che è compreso tra i paralleli $y = y_0 \pm a$ e tra i meridiani $x = x_A \pm b$: a e b rappresentano i semiassi di tale ovale (fig. 2.10 b).

Dalla prima delle (2.12) si ricava:

$$\cosh^2 y_0 = \frac{\cos^2 d}{K_1^2} = \frac{\cos^2 d}{\cos^2 d - \operatorname{sen}^2 \varphi_A}$$

dal triangolo sferico rettangolo $PT'A$ di fig. 2.10 a si ottiene:

$$\operatorname{sen} \varphi_A = \operatorname{sen} \varphi_T \cos d$$

relazione che sostituita nella precedente porta all'uguaglianza:

$$\cosh y_0 = \sec \varphi_T$$

per cui:

$$y_0 = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_T}{2} \right)$$

L'ordinata del centro dell'ovale non è altro che la latitudine crescente del parallelo passante per i due punti di tangenza T e T' di fig. 2.10a).

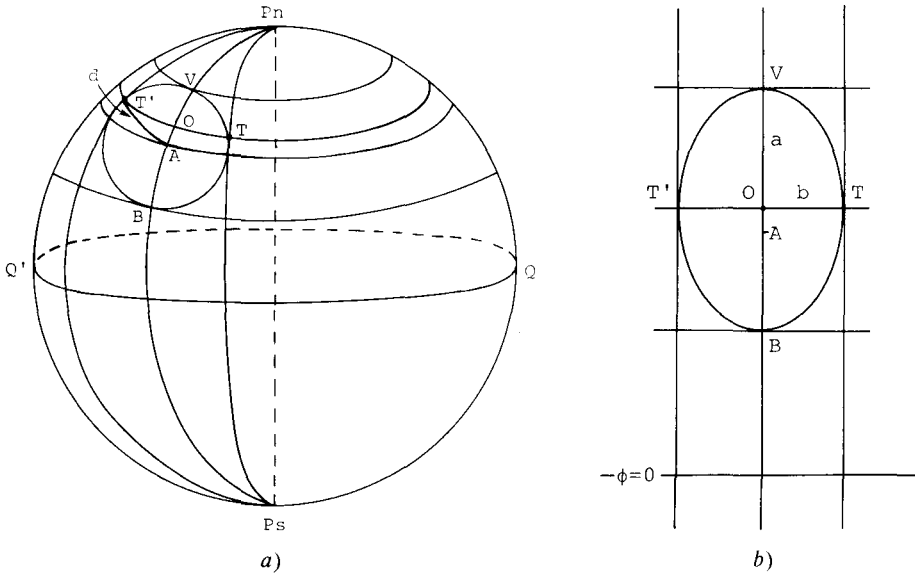


FIG. 2.10.

Si può infine osservare che tutte le circonferenze di distanza inscritte nello stesso fuso sono rappresentate sulla carta da curve uguali e pertanto sovrapponibili; infatti, estendendosi in longitudine di uguale $\Delta \lambda_{\max}$, le curve hanno lo stesso semiasse minore b e di conseguenza identico semiasse maggiore a .

Per una circonferenza di distanza di 2ª specie, essendo $d > c_A$, si ha:

$$\cos d < \operatorname{sen} \varphi_A \quad \text{e quindi} \quad \operatorname{sen}^2 \varphi_A - \cos^2 d > 0 \quad (2.17)$$

Si considerino, in analogia al caso precedente, le posizioni:

$$\begin{aligned} \cos d &= K_2 \operatorname{senh} y_0 \\ \operatorname{sen} \varphi_A &= K_2 \operatorname{cosh} y_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

per cui:

$$\operatorname{sen}^2 \varphi_A - \cos^2 d = K_2^2$$

risultando K_2 , per la (2.17), una quantità reale positiva.

Sostituendo le (2.18) nella (2.10) si ottiene:

$$K_2 \operatorname{senh} (y_0 - y) = \cos \varphi_A \cos (x_A - x) \quad (2.19)$$

Ponendo, poi:

$$\operatorname{senh} a = \frac{\cos \varphi_A}{K_2} \quad (2.20)$$

l'equazione (2.19) diventa:

$$\operatorname{senh} (y_0 - y) = \operatorname{senh} a \cos (x_A - x) \quad (2.21)$$

La curva espressa dalla (2.21) è simmetrica solamente rispetto al meridiano passante per il punto O di coordinate $x_0 = x_A, y_0$ ed è compresa tra i paralleli $y = y_0 \pm a$: una specie di senoide con concavità rivolta verso il parallelo y_0 e con flessi nei punti K e K' di coordinate $x = x_A \pm 90^\circ$ ed $y = y_0$ (fig. 2.11 b). E ciò per essere la derivata seconda della (2.21) positiva per x compreso tra 0° e $\pm 90^\circ$, negativa per x compreso tra $\pm 90^\circ$ e $\pm 180^\circ$, annullandosi proprio nei punti di ascissa $x = x_A \pm 90^\circ$ (punti K e K' nella citata figura).

L'angolo azimutale del centro A della circonferenza di distanza nei flessi è dato da:

$$\operatorname{sen} Z_0 = \frac{\cos \varphi_A}{\operatorname{sen} d}$$

relazione che sostituita nella (2.20) elevata al quadrato:

$$\operatorname{senh}^2 a = \frac{\cos^2 \varphi_A}{K_2^2} = \frac{\cos^2 \varphi_A}{\operatorname{sen}^2 \varphi_A - \cos^2 d}$$

dà:

$$\operatorname{senh} a = \operatorname{tg} Z_0$$

per cui:

$$a = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{Z_0}{2} \right)$$

La semialtezza della zona di distanza sulla carta di Mercatore è uguale alla latitudine crescente dell'angolo azimutale del centro della circonferenza misurato nei suoi punti di longitudine $\lambda = \lambda_A \pm 90^\circ$ (punti di flesso sulla carta nautica).

Circonferenze di distanza di 2^a specie inscritte nella stessa zona sono rappresentate da curve uguali, sono cioè sovrapponibili. Infatti le curve hanno la stessa semiampiezza a e di conseguenza sono espresse da un'unica equazione (2.21).

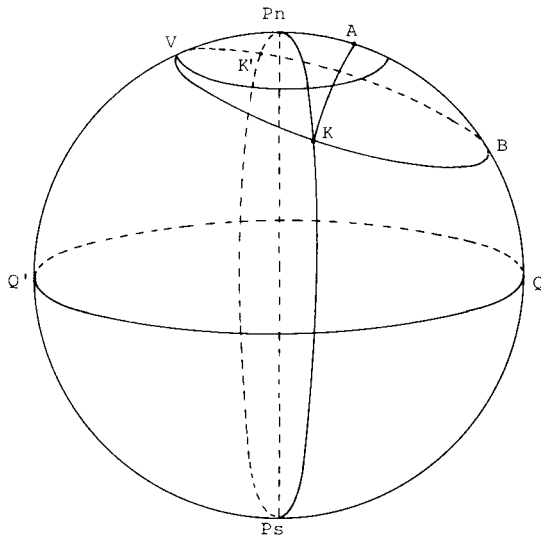


FIG. 2.11 a.

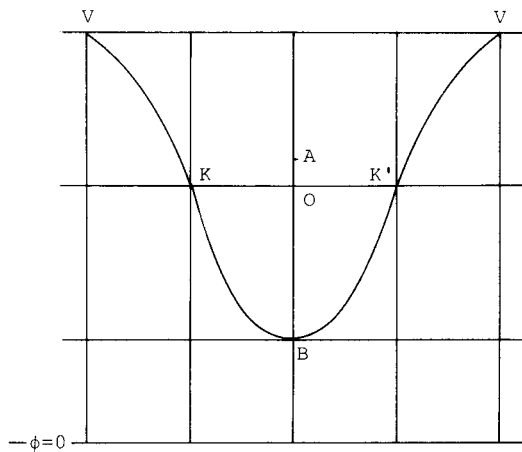


FIG. 2.11 b.

Quando la circonferenza di distanza è di 3^a specie, essendo $d = c_A$ per cui $\varphi_A = 90^\circ - d$, la (2.10) diventa:

$$\cos d [\cosh y - \sinh y] = \sin d \cos (x_A - x)$$

ed ancora:

$$e^{-y} = \operatorname{tg} d \cos (x_A - x)$$

relazione che può infine essere così scritta:

$$y = -\ln \operatorname{tg} d - \ln \cos (x_A - x) = \ln \operatorname{cotg} d + \ln \sec (x_A - x) \quad (2.22)$$

Per $x = x_A$:

$$y_0 = \ln \operatorname{cotg} d \quad (2.23)$$

e la (2.22) risulta:

$$y = y_0 + \ln \sec (x_A - x) \quad (2.24)$$

espressione molto semplificata dell'equazione della curva di distanza di 3^a specie. Questa risulta aperta e simmetrica rispetto al meridiano del centro della circonferenza (fig. 2.12 b) ed i suoi rami hanno per asintoti i meridiani a 90° da quello di simmetria.

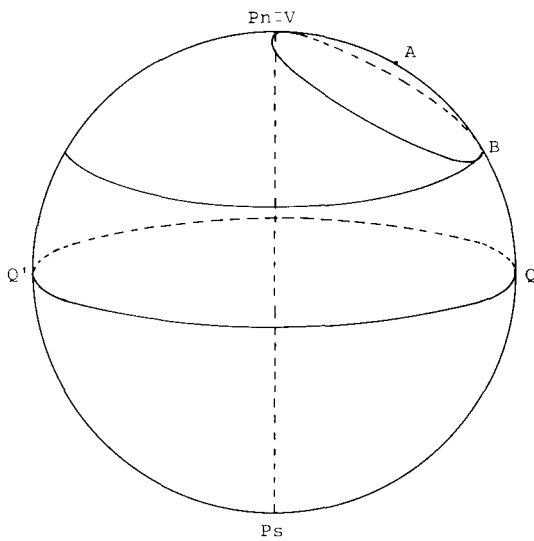


FIG. 2.12 a.

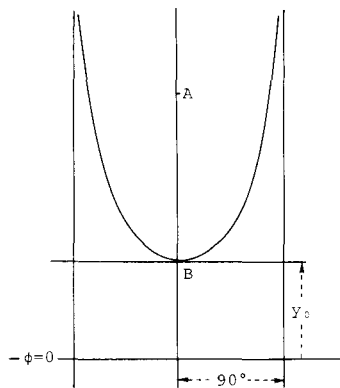


FIG. 2.12 b.

Essendo (fig. 2.12 a):

$$2d = 90^\circ - \varphi_B \text{ per cui } d = 45^\circ - \frac{\varphi_B}{2}$$

la (2.23) diventa:

$$y_0 = \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2} \right)$$

la costante y_0 rappresenta sulla carta nautica l'ordinata della base della circonferenza di distanza.

* * *

Differenziando la (2.10) rispetto ad x ed y si ottiene il coefficiente angolare della tangente alla curva in un suo generico punto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \varphi_A \operatorname{sen} (x_A - x)}{\cos d \operatorname{senh} y - \operatorname{sen} \varphi_A \operatorname{cosh} y}$$

espressione che, in virtù della relazione (2.1), della prima delle (2.8) e della seconda e terza delle (2.9), diventa:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\cos \varphi_A \operatorname{sen} (\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{sen} \varphi_A \cos \varphi - \cos \varphi_A \operatorname{sen} \varphi \cos (\lambda_A - \lambda)}$$

ed ancora, per le relazioni delle proiezioni e dei seni applicate al triangolo sferico POA di fig. 2.9:

$$\frac{dy}{dx} = - \operatorname{tg} Z \tag{2.25}$$

La retta tangente in un punto della curva, sulla carta di Mercatore, è inclinata sul parallelo del punto di un angolo uguale a $180^\circ - Z$, con Z l'angolo azimutale nel punto considerato del centro A della circonferenza di distanza. E non può essere altrimenti, dato l'isogonismo della carta.

Dalla seconda differenziazione della (2.10), in virtù di relazioni già citate, si perviene a:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{sen} d \cos^3 Z} \tag{2.26}$$

per cui, sostituendo nella formula generale del raggio di curvatura:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

le espressioni (2.25) e (2.26), si ottiene:

$$\rho = \frac{\text{sen } d}{\cos \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)} \quad (2.27)$$

La (2.27), per la relazione dei seni applicata al triangolo sferico POA di fig. 2.9, diventa:

$$\rho = \frac{\text{tg } (\lambda_A - \lambda)}{\text{sen } Z} \quad (2.28)$$

ed ancora, per la relazione delle proiezioni applicata allo stesso triangolo:

$$\rho = \frac{1}{\cos \varphi \cotg d - \text{sen } \varphi \cos Z} \quad (2.29)$$

con ρ , nelle tre formule, espresso in radianti.

* * *

Per il calcolo dello scostamento della curva di distanza, espressa dalla (2.10), dalla tangente, occorre tener presente la (1.21) così semplificata:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta s^2}{2} \frac{1}{\rho} \quad (2.30)$$

ove è stato trascurato il secondo termine che fornisce lo scostamento della circonferenza osculatrice dalla curva in oggetto. L'approssimazione consiste nel considerare coincidenti curva e circonferenza osculatrice nell'intorno del punto di tangenza. Per la (2.29) la (2.30) diventa, esprimendo ε e Δs in primi (di equatore):

$$\varepsilon = -\frac{\Delta s^2}{2} \cos \varphi \cotg d \text{sen } I' + \frac{\Delta s^2}{2} \text{sen } \varphi \cos Z \text{sen } I'$$

E tenendo presente che la lunghezza del miglio sulla carta di Mercatore è uguale a quella del primo di equatore moltiplicata per la secante della latitudine, la relazione precedente diventa:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta s^2}{2} \cotg d \operatorname{sen} l' + \frac{\Delta s^2}{2} \operatorname{tg} \varphi \cos Z \operatorname{sen} l' \quad (2.31)$$

con ε e Δs espressi in miglia.

Il secondo termine della (2.31) è molto piccolo rispetto al primo; aumenta con la latitudine e diventa massimo per $Z = 0^\circ = 180^\circ$.

Per $d = \operatorname{mg} 500$, $\Delta s = \operatorname{mg} 10$, $\varphi = 60^\circ$ e $Z = 0^\circ = 180^\circ$, i due termini, in valore assoluto, risultano rispettivamente $\operatorname{mg} 0.1$ e $\operatorname{mg} 0.025$.

Volendo, invece, calcolare lo scostamento della circonferenza di distanza da quella massima l ad essa tangente (fig. 2.13), detto s tale scostamento, si ha dal triangolo sferico rettangolo TBA :

$$\cos (d + s) = \cos d \cos \Delta s$$

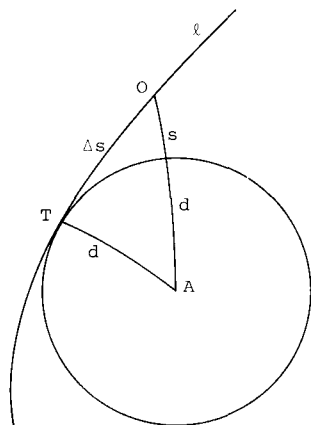


FIG. 2.13.

relazione che, sviluppando in serie $\cos (d + s)$ e $\cos \Delta s$ fino ai termini del secondo ordine, diventa:

$$s = \frac{\Delta s^2}{2} \cotg d$$

ed esprimendo s e Δs in miglia, come operato nel caso precedente, si ottiene:

$$s = \frac{\Delta s^2}{2} \cotg d \operatorname{sen} l' \quad (2.32)$$

relazione identica al primo termine della (2.31). L'arco di circonferenza massima Δs , per la sua piccola entità, può essere considerato confuso con l'arco di lossodromia tangente alla circonferenza di distanza nel punto T .

2.5 - LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA DI DISTANZA

Tenendo presente la (2.1'):

$$d = \cos^{-1}(\sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos(\lambda_A - \lambda))$$

vengono qui calcolati i coefficienti l , h_1 e h_2 dati dalle relazioni (1.11):

$$l = d - d_s$$

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = - \frac{\cos \varphi_A \cos \varphi_s \sin(\lambda_A - \lambda_s)}{\sqrt{1 - \cos^2 d_s}} = \\ &= - \frac{\cos \varphi_A \cos \varphi_s \sin(\lambda_A - \lambda_s)}{\sin d_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = - \frac{\sin \varphi_A \cos \varphi_s - \cos \varphi_A \sin \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)}{\sqrt{1 - \cos^2 d_s}} = \\ &= - \frac{\sin \varphi_A \cos \varphi_s - \cos \varphi_A \sin \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)}{\sin d_s} \end{aligned}$$

Dal triangolo sferico PO_sA (polo - posizione stimata - punto A) di fig. 2.14 si ricava:

$$\sin \varphi_A \cos \varphi_s - \cos \varphi_A \sin \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s) = \sin d_s \cos Z_s ;$$

$$\frac{\sin(\lambda_A - \lambda_s)}{\sin d_s} = \frac{\sin Z_s}{\cos \varphi_A}$$

per cui i coefficienti h_1 e h_2 diventano:

$$h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = - \cos \varphi_s \sin Z_s ; \quad h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = - \cos Z_s$$

Questi coefficienti, sostituiti nella (1.12), permettono di scrivere l'equazione della *retta di distanza* sulla sfera:

$$d - d_s = -\cos \varphi_s \operatorname{sen} Z_s \delta \lambda - \cos Z_s \delta \varphi \quad (2.33)$$

e le equazioni della stessa retta sul piano nautico e sulla carta di Mercatore sono in virtù delle relazioni (1.19) e (1.20):

$$d - d_s = -\operatorname{sen} Z_s x - \cos Z_s y \quad (2.34)$$

e

$$d - d_s = -\cos \varphi_s \operatorname{sen} Z_s x - \cos \varphi_s \cos Z_s y \quad (2.35)$$

Dividendo ambo i membri dell'equazione (2.35) per $-\cos \varphi_s$ si ottiene:

$$(d_s - d) \sec \varphi_s = \operatorname{sen} Z_s x + \cos Z_s y \quad (2.35')$$

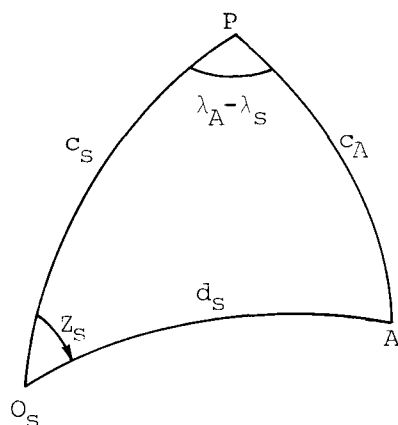


FIG. 2.14.

Il primo membro rappresenta l'importo della differenza tra la distanza stimata (calcolata) e quella misurata valutato sulla scala delle latitudini della carta nautica. Convenendo di indicare questo importo col simbolo $d_s - d = \Delta d$, l'equazione (2.35') assume la seguente espressione:

$$\operatorname{sen} Z_s x + \cos Z_s y - \Delta d = 0 \quad (2.35'')$$

analoga alla (2.34).

Il coefficiente angolare della retta di distanza r , rappresentata in fig. 2.15, ed i valori delle sue intercette sugli assi coordinati sono dati da:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} Z_s; \quad n_1 = \frac{\Delta d}{\cos Z_s}; \quad n_2 = \frac{\Delta d}{\operatorname{sen} Z_s}$$

Inoltre, l'azimut della perpendicolare alla retta r abbassata dal punto stimato e la grandezza del segmento di perpendicolare $O_s D$ risultano:

$$\beta = Z_s; \quad O_s D = p = \Delta d$$

L'uguaglianza $p = \Delta d$ può essere dedotta anche ragionando sul gradiente.

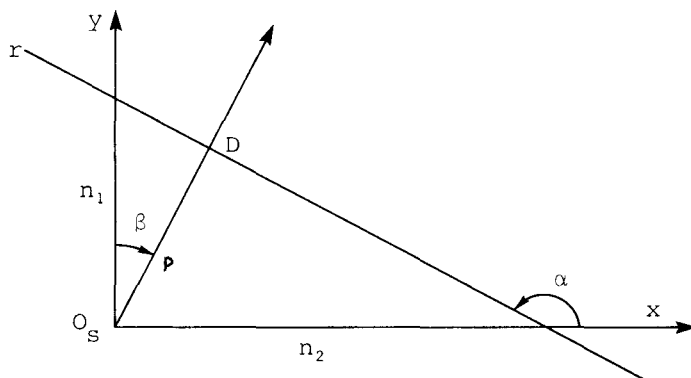


FIG. 2.15.

A questo punto è interessante considerare la fig. 2.16, mettendola a confronto con la 2.15. La retta di distanza r di fig. 2.15, nel caso di carta di Mercatore, non è altro che la rettificazione dell'arco lossodromico LL tangente alla circonferenza nel punto D (fig. 2.16), punto d'incontro dell'arco di verticale stimato relativo al centro A con il luogo di posizione. L'arco di circonferenza massima $p = O_s D = \Delta d$ può essere considerato arco lossodromico e quindi rettificato sulla carta di Mercatore, data la sua piccola entità (dell'ordine di poche miglia).

Col punto stimato all'esterno del luogo di posizione si nota che il punto D si trova sulla direzione azimutale di A e Δd risulta data da $d_s - d$; col punto stimato all'interno il punto D si trova sulla direzione azimutale opposta a quella di A e Δd risulta data da $d - d_s$. Considerando algebrica l'espressione $\Delta d = d_s - d$, nel primo caso essa risulta positiva, nel secondo negativa.

Per il tracciamento della retta di distanza sulla carta di Mercatore occorre calcolare d_s e Z_s , tenendo presente il triangolo sferico O_sPA , con polo P quello dell'emisfero del punto stimato. Basta, per esempio, risolvere le due formule:

$$\begin{aligned} \cos d_s &= \sin \varphi_A \sin \varphi_s + \cos \varphi_A \cos \varphi_s \cos (\lambda_A - \lambda_s) \\ \cotg Z_s &= \cos \varphi_s \operatorname{tg} \varphi_A \operatorname{cosec} (\lambda_A - \lambda_s) - \sin \varphi_s \cotg (\lambda_A - \lambda_s) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Per la 2^a formula possono essere utili le tavole A B C delle Tavole Nautiche, essendo sufficiente per Z_s l'approssimazione al grado.

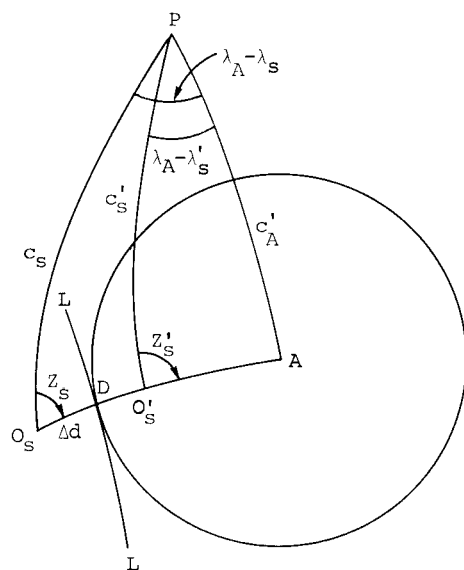


FIG. 2.16.

Dal punto stimato O_s si traccia la direzione azimutale del punto A e su questa si riporta Δd nella direzione di A o in quella opposta, a seconda del segno, determinando il punto D . Per D si traccia la retta normale alla direzione azimutale, ottenendo in tal modo la retta di distanza: l'osservatore si trova in un punto di questa.

2.6 - RETTA D'ALTEZZA

Nel caso della misura dell'altezza di un astro la retta di posizione viene denominata *retta d'altezza*.

Quest'ultima, considerata sulla carta di Mercatore, ha per equazione la (2.35'') in cui:

$$\Delta d = d_s - d = z_s - z = (90^\circ - h_s) - (90^\circ - h) = h - h_s = \Delta h$$

con h l'altezza misurata, corretta e ridotta all'orizzonte vero, h_s la simultanea altezza calcolata per l'orizzonte vero della posizione stimata dell'osservatore.

La (2.35'') sarà pertanto così espressa:

$$\text{sen } Z_s x + \cos Z_s y - \Delta h = 0 \quad (2.37)$$

Al posto della differenza algebrica $\Delta d = d_s - d$ viene ora considerata la differenza, sempre algebrica, $\Delta h = h - h_s$.

Alla fig. 2.16 del paragrafo precedente, in cui A rappresenta il punto subastrale, corrisponde un'analogia figura sulla sfera celeste; su questa A rappresenta l'astro e O_s è lo zenit stimato. L'angolo in P , cioè $\lambda_A - \lambda_s$, non è altro che l'angolo al polo dell'astro riferito al meridiano stimato; inoltre i lati sono: $PA = p$, $PO_s = c_s$, $O_s A = z_s$.

Per il tracciamento della retta d'altezza bisogna procedere alle seguenti operazioni:

1) misurare col sestante l'altezza dell'astro (h_i) e rilevare al cronometro l'istante dell'osservazione (T_c);

2) correggere l'istante cronometrico per ottenere il TMG e l'altezza misurata per riferirla all'orizzonte astronomico della località;

3) ricavare dalle Effemeridi Nautiche per l'istante TMG l'angolo orario dell'astro rispetto al meridiano di Greenwich (T_A) e la sua declinazione (δ_A);

4) trasformare T_A in t_{As} mediante la longitudine stimata;

5) con φ_s , t_{As} (P_{As}) e δ_A calcolare h_s e Z_s ; risolvere, cioè, il triangolo sferico $O_s P A$ di fig. 2.16. Si tratta di operare una trasformazione di coordinate locali orarie in azimutali;

6) eseguire la differenza algebrica $\Delta h = h - h_s$;

7) procedere al grafico come già detto nel paragrafo precedente per la retta di distanza. Se la differenza $\Delta h = h - h_s$ è positiva, il punto D è sulla direzione azimutale dell'astro, altrimenti è sulla direzione opposta.

Per h_s e Z_s possono essere risolte le formule:

$$\begin{aligned} \text{sen } h_s &= \text{sen } \delta_A \text{ sen } \varphi_s + \cos \delta_A \cos \varphi_s \cos P_{As} \\ \cotg Z_s &= \cos \varphi_s \text{ tg } \delta_A \text{ cosec } P_{As} - \text{sen } \varphi_s \cotg P_{As} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Il metodo di tracciamento della retta d'altezza testé trattato è noto in navigazione astronomica come metodo «Saint Hilaire».

Volendo lo scostamento della retta d'altezza dalla curva d'altezza sulla carta di Mercatore occorre sostituire nella (2.31) alla distanza d quella zenitale $z = 90^\circ - h$. Trascurando il 2° termine, per $\Delta s = 10$ mg e $z = 3^\circ$ lo scostamento della curva d'altezza dalla retta d'altezza risulta intorno ai 3/10 di miglio.

2.7 - MISURE DI PICCOLE DISTANZE

In navigazione costiera vengono misurate distanze molto piccole che col radar al massimo possono raggiungere le 40 - 50 miglia.

In navigazione astronomica, poi, può capitare di misurare l'altezza di un astro nella prossimità dello zenit (astro circumzenitale).

Si ponga nell'equazione della circonferenza di distanza data dalla (2.1):

$$\varphi = \varphi_A + \delta \varphi \quad \lambda = \lambda_A + \delta \lambda$$

esprimendo in tal modo le coordinate di un suo generico punto in funzione di quelle del centro.

L'equazione risulterà:

$$\cos d = \sin \varphi_A \sin (\varphi_A + \delta \varphi) + \cos \varphi_A \cos (\varphi_A + \delta \varphi) \cos \delta \lambda$$

Sviluppando in serie $\cos d$, $\cos \delta \lambda$, $\sin (\varphi_A + \delta \varphi)$ e $\cos (\varphi_A + \delta \varphi)$ fino ai termini del secondo ordine (ciò è lecito per le considerazioni citate) si ha:

$$1 - \frac{d^2}{2} = \sin \varphi_A \left(\sin \varphi_A + \delta \varphi \cos \varphi_A - \frac{\delta \varphi^2}{2} \sin \varphi_A \right) + \\ + \cos \varphi_A \left(\cos \varphi_A - \delta \varphi \sin \varphi_A - \frac{\delta \varphi^2}{2} \cos \varphi_A \right) \left(1 - \frac{\delta \lambda^2}{2} \right)$$

Eseguendo i prodotti e considerando sempre termini fino al secondo ordine si perviene a:

$$d^2 = \cos^2 \varphi_A \delta \lambda^2 + \delta \varphi^2 \quad (2.39)$$

relazione che rappresenta l'equazione di una circonferenza considerata sul piano tangente alla sfera terrestre nel punto A ; gli assi cartesiani hanno l'origine nel punto A e coincidono con le sue linee coordinate.

Facilmente si perviene alla (2.39) considerando piano il piccolissimo triangolo mistilineo rettangolo AOO_1 di fig. 2.17.

I termini superiori a quelli del 2° ordine trascurati nella relazione dalla quale si è ottenuta la (2.39) raggiungono il centesimo di primo per $\varphi_A = 45^\circ$ e $\delta\varphi = \delta\lambda = 60'$.

La calotta sferica avente per polo il punto A e per raggio la distanza misurata può quindi essere considerata piana, dato l'esiguo valore di d .

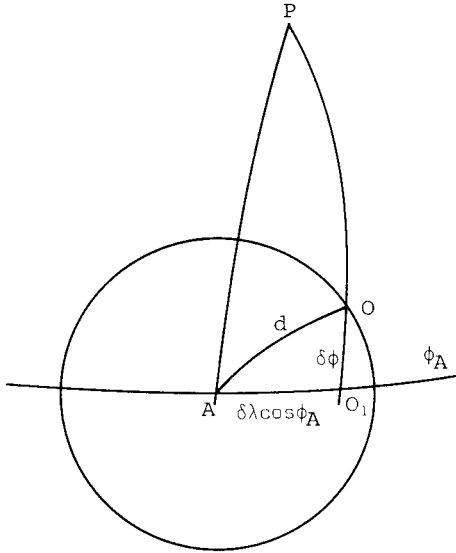


FIG. 2.17.

Per determinare la forma che la circonferenza (2.39) assume sulla carta di Mercatore si tengano presenti le relazioni di corrispondenza già altre volte richiamate:

$$x = \delta\lambda \quad y = \delta\varphi \sec\varphi_A$$

Si ha, sostituendole nella (2.39):

$$d^2 = \cos^2\varphi_A x^2 + \cos^2\varphi_A y^2$$

e dividendo tutto per $\cos^2\varphi_A$:

$$d^2 \sec^2\varphi_A = x^2 + y^2$$

Ma $d \sec \varphi_A$ rappresenta l'importo della distanza misurata sulla scala delle latitudini della carta, per cui, convenendo d'indicarlo ancora col simbolo d , si ha:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad (2.40)$$

dal che può concludersi che misurando una distanza non rilevante dal punto A il luogo di posizione è una circonferenza sul piano tangente alla sfera terrestre nel punto A ed anche sulla carta di Mercatore o sul piano nautico (per quest'ultimo è stata omessa la dimostrazione).

Con piccole distanze la circonferenza è di 1^a specie (salvo il caso teorico di misurare la distanza da un punto situato oltre il polo) che, come è stato detto, viene rappresentata sulla carta nautica da un ovale; tale ovale si confonde con la circonferenza di raggio d ed avente per centro il punto A . Nel caso di astro circumzenitale il punto A è individuato dal punto subastrale e la distanza d è data dalla distanza zenitale.

Ciò è lecito per distanze dell'ordine di alcune decine di miglia. Per una maggiore precisione può essere preso in considerazione quanto suggerito dal Villarceau: la circonferenza va tracciata sulla carta di Mercatore rispetto al centro dell'ovale con raggio uguale alla media aritmetica dei suoi semiassi a e b .

Così operando, il massimo scostamento tra l'ovale e la circonferenza risulta dato da:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{a - b}{2}$$

come può facilmente dedursi dalla fig. 2.18.

La semidifferenza delle latitudini crescenti del vertice e della base fornisce la grandezza del semiasse maggiore a ; la semisomma delle stesse permette di ottenere la latitudine crescente e quindi quella geografica del centro O . La longitudine di tale punto coincide con quella del centro della circonferenza di distanza sulla sfera.

Infine, dal semiasse maggiore a è facile ottenere quello minore, essendo:

$$a = \ln \operatorname{tg} (45^\circ + b/2)$$

Utile la seguente tabella che in vista di tale costruzione fornisce le distanze (in gradi) relative ad uno scostamento massimo di mezzo miglio; l'argomento d'entrata: la più grande delle due latitudini, la stimata

dell'osservatore e quella del centro della circonferenza di distanza, fatta astrazione del loro segno.

φ_s o φ_A	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
d o z	6°55'	6°50'	6°38'	6°17'	5°47'	5°08'	4°21'	3°23'	2°09'

Alla circonferenza che viene sostituita all'ovale può essere dato per raggio il semiasse maggiore; in tal caso questa riesce tangente all'ovale nel vertice e nella base, comprendendolo tutto entro di essa.

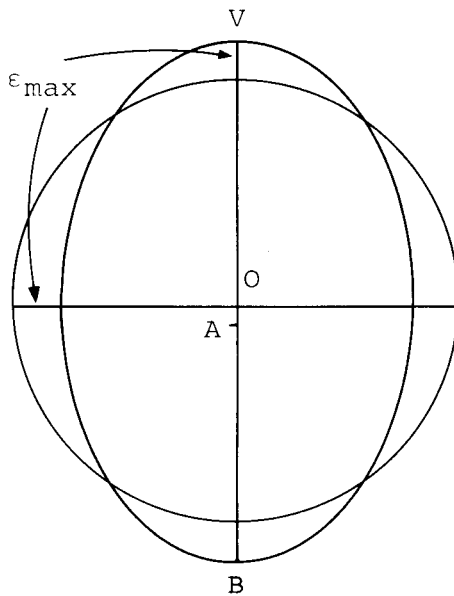


FIG. 2.18.

Lo scostamento massimo tra le due curve si ha agli estremi del semiasse minore ed è pari alla differenza dei due semiasse.

Per questa seconda costruzione i limiti forniti dalla citata tabella si riferiscono ad uno scostamento massimo di 1 miglio.

2.8 - DISTANZE DA SATELLITI ARTIFICIALI - LUOGO DI POSIZIONE

Mediante tecniche radioelettriche vengono misurate distanze da satelliti artificiali.

Il sistema di navigazione satellitare Navstar - GPS («Navigation system with time and ranging» - «Global positioning system»), attualmente in avanzata fase di realizzazione, si basa proprio sulla misura della distanza satellite-osservatore (ricevitore), ottenuta dalla conoscenza dell'intervallo di tempo intercorso fra l'istante d'emissione dal satellite di un segnale radioelettrico e quello di ricezione.

Satellite e ricevitore sono evidentemente muniti di orologi di alta precisione tra loro sincronizzati.

Il luogo di posizione che si ottiene dalla misura è una sfera avente per centro la posizione del satellite relativa all'istante di emissione del segnale e per raggio la distanza ottenuta.

Il segnale emesso dal satellite deve contenere, oltre alle informazioni telemetriche, anche quelle orbitali aggiornate, necessarie per poter determinare la sua posizione spaziale. Tutte le informazioni sono trasmesse mediante modulazioni della portante.

Con riferimento alla terna cartesiana fissa alla Terra di cui al paragrafo 1.1, indicando con x_A, y_A, z_A le coordinate del satellite all'istante dell'emissione del segnale e con x, y, z quelle dell'osservatore per lo stesso istante, l'equazione del luogo di posizione è data da:

$$d = [(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2]^{1/2} \quad (2.41)$$

La sfera di raggio d e con il centro nella posizione del satellite A (fig. 2.19) interseca la superficie sferica terrestre secondo la circonferenza minore u avente per polo il punto sub-satellite A' (proiezione del satellite A sulla Terra) e per raggio la distanza sferica OA' .

Questa è definita dall'angolo α che si ricava dal triangolo piano TOA , del quale sono noti i tre lati: R (raggio terrestre), d (distanza misurata), $R + q$ (raggio terrestre più quota del satellite fornita dalle sue effemeridi). Si ha:

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p - R)[p - (R + q)]}{R(R + q)}} \quad (2.42)$$

con p il semiperimetro:

$$p = \frac{R + d + R + q}{2} = R + \frac{d + q}{2}$$

Essendo:

$$p - R = \frac{d + q}{2} \quad p - (R + q) = \frac{d - q}{2}$$

la (2.42) diventa:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{d^2 - q^2}{4R(R+q)}} \quad (2.43)$$

Si viene così a considerare di nuovo quale luogo di posizione la circonferenza di uguale distanza (uguale distanza dal punto sub-satellite), analoga alla circonferenza d'altezza, di equazione:

$$\alpha = \cos^{-1} (\operatorname{sen} \varphi_{A'} \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_{A'} \cos \varphi \cos (\lambda_{A'} - \lambda)) \quad (2.44)$$

con α , $\varphi_{A'}$, $\lambda_{A'}$ costanti, dipendenti dall'istante della misura ($\varphi_{A'}$ e $\lambda_{A'}$ sono le coordinate del punto sub-satellite).

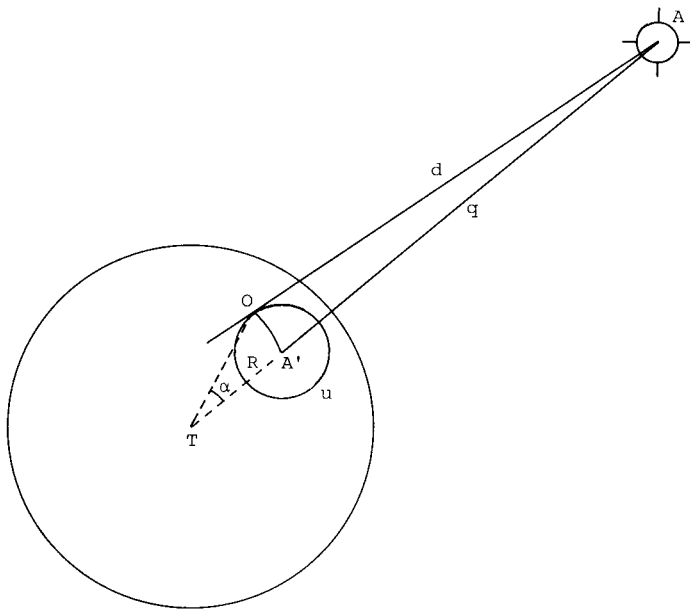


FIG. 2.19.

L'analogia con la navigazione astronomica porta alla seguente considerazione: la circonferenza d'altezza risulta dall'intersezione della sfera terrestre con il cono avente il vertice nel centro della Terra, l'asse orientato verso l'astro e semiapertura uguale alla distanza zenitale vera, intersezione che risulta sempre ortogonale perché le generatrici del cono sono raggi della sfera, come risulta chiaramente osservando la figura 2.8; la cir-

conferenza di uguale distanza dal punto sub-satellite risulta, invece, dall'intersezione di due sfere, quella terrestre e quella relativa alla distanza misurata e secondo un angolo variabile da 0° (sfere tangenti, osservatore nel punto sub-satellite) a 90° (satellite all'orizzonte dell'osservatore).

2.9 - LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA SFERA

Per la linearizzazione della (2.41) occorre calcolare i coefficienti espressi dalle relazioni (1.14). Questi sono:

$$l = d - d_s$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s = - \frac{2(x_A - x_s)}{2\sqrt{(x_A - x_s)^2 + (y_A - y_s)^2 + (z_A - z_s)^2}} = \frac{x_s - x_A}{d_s}$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s = \frac{y_s - y_A}{d_s} \qquad h_3 = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s = \frac{z_s - z_A}{d_s}$$

per cui si ottiene, tenendo presente la (1.15):

$$d - d_s = \frac{x_s - x_A}{d_s} \delta x + \frac{y_s - y_A}{d_s} \delta y + \frac{z_s - z_A}{d_s} \delta z \quad (2.45)$$

equazione di un piano, più propriamente del piano tangente alla sfera nel punto d'intersezione con questa della congiungente posizione stimata dell'osservatore-satellite.

I coefficienti h_1, h_2, h_3 rappresentano i coseni direttori della congiungente il punto stimato-centro della sfera, mentre l non è altro che la distanza del punto stimato dalla sfera.

2.10 - INCERTEZZA

Per la presenza dell'errore $\pm \delta d$ sulla distanza misurata, la circonferenza e la sfera di uguale distanza presentano incertezze valutabili mediante le relazioni (1.18).

Per la circonferenza, essendo (vedi paragrafo 2.5):

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = - \cos Z \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = - \sin Z$$

la (1.18a) fornisce:

$$\delta s = \pm \delta d \quad (2.46)$$

mentre per la sfera, essendo (vedi paragrafo 2.29):

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x - x_A}{d} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y - y_A}{d} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{z - z_A}{d}$$

la (1.18b) dà un'incertezza identica a quella espressa dalla (2.46): risultati pienamente attesi.

Di conseguenza, sia la retta che il piano di distanza subiscono spostamenti δs paralleli a se stessi lungo la direzione punto stimato-centro luogo di posizione, nel verso opposto a quello del centro se l'errore è positivo, nello stesso verso di quello del centro se negativo; al contrario se trattasi della retta d'altezza, considerando l'errore sull'altezza misurata e non sulla corrispondente distanza zenitale.

2.11 - PUNTO STIMATO SUL MERIDIANO O SULL'ANTIMERIDIANO DEL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA DI DISTANZA

La posizione stimata è sul meridiano o sull'antimeridiano del centro della circonferenza di distanza o d'altezza quando $\lambda_A - \lambda_s = 0^\circ$ o 180° (con λ_A la longitudine del centro). In navigazione astronomica, nel primo caso, l'astro è al passaggio al meridiano superiore stimato ($P_s = 0^\circ$), nel secondo, al meridiano inferiore stimato ($P_s = 180^\circ$, evidentemente astro circumpolare).

L'osservatore si trova in un punto della circonferenza compreso nell'intorno del vertice o della base e la retta di posizione si identifica con un tratto di parallelo.

Dalle due prime relazioni delle (2.36) e (2.38), per $\lambda_A - \lambda_s = 0^\circ$ e $P_s = 0^\circ$, si ottiene, rispettivamente:

$$d_s = \varphi_A - \varphi_s \text{ o } \varphi_s - \varphi_A \quad z_s = \delta_A - \varphi_s \text{ o } \varphi_s - \delta_A$$

Si conviene ricavare d_s e z_s dalla differenza algebrica:

$$d_s = \varphi_s - \varphi_A \quad z_s = \varphi_s - \delta_A \quad (2.47)$$

considerando positive le latitudini e le declinazioni nord, negative quelle sud (ci si riferisce al triangolo di posizione avente per polo quello nord e non quello elevato). Se d_s o z_s risultano positive l'azimut stimato è uguale

a 180° , se risultano negative l'azimut stimato è uguale a 0° , e ciò può essere facilmente verificato con semplici grafici.

Per il calcolo, poi, delle differenze algebriche $d_s - d$ e $z_s - z$ (o $h - h_s$) occorre tener solamente conto dei valori assoluti di d_s e z_s .

Le citate relazioni per $\lambda_A - \lambda_s = 180^\circ$ e $P_s = 180^\circ$ portano alla risoluzione aritmetica delle seguenti formule:

$$d_s = 180^\circ - (\varphi_A + \varphi_s) \quad z_s = 180^\circ - (\delta_A + \varphi_s) \quad (2.48)$$

φ_A e φ_s , δ_A e φ_s sono in pratica dello stesso segno; se positive l'azimut stimato è uguale a 0° , se negative a 180° .

Come ben si nota, in questi due casi particolari si semplifica notevolmente il calcolo degli elementi occorrenti per il tracciamento della retta di posizione.

Sorge, pertanto, spontanea la domanda: entro quali limiti di $\lambda_A - \lambda_s$ o di P_s è lecita una tale semplificazione?

Sia u (fig. 2.20) la circonferenza relativa alla misura della distanza d e rappresenti O_s la posizione stimata dell'osservatore, il cui meridiano è molto vicino a quello del punto A , centro della circonferenza. Il parallelo di O_s interseca il meridiano di A nel punto O'_s e l'arco $\widehat{O'_s A}$ rappresenta la distanza data dalla (2.47), indicata con d_{sm} (distanza stimata meridiana).

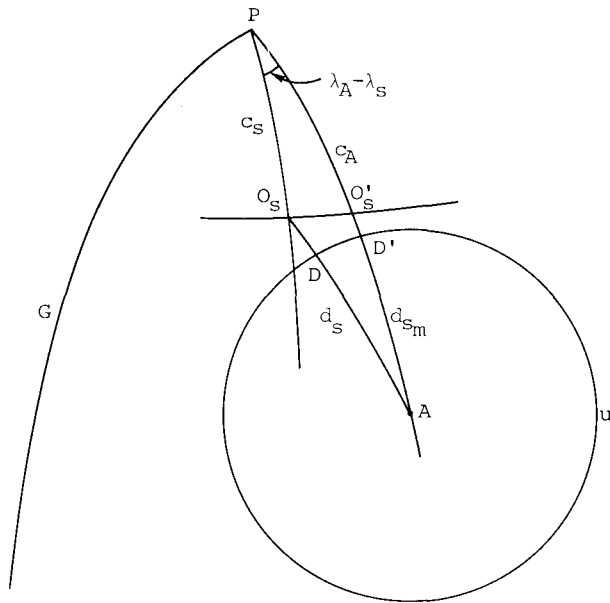


FIG. 2.20.

La distanza $\widehat{O_s A} = d_s$ è data dalla relazione (2.36):

$$\cos d_s = \sin \varphi_A \sin \varphi_s + \cos \varphi_A \cos \varphi_s \cos (\lambda_A - \lambda_s)$$

ricavata dal triangolo sferico $O_s P A$.

Sostituendo a $\cos (\lambda_A - \lambda_s)$ l'espressione $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{(\lambda_A - \lambda_s)}{2}$ facilmente si perviene a:

$$\cos d_{sm} - \cos d_s = 2 \cos \varphi_A \cos \varphi_s \operatorname{sen}^2 \frac{(\lambda_A - \lambda_s)}{2} \quad (2.49)$$

Essendo il secondo membro positivo, risulta d_{sm} minore di d_s , come si può anche notare dalla fig. 2.20.

Ponendo:

$$d_s = d_{sm} + R$$

e sviluppando in serie $\cos (d_{sm} + R)$ fino al termine di primo ordine, dalla (2.49) si ricava:

$$R = \frac{2 \cos \varphi_A \cos \varphi_s}{\operatorname{sen} (\varphi_s - \varphi_A)} \operatorname{sen}^2 \frac{(\lambda_A - \lambda_s)}{2} \quad (2.50)$$

con R la differenza $d_s - d_{sm}$ espressa in radianti.

Essendo piccola la differenza $\lambda_A - \lambda_s$ ed esprimendo tutto in primi, la (2.50) diventa:

$$R' = \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi_A \cos \varphi_s}{\operatorname{sen} (\varphi_s - \varphi_A)} (\lambda_A - \lambda_s)^2 \operatorname{sen} 1' \quad (2.51)$$

Assegnando ad R' un dato valore, per esempio mezzo primo, si può calcolare in funzione di φ_s e φ_A il limite di $\lambda_A - \lambda_s$ entro il quale è possibile considerare la posizione stimata del mobile sul meridiano del centro della circonferenza onde semplificare i calcoli per ottenere gli elementi occorrenti al tracciamento della retta di posizione. La linearizzazione viene effettuata, in tal caso, nel punto D' e non nel punto D , punti in pratica molto vicini.

La circonferenza di fig. 2.20 in navigazione astronomica è luogo di posizione soltanto per l'istante della misura dell'altezza dell'astro che, com'è noto, partecipa al moto apparente diurno della sfera celeste. Se la differenza $(\lambda_A - \lambda_s)$ è positiva ($\lambda_A - \lambda_s = P_{sE}$) l'astro non è ancora passato

al meridiano stimato dell'osservatore e la correzione R di formula (2.51) rappresenta per l'appunto la sua variazione d'altezza tra l'istante dell'osservazione e quello relativo al passaggio in meridiano; se, invece, è negativa ($\lambda_A - \lambda_s = P_{sW}$), l'astro è già passato al meridiano stimato ed R rappresenta la variazione d'altezza tra l'istante in cui l'astro è passato in meridiano e l'istante dell'osservazione. Il ragionamento non considera il moto dell'osservatore.

Per la navigazione astronomica la (2.51) prende i seguenti simboli:

$$R' = \frac{1}{2} \frac{\cos \delta_A \cos \varphi_s}{\sin(\varphi_s - \delta_A)} P_s'^2 \operatorname{sen} 1' \quad (2.51')$$

e la tavola n. 20 delle «Tavole nautiche» dell'Istituto Idrografico della Marina risolve per l'appunto tale formula considerando $R' = 0'.5$.

L'astro può essere considerato sul meridiano stimato se l'angolo al polo ottenuto dal calcolo è minore o al massimo uguale a quello fornito dalla tavola ($P_{s\text{lim}}$); può, invece, essere considerato sull'antimeridiano stimato quando il supplemento dell'angolo al polo calcolato è parimente minore o al massimo uguale a quello fornito dalla tavola. In ogni caso l'errore che si commette sull'altezza è $\leq 0'.5$.

La tavola può evidentemente essere utilizzata anche nei casi di normali misure di distanza.

2.12 - MISURE DI VARIAZIONI DI DISTANZE - LUOGO DI POSIZIONE

È possibile ottenere, in un dato istante, la derivata della distanza dalla misura della deriva Doppler che subisce la frequenza di un segnale ottico o radio emesso da una sorgente in movimento.

Si dimostra che tale deriva è data dalla relazione:

$$\Delta f = f_R - f_S = f_S \frac{V_r'}{c} = \frac{V_r'}{\lambda} \quad (2.52)$$

nella quale f_R e f_S indicano rispettivamente la frequenza ricevuta e quella trasmessa, c e λ la velocità della luce e la lunghezza d'onda relativa alla frequenza f_S , mentre V_r' è la proiezione del vettore velocità relativa sulla congiungente sorgente-ricevitore (derivata, appunto, della distanza).

Dalla figura 2.21, in cui O ed S rappresentano il ricevitore (osservatore) e la sorgente in moto relativo secondo la direzione Ss , si ricava:

$$V_r' = V_r \cos \alpha \quad (2.53)$$

con V_r la velocità relativa della sorgente rispetto all'osservatore, α l'angolo tra l'indicatrice del moto relativo e la congiungente sorgente-ricevitore.

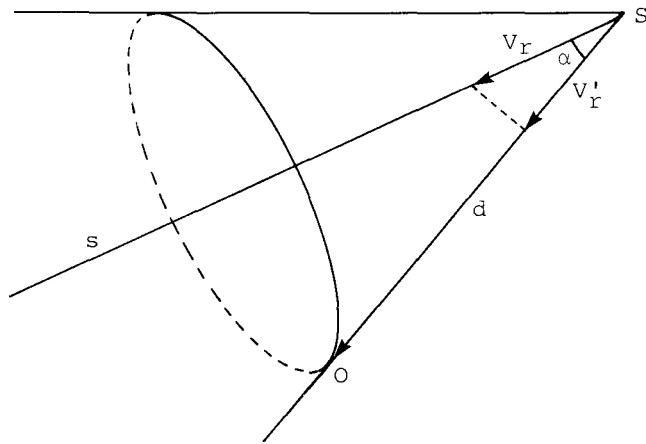


FIG. 2.21.

Per la (2.53) la deriva Δf risulta positiva o negativa secondo che α sia minore o maggiore di 90° ; decresce al tendere di α a 90° , si annulla proprio per $\alpha = 90^\circ$ ed aumenta al tendere di α a 180° (fig. 2.22).

Ad ogni moto relativo corrisponde una ed una sola curva Doppler; inoltre, per ricevitori in posizioni simmetriche rispetto alla traiettoria della sorgente, per i quali il moto relativo è lo stesso, si ha uguale curva Doppler.

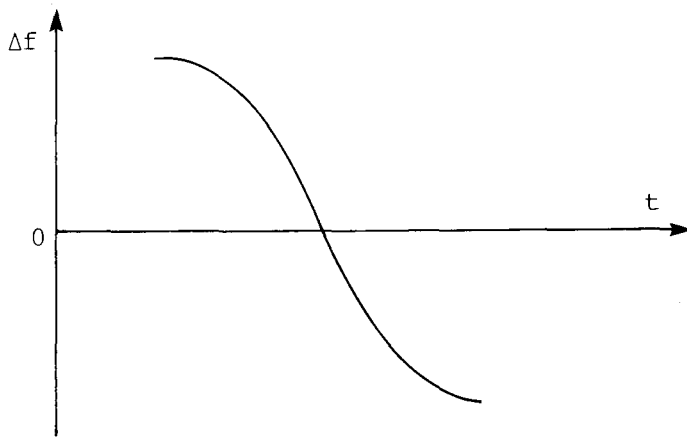


FIG. 2.22.

Dal che il luogo di posizione relativo alla stessa misura di deriva Doppler (e quindi alla stessa variazione di distanza) è la superficie del cono avente per vertice la sorgente, per asse l'indicatrice del moto relativo e con semiapertura uguale all'angolo α .

Noti i moti reali della sorgente e del ricevitore è possibile determinare il moto relativo della sorgente; la misura di Δf permette, poi, di ricavare l'angolo α e quindi di definire il cono di posizione.

La deriva Δf è facilmente misurabile, essendo una quantità scalare; valori sensibili si hanno con lunghezze d'onda molto piccole e velocità relative elevate, possibili queste condizioni con l'utilizzo di satelliti artificiali.

Prime misure di deriva Doppler furono effettuate durante le rivoluzioni dello Sputnik 1, messo in orbita il 4 ottobre '57. In seguito fu trovato più agevole fare un confronto tra una frequenza stabile generata dal ricevitore (più grande di f_s) e le frequenze ricevute in due istanti successivi corrispondenti a due ben definite posizioni del satellite sulla sua traiettoria. Si dimostra che il numero dei cicli misurati in tale intervallo è funzione della differenza delle distanze del ricevitore dalle due posizioni del satellite: il luogo di posizione è dunque un iperboloide di rotazione, avente per fuochi le due posizioni del satellite. Di questo luogo di posizione si discuterà nel paragrafo 3.5.

Su tale tecnica si basa il sistema di navigazione satellitare NNSS (Navy Navigation Satellite System), oggi noto come Sistema Transit, operante per usi civili dal 1967.

L'equazione vettoriale del cono di posizione (vedi anche i paragrafi 4.14 e 4.15) è data da:

$$\bar{V}_r \cdot \bar{d} = V_r d \cos \alpha \quad \alpha = \cos^{-1} \frac{\bar{V}_r \cdot \bar{d}}{V_r d} \quad (2.54)$$

avendo assunto la posizione del satellite quale origine dei vettori.

MISURE DI DIFFERENZE E SOMME DI DUE DISTANZE

3.1 - LUOGHI DI POSIZIONE

La conoscenza delle distanze da due punti noti permette di ottenere sia la differenza che la loro somma; mentre la differenza risulterà esente dalla eventuale presenza di un errore sistematico sulle due distanze, la somma ne risulterà contagiata in ragione del doppio di tale errore.

Nota la distanza da uno dei due punti, è possibile ottenere la differenza delle due distanze se nota anche la loro somma, la somma delle stesse se nota la loro differenza.

In pratica con tecniche radioelettriche si misura un parametro dal quale viene poi ricavata la differenza delle distanze, di qualsiasi entità esse sono.

Occorre precisare che per distanze vanno intese quelle più brevi, le geodetiche, che s'identificano con archi di circonferenze massime nel caso di Terra sferica.

Con osservatore ed i due punti noti posti sulla superficie terrestre, la misura della differenza, e della somma delle distanze da questi, definisce, come nel caso piano, due luoghi di posizione tra loro ortogonali, due coniche omofocali, sferiche o ellissoidiche secondo la forma della Terra considerata, un'iperbole la prima, un'ellisse la seconda.

Rappresentino sulla Terra supposta sferica (fig. 3.1) A e B due punti di note coordinate ed O la posizione dell'osservatore, rispetto alla quale sono note la differenza e la somma delle distanze sferiche relative ai detti punti: $\Delta d = d_A - d_B$, $Sd = d_A + d_B$.

I due rami dell'iperbole, che rappresenta il primo luogo di posizione, a differenza del caso piano, sono delle curve chiuse e, precisamente, delle ellissi, indicate in figura con le lettere a ed a' ; la prima avente per fuochi il punto B e l'antipodo del punto A (A'), la seconda il punto A e l'antipodo del punto B (B').

Da come è stata assunta la differenza delle distanze ($\Delta d = d_A - d_B$), per l'ellisse a tale differenza è positiva, per l'ellisse a' è negativa.

Il secondo luogo di posizione, relativo alla somma $Sd = d_A + d_B$, è rappresentato dalla ellisse sferica m avente per fuochi i due punti noti A e B e per centro il punto M , punto medio dell'arco sferico AB .

Simmetrica ed uguale alla m bisogna considerare l'ellisse m' , non disegnata in figura, con fuochi i punti A' e B' , avente per centro il punto M' , antipodo del punto M .

Per l'ellisse a è costante la somma delle distanze $180^\circ - d_A$ e d_B , mentre per l'ellisse a' è costante la somma delle distanze $180^\circ - d_B$ e d_A .

I punti A e B sono fuochi sia dell'iperbole sferica di rami a ed a' che dell'ellisse sferica m , mentre i punti A' e B' sono fuochi della stessa iperbole sferica e dell'ellisse sferica m' .

Tutte le citate curve sono simmetriche rispetto alle tre circonferenze massime c_1, c_2, c_3 : la prima passante per i punti A e B (e quindi per A' e

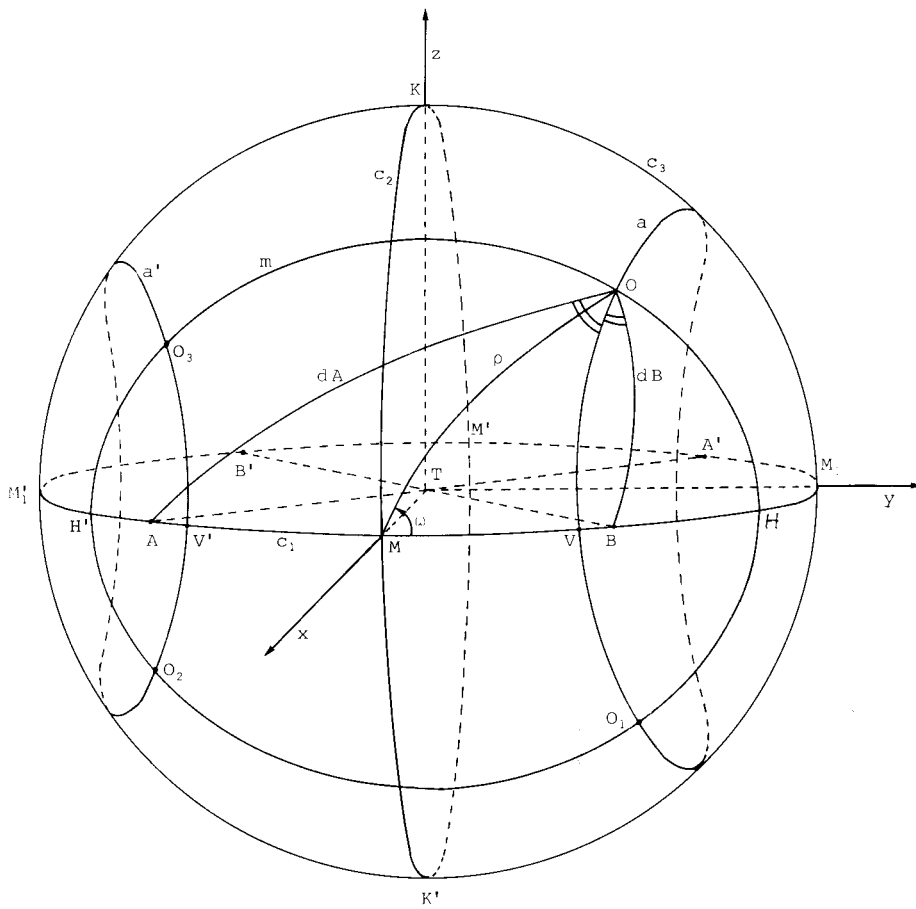


FIG. 3.1.

B'), la seconda normale a c_1 e passante per il punto M (è quindi per il punto M'), la terza, infine, normale alle prime due.

Quest'ultima circonferenza massima interseca la prima (c_1) nei punti M_1 e M'_1 , centri delle due ellissi a ed a' . Detti punti distano di 90° dai punti M ed M' .

L'arco \widehat{AB} , comunemente chiamato *linea di base* per i due punti considerati A e B , ed il suo uguale $\widehat{A'B'}$ rappresentano le distanze focali delle ellissi m ed m' e dell'iperbole $a-a'$, mentre gli archi $\widehat{A'B}$ e $\widehat{AB'}$ sono le distanze focali delle ellissi a ed a' . La differenza Δd è uguale all'arco $\widehat{VV'}$, la somma Sd all'arco $\widehat{HH'}$.

Le due circonferenze massime c_1 e c_2 s'identificano con gli assi trasverso e non trasverso dell'iperbole piana.

Come nel caso piano, nei punti d'incontro delle due coniche omofocali l'iperbole biseca una delle due coppie di angoli formati dalle due geodetiche che passano per i detti punti e per i fuochi, più precisamente quella coppia che sottende i due fuochi. L'ellisse biseca l'altra coppia di angoli.

Le coppie di ellissi a, a' e m, m' , note col nome di *coniche sferiche*, definite rispettivamente dai due parametri $\Delta d = d_A - d_B$ e $Sd = d_A + d_B$, determinano sulla sfera ben otto punti d'intersezione (in fig. 3.1 ne sono segnati solamente quattro: punti O, O_1, O_2, O_3); esse sono pertanto delle curve di 4° ordine (quartiche), ottenute da intersezioni di due superfici di 2° ordine, la sfera con cilindri ellittici o iperbolici oppure la sfera con coni.

Per i punti A e B si può considerare una famiglia di coppie di coniche omofocali, caratterizzata ciascuna coppia da una data differenza e da una data somma di distanze.

In navigazione vengono in generale utilizzate misure di differenze di distanze, ottenute con tecniche radioelettriche e senza ambiguità di segno, per cui la posizione viene ottenuta con luoghi iperbolici, onde la denominazione di *navigazione iperbolica*.

I sistemi radioelettrici per la navigazione iperbolica si dividono in sistemi a lungo, medio e breve raggio. A lungo raggio sono i sistemi Loran e Omega, a medio raggio è da citare il Decca, a breve raggio esistono vari sistemi tra i quali il Toran ed il Raydist in versione iperbolica.

3.2 - EQUAZIONI DELL'IPERBOLE E DELL'ELLISSE SFERICHE

Alla luce della (1.1a) e tenendo presente la (2.1'), le equazioni in coordinate geografiche delle due coniche sferiche testé trattate (iperbole ed ellisse) vengono espresse dalle seguenti semplici espressioni:

$$\begin{aligned} \Delta d = & \cos^{-1}(\sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos(\lambda_A - \lambda)) - \\ & - \cos^{-1}(\sin \varphi_B \sin \varphi + \cos \varphi_B \cos \varphi \cos(\lambda_B - \lambda)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$S d = \cos^{-1} (\sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos (\lambda_A - \lambda)) + \\ + \cos^{-1} (\sin \varphi_B \sin \varphi + \cos \varphi_B \cos \varphi \cos (\lambda_B - \lambda)) \quad (3.2)$$

con Δd e $S d$ rispettivamente la differenza e la somma delle distanze dai due punti A e B di note coordinate (φ_A, λ_A) e (φ_B, λ_B) e con φ, λ le coordinate dell'osservatore.

Le equazioni (3.1) e (3.2) possono assumere altre espressioni che mettono bene in evidenza il grado delle curve ma che mal si prestano alla loro linearizzazione.

Indicando con d_A e d_B le distanze dell'osservatore dai due punti noti A e B , le equazioni delle due circonferenze di distanza, contemplate sia nella (3.1) che nella (3.2), scritte secondo la (2.1), sono:

$$\cos d_A = \sin \varphi_A \sin \varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi \cos (\lambda_A - \lambda) \\ \cos d_B = \sin \varphi_B \sin \varphi + \cos \varphi_B \cos \varphi \cos (\lambda_B - \lambda) \quad (3.3)$$

Essendo:

$$\Delta d = d_A - d_B$$

si ricava:

$$d_A = d_B + \Delta d$$

per cui:

$$\cos d_A = \cos (d_B + \Delta d)$$

Sviluppando ed esprimendo $\sin d_B$ in funzione di $\cos d_B$ si ottiene:

$$\cos^2 d_A + \cos^2 d_B - 2 \cos d_A \cos d_B \cos \Delta d - \sin^2 \Delta d = 0 \quad (3.4)$$

relazione che per le (3.3) porta alla nuova equazione dell'iperbole sferica (curve a e a' di fig. 3.1):

$$A \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + B \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + C \sin^2 \varphi + \\ + D \cos^2 \varphi \sin \lambda \cos \lambda + E \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda + \\ + F \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda + G = 0 \quad (3.5)$$

con:

$$\begin{aligned}
 A &= \cos^2 \varphi_A \cos^2 \lambda_A + \cos^2 \varphi_B \cos^2 \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_A \cos \lambda_B \\
 B &= \cos^2 \varphi_A \sin^2 \lambda_A + \cos^2 \varphi_B \sin^2 \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin \lambda_A \sin \lambda_B \\
 C &= \sin^2 \varphi_A + \sin^2 \varphi_B - 2 \cos \Delta d \sin \varphi_A \sin \varphi_B \\
 D &= \cos^2 \varphi_A \sin 2 \lambda_A + \cos^2 \varphi_B \sin 2 \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \cos \varphi_A \cos \varphi_B \sin \lambda_A \cos \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_A \sin \lambda_B \\
 E &= \sin 2 \varphi_A \cos \lambda_A + \sin 2 \varphi_B \cos \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \sin \varphi_A \cos \varphi_B \cos \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \sin \varphi_B \cos \varphi_A \cos \lambda_A \\
 F &= \sin 2 \varphi_A \sin \lambda_A + \sin 2 \varphi_B \sin \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \sin \varphi_A \cos \varphi_B \sin \lambda_B - \\
 &\quad - 2 \cos \Delta d \sin \varphi_B \cos \varphi_A \sin \lambda_A \\
 G &= - \sin^2 \Delta d
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Partendo ora da:

$$S d = d_A + d_B$$

si ricava:

$$d_A = S d - d_B$$

e sviluppando come dianzi fatto:

$$\cos d_A = \cos (S d - d_B)$$

si ottiene una relazione simile alla (3.4): di qui l'equazione delle ellissi sferiche m ed m' di fig. 3.1 identica alla (3.5) con la sostituzione nei suoi coefficienti (3.6) di $S d$ al posto di Δd .

Alle equazioni testé ricavate si può pervenire per la seguente strada. Occorre per prima conoscere le equazioni dei due luoghi espresse nel sistema di coordinate sferiche polari avente il punto M come polo e la circonferenza c_1 quale circonferenza massima di riferimento.

Va poi considerata la terna cartesiana x, y, z , legata alle tre circonferenze massime c_1, c_2, c_3 , con origine nel centro della Terra, l'asse x definito dall'intersezione dei piani di c_1 e c_2 ed orientato verso il punto M , l'asse y definito dall'intersezione dei piani di c_1 e c_3 ed orientato verso il punto M_1 , mentre l'asse z dall'intersezione dei piani di c_2 e c_3 ed orientato in modo da avere la terna levogira (fig. 3.1).

Facilmente si ricava:

$$\begin{aligned} x &= \cos \rho \\ y &= \text{sen } \rho \cos \omega \\ z &= \text{sen } \rho \text{sen } \omega \end{aligned}$$

Ed infine l'attenzione deve cadere sulla terna cartesiana x', y', z' , sempre con origine nel centro della Terra e levogira, legata ai piani dell'equatore terrestre e del meridiano di Greenwich; gli assi x' ed y' entrambi nel piano equatoriale, rivolto il primo verso l'origine delle longitudini, l'asse z' coincidente con l'asse di rotazione ed orientato verso il polo nord. Si ha:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \varphi \cos \lambda \\ y' &= \cos \varphi \text{sen } \lambda \\ z' &= \text{sen } \varphi \end{aligned}$$

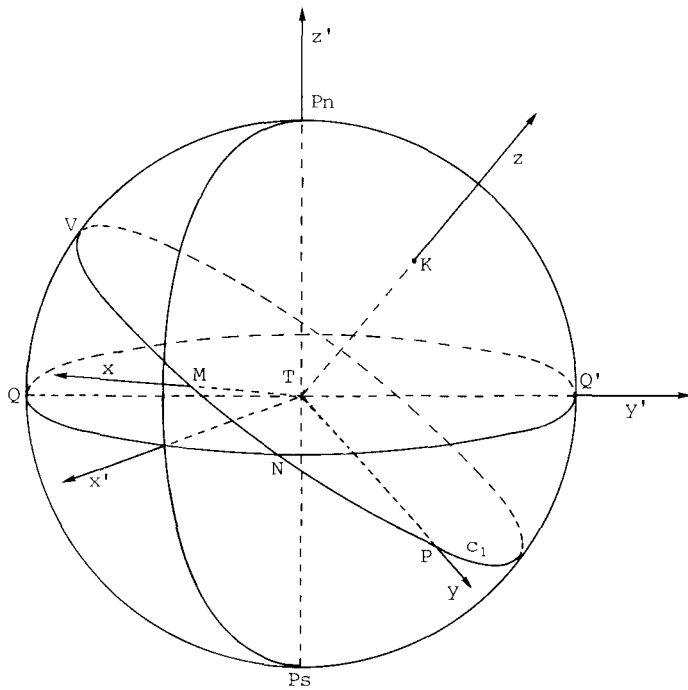


FIG. 3.2.

Per ottenere le equazioni desiderate, alternative alle (3.1) e (3.2), bisogna procedere ad una trasformazione di coordinate, simbolicamente così indicata:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con \mathbf{C} la matrice dei nove coseni direttori degli assi della prima terna (x, y, z) rispetto a quelli della seconda (x', y', z') .

La costruzione della matrice \mathbf{C} viene effettuata mediante tre successive rotazioni della terna x, y, z (fig. 3.2): la prima intorno all'asse z in modo da portare M (punto medio della base AB) sul vertice V , la seconda intorno all'asse y in modo da far coincidere il polo K con P_n e la terza sempre intorno all'asse z in modo da portare il vertice V a coincidere con l'origine delle longitudini.

3.3 - LINEARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DELL'IPERBOLE E DELL'ELLISSE SFERICHE

I coefficienti l, h_1, h_2 , dati dalle relazioni (1.11), per le equazioni (3.1) e (3.2), tenendo presente quanto operato per la linearizzazione dell'equazione della circonferenza di distanza, assumono le seguenti espressioni:

– per l'iperbole sferica:

$$\begin{aligned} l &= \Delta d - \Delta d_s \\ h_1 &= \cos \varphi_s (\text{sen } Z_{Bs} - \text{sen } Z_{As}) \\ h_2 &= \cos Z_{Bs} - \cos Z_{As} \end{aligned}$$

– per l'ellisse sferica:

$$\begin{aligned} l &= Sd - Sd_s \\ h_1 &= -\cos \varphi_s (\text{sen } Z_{Bs} + \text{sen } Z_{As}) \\ h_2 &= -(\cos Z_{Bs} + \cos Z_{As}) \end{aligned}$$

con:

Δd e Sd le misure della differenza e della somma delle distanze tra l'osservatore ed i due punti noti A e B ;

Δd_s e Sd_s la differenza e la somma delle distanze tra il punto stimato ed i punti A e B ;

Z_{A_s} e Z_{B_s} gli angoli azimutali dei due punti riferiti al punto stimato (tali angoli possono essere sostituiti dai rispettivi azimut).

La (1.12) diventa per l'iperbole sferica:

$$\Delta d - \Delta d_s = \cos \varphi_s (\sin Z_{B_s} - \sin Z_{A_s}) \delta \lambda + (\cos Z_{B_s} - \cos Z_{A_s}) \delta \varphi \quad (3.7)$$

e per l'ellisse sferica:

$$Sd - Sd_s = -\cos \varphi_s (\sin Z_{B_s} + \sin Z_{A_s}) \delta \lambda - (\cos Z_{B_s} + \cos Z_{A_s}) \delta \varphi \quad (3.8)$$

equazioni, sulla sfera, rispettivamente detta *retta iperbolica* e di quella *ellittica*.

Queste rette sulla carta di Mercatore saranno espresse dalle seguenti equazioni:

$$(\Delta d - \Delta d_s) \sec \varphi_s = (\sin Z_{B_s} - \sin Z_{A_s}) x + (\cos Z_{B_s} - \cos Z_{A_s}) y$$

$$(Sd - Sd_s) \sec \varphi_s = -(\sin Z_{B_s} + \sin Z_{A_s}) x - (\cos Z_{B_s} + \cos Z_{A_s}) y$$

i cui primi membri rappresentano gli importi delle differenze $\Delta d - \Delta d_s$ e $Sd - Sd_s$ valutati sulla scala delle latitudini. Dando ad essi la stessa indicazione, le due equazioni vengono così espresse:

$$(\sin Z_{B_s} - \sin Z_{A_s}) x + (\cos Z_{B_s} - \cos Z_{A_s}) y - (\Delta d - \Delta d_s) = 0 \quad (3.9)$$

$$(\sin Z_{B_s} + \sin Z_{A_s}) x + (\cos Z_{B_s} + \cos Z_{A_s}) y + (Sd - Sd_s) = 0 \quad (3.10)$$

Identiche relazioni si hanno considerando il piano nautico.

3.4 - BISETRICE DI DISTANZA

La fig. 3.3 considera la determinazione della posizione con la misura delle distanze d_A e d_B dai due punti noti A e B .

L'osservatore O si trova in uno dei due punti d'intersezione delle due circonferenze u_A e u_B aventi per centri i due punti e per raggi le rispettive distanze misurate.

Per il punto O passa anche il ramo a dell'iperbole sferica caratterizzata da $\Delta d = d_A - d_B = \text{cost.}$

Se le misure delle due distanze sono affette da un errore sistematico, la differenza Δd è indipendente da questo, per cui la posizione dell'osservatore va considerata sull'arco del ramo a dell'iperbole nell'intorno del punto O ; pertanto il luogo di posizione che occorre utilizzare in questo

caso è proprio tale ramo d'iperbole, bisettrice dell'angolo ψ , ramo denominato per l'occasione *bisettrice di distanza*. L'angolo ψ è dato dalla differenza d'azimut in O dei due punti A e B .

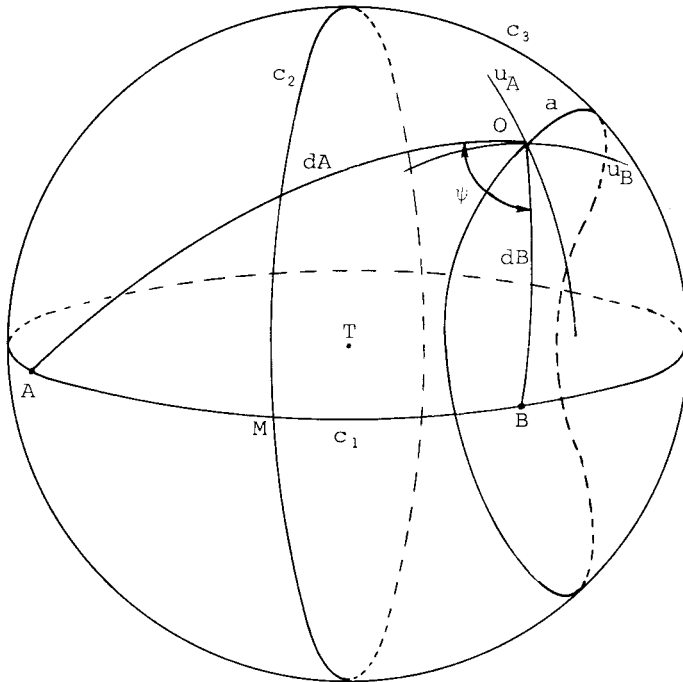


FIG. 3.3.

Si consideri il piano tangente in O alla superficie terrestre (fig. 3.4).

Su questo, nell'intorno di O , gli archi delle circonferenze u_A e u_B sono rappresentati dalle rette r_A e r_B (le due rette di distanza), le direzioni dei due punti noti rispetto ad O dalle semirette OA e OB .

Oltre all'angolo ψ , la bisettrice di distanza biseca anche l'angolo α tra le rette di distanza, definito da:

$$\alpha = 180^\circ - \psi$$

e quindi da:

$$\alpha = 180^\circ - \Delta a \tag{3.11}$$

con Δa la differenza d'azimut dei due punti rispetto ad O .

Or dunque, nel caso della sola presenza di errore sistematico sulle due distanze misurate, la posizione dell'osservatore va considerata sulla

bisettrice dell'angolo α (meglio della coppia di angoli α , non conoscendo il segno dell'errore), dato dalla (3.11). Segnando delle freccette sulle rette, per indicare la direzione dei punti noti A e B , l'angolo α è determinato dalla combinata convergenza o divergenza di tali freccette.

Nel caso della misura delle altezze di due astri la bisettrice viene denominata *bisettrice d'altezza*.

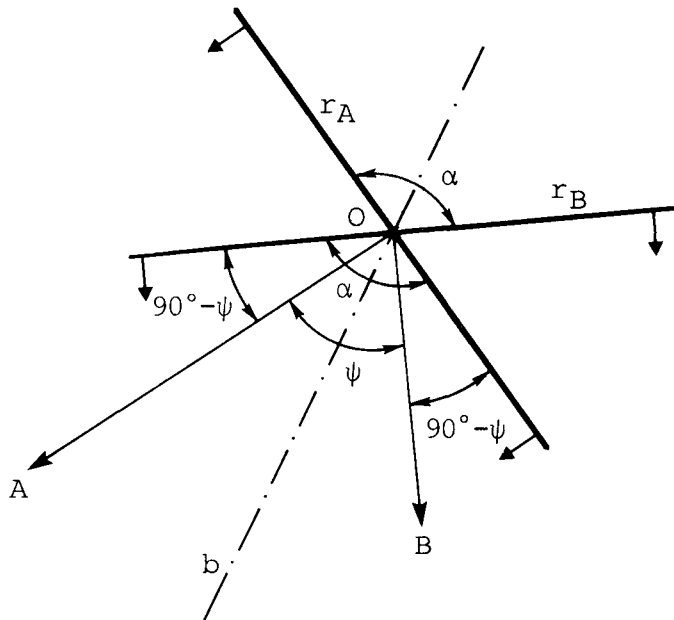


FIG. 3.4.

Che la bisettrice trattata s'identifichi con la retta iperbolica può essere dimostrato in modo analitico. Basta, infatti, considerare le equazioni delle due rette di distanza (considerate sulla sfera, sul piano nautico o sulla carta di Mercatore) e ricavare le equazioni delle bisettrici delle due coppie di angoli da esse formate. Una di queste equazioni sarà quella della retta iperbolica.

Vengono qui di seguito considerate le equazioni delle due rette di distanza sulla carta di Mercatore:

$$\text{sen } Z_{As} x + \cos Z_{As} y + (d_A - d_{As}) = 0$$

$$\text{sen } Z_{Bs} x + \cos Z_{Bs} y + (d_B - d_{Bs}) = 0$$

Le equazioni delle due bisettrici sono date da:

$$\begin{aligned} &\text{sen } Z_{As} x + \cos Z_{As} y + (d_A - d_{As}) = \\ &= \pm [\text{sen } Z_{Bs} x + \cos Z_{Bs} y + (d_B - d_{Bs})] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Considerando il segno positivo e raggruppando si ottiene:

$$(\sin Z_{B_s} - \sin Z_{A_s})x + (\cos Z_{B_s} - \cos Z_{A_s})y - [(d_A - d_B) - (d_{A_s} - d_{B_s})] = 0$$

relazione che s'identifica con la (3.9).

Tenendo, invece, conto del segno negativo della (3.12) si perviene alla (3.10).

Segnate, dunque, sulla carta di Mercatore o sul piano nautico le due rette di distanza, la bisettrice della coppia di angoli definita dalla (3.11) rappresenta la retta iperbolica, la bisettrice dell'altra coppia di angoli rappresenta la retta ellittica. Nel caso di due rette d'altezza, la prima bisettrice rappresenta la rettificazione del luogo di uguale differenza di distanze zenitali (o di altezze), la seconda la rettificazione del luogo di uguale somma di distanze zenitali (o di altezze).

3.5. - DIFFERENZA E SOMMA DELLE DISTANZE DA DUE SATELLITI ARTIFICIALI. LUOGHI DI POSIZIONE

Se i punti noti A e B sono nello spazio (per esempio, due satelliti artificiali), la differenza delle due distanze individua un iperboloide, la somma un ellissoide, entrambi di rotazione ed omofocali, con fuochi proprio le posizioni dei due satelliti.

Ben inteso che le distanze possono anche essere riferite a due posizioni intervallate dello stesso satellite.

Con riferimento alla terna cartesiana di cui al paragrafo 1.1, tenendo presente la (2.41), le equazioni di questi due luoghi di posizione sono rispettivamente espresse da:

$$\Delta d = d_A - d_B = [(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2]^{1/2} - [(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 + (z_B - z)^2]^{1/2} \quad (3.13)$$

$$S d = d_A + d_B = [(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2]^{1/2} + [(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2 + (z_B - z)^2]^{1/2} \quad (3.14)$$

con:

Δd e $S d$ rispettivamente la differenza e la somma delle due distanze;

$x_A, y_A, z_A; x_B, y_B, z_B$ le coordinate dei due satelliti;

x, y, z le coordinate dell'osservatore.

Per la linearizzazione delle due equazioni testé riportate, i coefficienti (1.14), alla luce di quanto operato per la sfera (par. 2.9), assumono, nel caso dell'iperboloide, le seguenti espressioni:

$$l = \Delta d - \Delta d_s$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s = \frac{x_s - x_A}{d_{As}} - \frac{x_s - x_B}{d_{Bs}}$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s = \frac{y_s - y_A}{d_{As}} - \frac{y_s - y_B}{d_{Bs}}$$

$$h_3 = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s = \frac{z_s - z_A}{d_{As}} - \frac{z_s - z_B}{d_{Bs}}$$

con Δd_s la differenza delle distanze tra le posizioni dei due satelliti e quella stimata dell'osservatore.

Nel caso dell'ellissoide il coefficiente l è espresso da:

$$l = Sd - Sd_s$$

dove Sd_s rappresenta la somma delle due citate distanze stimate.

Per i coefficienti h_1 , h_2 ed h_3 basta sommare i due termini dei coefficienti relativi all'iperboloide.

In definitiva la linearizzazione delle (3.13) e (3.14) porta alle seguenti espressioni:

$$\Delta d - \Delta d_s = \left(\frac{x_s - x_A}{d_{As}} - \frac{x_s - x_B}{d_{Bs}} \right) \delta x + \left(\frac{y_s - y_A}{d_{As}} - \frac{y_s - y_B}{d_{Bs}} \right) \delta y +$$

$$+ \left(\frac{z_s - z_A}{d_{As}} - \frac{z_s - z_B}{d_{Bs}} \right) \delta z \quad (3.15)$$

$$Sd - Sd_s = \left(\frac{x_s - x_A}{d_{As}} + \frac{x_s - x_B}{d_{Bs}} \right) \delta x + \left(\frac{y_s - y_A}{d_{As}} + \frac{y_s - y_B}{d_{Bs}} \right) \delta y +$$

$$+ \left(\frac{z_s - z_A}{d_{As}} + \frac{z_s - z_B}{d_{Bs}} \right) \delta z \quad (3.16)$$

equazioni di due piani tangenti ai solidi di rotazione nei loro punti più vicini alla posizione stimata dell'osservatore.

3.6 - INCERTEZZE

Gli errori $\pm \delta \Delta d$ e $\pm \delta S d$ sulla differenza e sulla somma delle due distanze porta ad un'incertezza sulle coniche sferiche e sui due solidi di rotazione che verrà qui valutata mediante le relazioni 1.18.

Tenendo presente i valori dei coefficienti h_1 e h_2 riportati nel paragrafo 3.3, si ha per l'iperbole sferica:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \cos Z_B - \cos Z_A \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = \sin Z_B - \sin Z_A$$

e per l'ellisse sferica:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -(\cos Z_B + \cos Z_A) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = -(\sin Z_B + \sin Z_A)$$

espressione dei coseni direttori della direzione del gradiente per i due luoghi di posizione.

Sostituendo tali valori nella (1.18a), l'incertezza per l'iperbole sferica risulta data da:

$$\delta s = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Delta Z}{2} \delta \Delta d \quad (3.17)$$

e per l'ellisse sferica da:

$$\delta s = \pm \frac{1}{2} \sec \frac{\Delta Z}{2} \delta S d \quad (3.18)$$

con ΔZ la differenza degli azimut dei due punti rispetto a quello in cui si desidera l'incertezza.

Per l'iperboloide e l'ellissoide di rotazione occorre seguire lo stesso procedimento, sostituendo nella (1.18b) i valori dei coefficienti h_1 , h_2 ed h_3 riportati nel paragrafo precedente, considerando al posto delle coordinate stimate dell'osservatore quelle del punto in cui si desidera l'incertezza.

Si perviene a delle espressioni identiche alle (3.17) e (3.18), in cui con ΔZ va inteso l'angolo compreso tra le direzioni ai due punti (due satelliti) nello spazio.

Le (3.17) e (3.18) sono a maggior ragione valide per le coniche piane, luoghi che vengono considerati quando sono molto piccole le distanze dai due punti noti della superficie terrestre, alla luce di quanto discusso al par. 2.7.

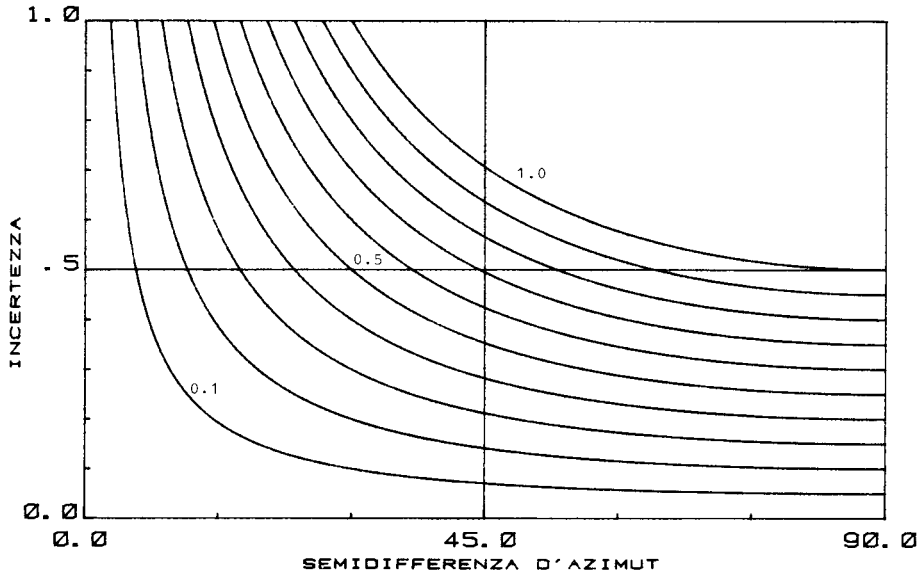


FIG. 3.5.

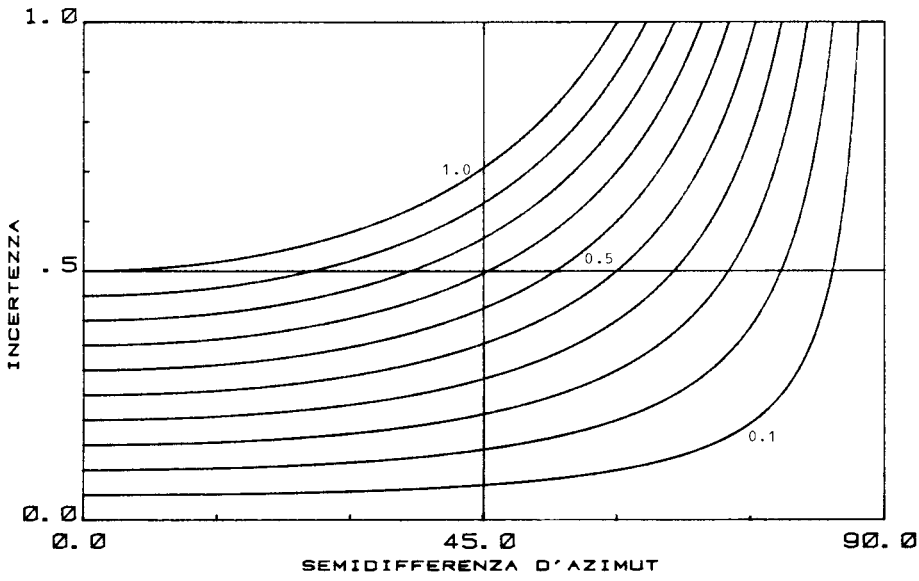


FIG. 3.6.

La minima incertezza per l'iperbole sferica o piana si ha per $\Delta Z = 180^\circ$ ($\delta s_{\min} = \pm 1/2 \delta \Delta d$), sulla linea di base; la massima per $\Delta Z = 0^\circ$, sul prolungamento di tale linea.

Al contrario, per l'ellisse sferica o piana, la minima incertezza si ha per $\Delta Z = 0^\circ$ ($\delta s_{\min} = \pm 1/2 \delta S d$), la massima per $\Delta Z = 180^\circ$.

Le curve delle fig. 3.5 e 3.6 forniscono le incertezze per errori rispettivamente su differenze e su somme di due distanze. Esse sono vevoli anche per il caso spaziale se in ascissa si considera la metà dell'angolo compreso tra le direzioni ai due punti noti.

Non sfugge la simmetria delle due famiglie di curve.

MISURE DI ANGOLI

4.1 - GENERALITÀ

È noto che il *rilevamento* (Ril) o *azimut* (a) del punto A (fig. 4.1) rispetto al punto O (generalmente l'osservatore) è l'angolo diedro limitato da due piani verticali relativi alla verticale del punto O , quello meridiano e quello passante per il punto A , contato dalla direzione nord del piano meridiano, da 0° a 360° , nel senso N - E - S - W, fino al piano verticale del punto A . La verticale del punto O rappresenta, pertanto, lo spigolo dell'angolo diedro in discussione.

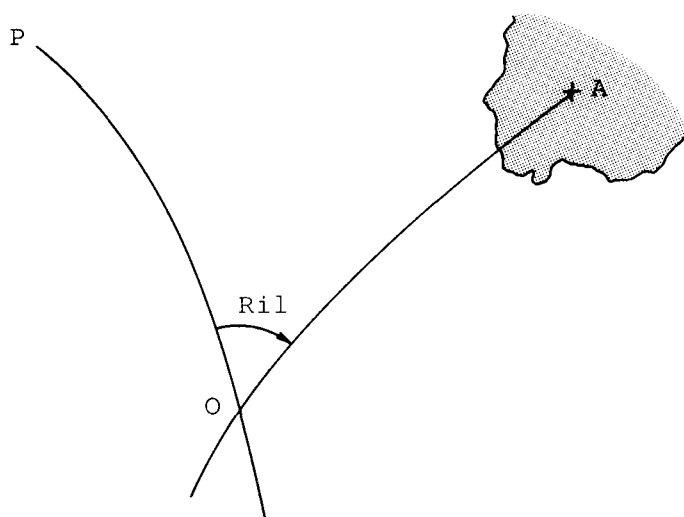


FIG. 4.1.

Poiché le intersezioni di questi due piani verticali con la superficie sferica terrestre determinano due circonferenze massime, il rilevamento può anche essere definito quale angolo sferico tra queste, contato, nel punto O , da 0° a 360° , dalla direzione nord della circonferenza massima

meridiana fino all'arco di circonferenza massima passante per il punto A , che può essere anche un astro. Quest'angolo sferico viene anche denominato *rilevamento ortodromico*.

Secondo che il piano meridiano è quello vero, magnetico o bussola, il rilevamento è detto *vero* (Ril_v), *magnetico* (Ril_m) o *bussola* (Ril_b).

Il rilevamento, se il punto A è a portata ottica, viene misurato con l'*apparato azimutale* che permette di individuare il piano verticale passante per esso, detto *piano di collimazione*.

L'apparato va applicato sulla cassa della bussola, che a sua volta fornisce il piano meridiano e quindi nell'orizzonte la *linea meridiana* (sulle navi la bussola normale e le ripetitrici della girobussola, site sulle alette del ponte di comando, sono munite di apparato azimutale).

Se oltre l'orizzonte, il punto A può essere rilevato col *radiogoniometro*, apparato radioricevente munito di antenna a telaio capace d'individuare la direzione di provenienza delle radioonde e quindi di definire il piano di collimazione di un trasmettitore di radiosegnali, denominato *radiofaro*.

L'angolo di rilevamento, letto alla bussola, va corretto per riferirlo al piano meridiano vero, mediante una delle seguenti relazioni algebriche:

$$\begin{aligned} Ril_v &= Ril_b + \delta + d \\ Ril_v &= Ril_b + \delta_G \end{aligned} \quad (4.1)$$

a seconda del tipo di bussola a disposizione, magnetica o giroscopica.

Nelle (4.1) δ e d indicano rispettivamente la deviazione e la declinazione magnetiche, δ_G rappresenta la deviazione della bussola giroscopica.

Occorre ora ricordare un altro rilevamento, quello *polare* (ρ), inteso quale angolo diedro tra il piano longitudinale del mobile e quello di collimazione, avente per spigolo la verticale del mobile, considerato quest'ultimo un semplice punto materiale. Quest'angolo, misurato col *grafometro*, può essere contato circolarmente da 0° a 360° , da prua verso dritta, o semicircularmente, da 0° a 180° , da prua verso dritta (positivo) e da prua verso sinistra (negativo).

I due rilevamenti testé ricordati sono legati dalle relazioni:

$$Ril_v = P_v + \rho \quad Ril_m = P_m + \rho \quad Ril_b = P_b + \rho \quad (4.2)$$

con P_b , P_m e P_v rispettivamente gli angoli di prua bussola, magnetica e vera.

Le relazioni (4.2) vanno evidentemente considerate algebriche se l'angolo ρ è contato semicircularmente.

Se la linea di riferimento del radiogoniometro è quella della prua, il rilevamento misurato è quello polare e la prima delle (4.2) permette di ottenere il corrispondente rilevamento riferito al meridiano della località.

Per la determinazione della posizione si presentano due possibilità: rilevare dal mobile punti noti oppure da questi rilevare il mobile.

Oltre al rilevamento, azimutale e polare, viene misurato, generalmente dal mobile, l'angolo diedro tra i piani verticali passanti per due noti punti, avente per spigolo la verticale del mobile, angolo che si identifica con quello sferico limitato, nel punto occupato dal mobile, dagli archi delle due circonferenze massime passanti per questo e per i due punti. Se uno di questi è il polo, l'angolo misurato non è altro che il rilevamento del secondo punto.

Dalla fig. 4.2, dove A e B rappresentano i due punti noti ed O l'osservatore (mobile), si nota che l'angolo in argomento, indicato con α , può essere ottenuto anche dalla differenza dei rilevamenti dei due punti, polari o azimutali.

Si può pertanto scrivere:

$$\alpha = \Delta \rho = \Delta \text{Ril} = \Delta a$$

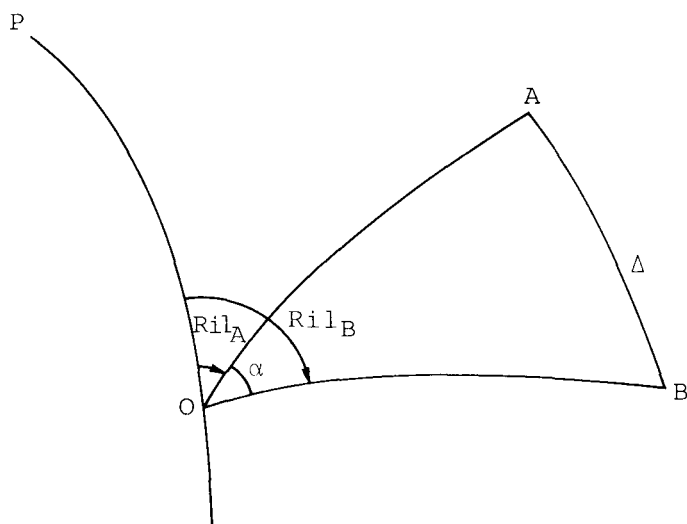


FIG. 4.2.

Di qui l'angolo α non contaminato da un eventuale errore sistematico presente sui due rilevamenti.

La misura diretta di α viene effettuata col sestante o col circolo Amici - Magnaghi, quest'ultimo in dotazione solamente su navi speciali, quali quelle idrografiche.

4.2 - LUOGO DI POSIZIONE QUANDO SI RILEVA DA UN PUNTO NON NOTO
(DA UN MOBILE, IN GENERALE)

Con la misura del rilevamento, riferito al meridiano vero, di un punto noto si ottiene quale luogo di posizione una curva, detta *curva di uguale rilevamento o di uguale azimuth* (più semplicemente *curva d'azimut* o *curva isoazimutale*): in tutti i suoi punti il rilevamento vero del punto considerato è costante.

È facile intuire che per due località simmetriche rispetto al punto noto i rilevamenti di tale punto sono angoli esplementari, cioè la loro somma è uguale a 360° : dal che la curva d'azimut si sviluppa tutta ad oriente od a ponente del meridiano del punto rilevato. Inoltre, ad un dato rilevamento corrispondono ben due curve d'azimut, una prende origine dal punto rilevato e l'altra dal suo antipodo.

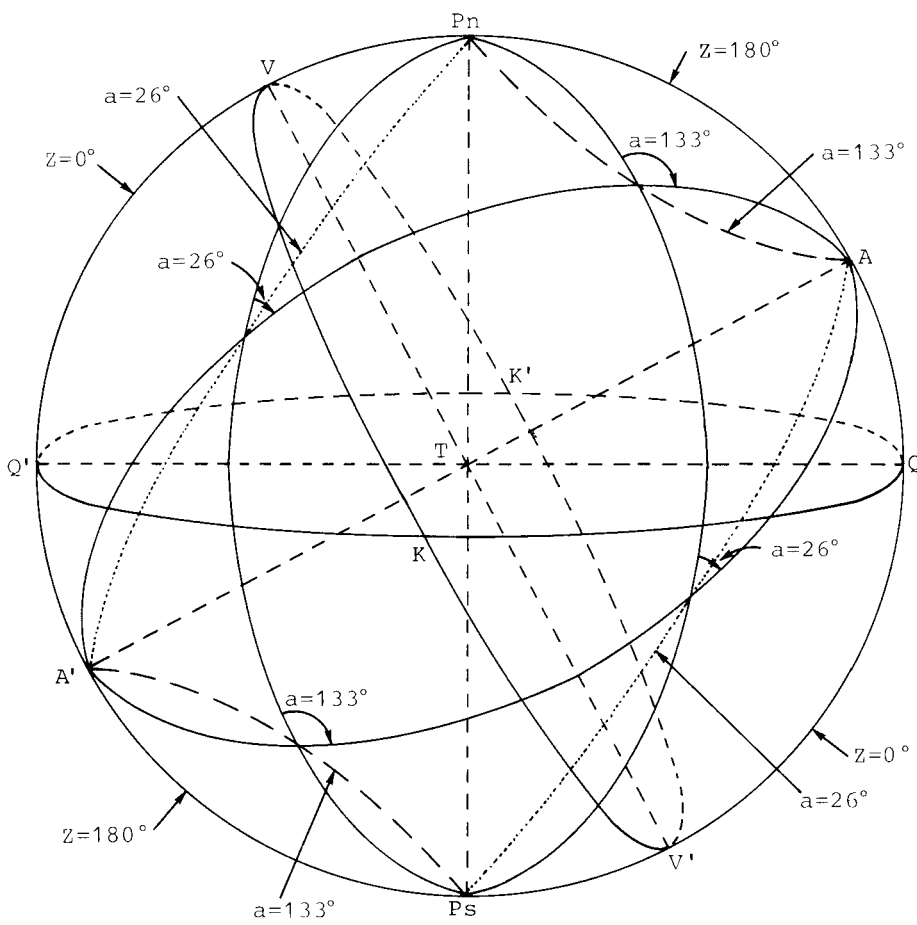


FIG. 4.3.

Considerando l'angolo azimutale al posto dell'azimut, da contare sempre a partire dal polo dell'emisfero del punto rilevato, se tale angolo azimutale è maggiore della colatitudine di tale punto, le due curve d'azimut interessano l'arco di meridiano sul quale Z è uguale a 180° ; se l'angolo azimutale è, invece, minore di detta colatitudine le due curve d'azimut interessano l'arco di meridiano sul quale Z è uguale a 0° .

In fig. 4.3, dove A rappresenta il punto rilevato di coordinate: $\varphi = 30^\circ \text{ N}$, $\lambda = 100^\circ \text{ E}$, le due curve d'azimut a tratti si riferiscono al rilevamento di 133° , mentre le altre due punteggiate al rilevamento di 26° . In pratica vengono considerate solamente quelle che contengono il punto rilevato.

Simmetricamente alle curve d'azimut disegnate, che si sviluppano nell'emisfero di polo K , vanno considerate nell'emisfero di polo K' le curve d'azimut relative agli azimut di 227° e di 334° .

Una rappresentazione approssimata di tali curve d'azimut sulla carta di Mercatore è fornita dalla fig. 4.4.

Al pari delle coniche sferiche, anche le curve d'azimut risultano da intersezione della sfera con cilindri ellittici opportunamente orientati.

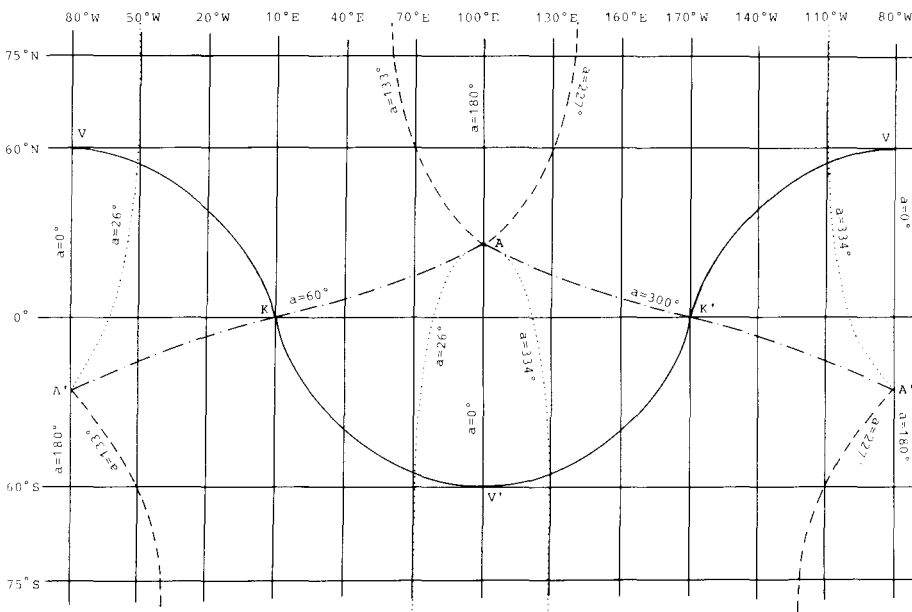


FIG. 4.4.

4.3 - EQUAZIONE DELLA CURVA D'AZIMUT

Sia O (fig. 4.5) un punto della curva d'azimut u che passa per il punto rilevato A .

Dal triangolo sferico AOP , con P il polo dell'emisfero del punto A , si ricava:

$$\operatorname{sen} \varphi_A = \operatorname{sen} \varphi \cos d + \cos \varphi \operatorname{sen} d \cos Z \quad (4.3)$$

relazione che può essere considerata quale equazione della curva d'azimut u , con φ_A e Z parametri costanti e φ e d variabili.

Per $d = 0$ la (4.3) diventa $\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \varphi_A$, per cui $\varphi = \varphi_A$: la curva d'azimut passa per il punto A . Appartenendo, poi, tale punto alla curva d'azimut, l'angolo in A tra il meridiano e la curva è uguale al rilevamento vero e ciò può essere dimostrato anche analiticamente tenendo presente la relazione (1.24).

Per $\varphi = 90^\circ$ la (4.3) si semplifica in $\cos d = \operatorname{sen} \varphi_A$, per cui $d = c_A = 90^\circ - \varphi_A$: la curva passa per il polo dell'emisfero di A .

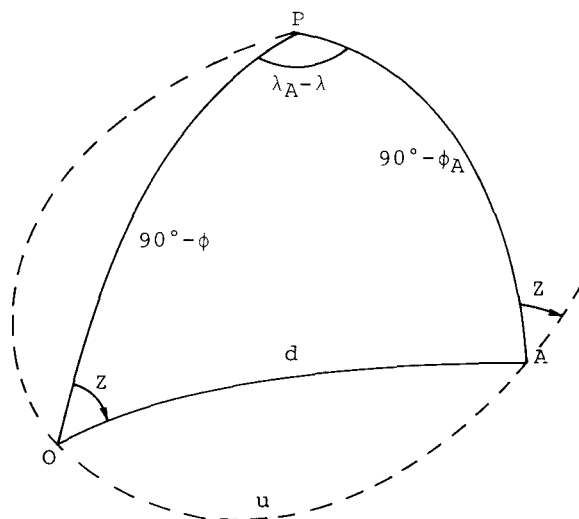


FIG. 4.5.

Volendo far comparire nell'equazione del luogo di posizione le coordinate variabili φ e λ , si applichi allo stesso triangolo sferico AOP la relazione di Vieta; si ottiene:

$$\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi = \operatorname{sen} \varphi \cos (\lambda_A - \lambda) + \operatorname{sen} (\lambda_A - \lambda) \operatorname{cotg} Z$$

che può essere scritta nel seguente modo, in conformità della (1.1a):

$$Z = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos(\lambda_A - \lambda)} \quad (4.4)$$

con Z , φ_A , λ_A costanti e φ , λ variabili.

4.4 - LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CURVA D'AZIMUT

Occorre per la linearizzazione ricavare le espressioni dei coefficienti l , h_1 e h_2 (1.11).

Il primo è dato da:

$$l = Z - Z_s$$

mentre per gli altri due, tenendo presente la (4.4), si procede nel seguente modo:

a) coefficiente h_1

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 Z_s} \cdot \\ &\cdot \frac{-\cos(\lambda_A - \lambda_s) [\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_s - \operatorname{sen} \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)] + \operatorname{sen} \varphi_s \operatorname{sen}^2(\lambda_A - \lambda_s)}{[\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_s - \operatorname{sen} \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)]^2} = \\ &= - \frac{\cos^2 Z_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)}{\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_s - \operatorname{sen} \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)} + \\ &+ \frac{\cos^2 Z_s \operatorname{sen} \varphi_s \operatorname{sen}^2(\lambda_A - \lambda_s)}{[\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_s - \operatorname{sen} \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)]^2} \end{aligned}$$

Sempre per la (4.4) i due termini al secondo membro diventano:

$$h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = - \frac{\cos(\lambda_A - \lambda_s) \operatorname{sen} Z_s \cos Z_s}{\operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda_s)} + \operatorname{sen} \varphi_s \operatorname{sen}^2 Z_s$$

Riducendo allo stesso denominatore e mettendo al numeratore in evidenza $\operatorname{sen} Z_s$, si ottiene:

$$h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = \frac{\operatorname{sen} Z_s [-\cos(\lambda_A - \lambda_s) \cos Z_s + \operatorname{sen} \varphi_s \operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda_s) \operatorname{sen} Z_s]}{\operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda_s)} \quad (4.5)$$

Dal triangolo sferico polo - posizione stimata - punto A (fig. 4.6), con polo P quello dell'emisfero del punto A , si ricava:

$$\cos \tau_s = -\cos(\lambda_A - \lambda_s) \cos Z_s + \sin \varphi_s \sin(\lambda_A - \lambda_s) \sin Z_s$$

$$\frac{\sin Z_s}{\sin(\lambda_A - \lambda_s)} = \frac{\cos \varphi_A}{\sin d_s} \quad \frac{\sin Z_s}{\sin \tau_s} = \frac{\cos \varphi_A}{\sin \varphi_s}$$

per cui la (4.5) può essere così scritta:

$$h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s = \frac{\cos \varphi_A \cos \tau_s}{\sin d_s} = \frac{\cos \varphi_s \sin Z_s \cotg \tau_s}{\sin d_s}$$

b) *coefficiente* h_2

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 Z_s} \cdot \frac{-\sin(\lambda_A - \lambda_s) [-\operatorname{tg} \varphi_A \sin \varphi_s - \cos \varphi_s \sin(\lambda_A - \lambda_s)]}{[\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)]^2}$$

Tenendo presente ancora la (4.4) e semplificando si ottiene:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = \frac{\sin^2 Z_s [\sin \varphi_A \sin \varphi_s + \cos \varphi_A \cos \varphi_s \cos(\lambda_A - \lambda_s)]}{\cos \varphi_A \sin(\lambda_A - \lambda_s)} \quad (4.6)$$

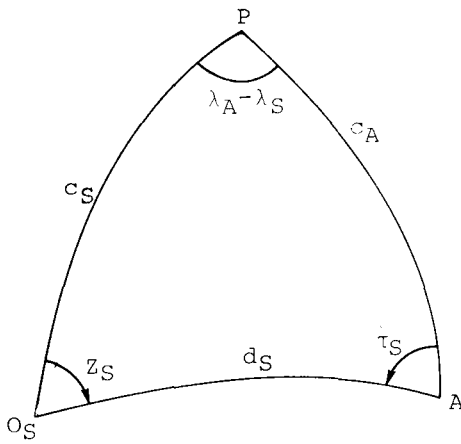


FIG. 4.6.

Dal triangolo di fig. 4.6 si nota che l'espressione in parentesi è uguale a $\cos d_s$, per cui la (4.6) diventa:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = \frac{\text{sen}^2 Z_s \cos d_s}{\cos \varphi_A \text{sen} (\lambda_A - \lambda_s)}$$

ed ancora:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = \frac{\text{sen} Z_s}{\text{tg} d_s}$$

L'equazione della retta di posizione sulla sfera, detta *retta d'azimut*, risulta pertanto espressa da:

$$Z - Z_s = \frac{\cos \varphi_A \cos \tau_s}{\text{sen} d_s} \delta \lambda + \frac{\text{sen} Z_s}{\text{tg} d_s} \delta \varphi \quad (4.7)$$

avendo considerato la prima espressione del coefficiente h_1 .

Sulla carta di Mercatore la retta d'azimut per la (1.20) risulta espressa dall'equazione:

$$Z - Z_s = \frac{\cos \varphi_A \cos \tau_s}{\text{sen} d_s} x + \frac{\text{sen} Z_s}{\text{tg} d_s} \cos \varphi_s y \quad (4.8)$$

Nelle due equazioni riportate Z_s indica l'angolo azimutale del punto rilevato A relativo alla posizione stimata, d_s la distanza tra questa posizione ed il punto A , τ_s l'angolo azimutale del punto stimato rispetto al punto A , entità tutte da calcolare considerando il triangolo sferico di fig. 4.6.

4.5 - SEMIRETTA DI RILEVAMENTO

In navigazione costiera, essendo il mobile (osservatore) nelle prossimità del punto rilevato A , l'equazione (4.8) può essere riferita ad un sistema di assi cartesiani con l'origine proprio nel punto A e coincidenti con le linee coordinate di questo. In tal caso:

$$Z_s = Z; \quad d_s = 0; \quad \varphi_s = \varphi_A; \quad \tau_s = 180^\circ - Z$$

per cui la (4.8) diventa:

$$y = \cotg Z x \quad (4.9)$$

equazione di una retta passante per l'origine degli assi e di coefficiente angolare:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} Z = \operatorname{tg} (90^\circ - Z)$$

onde:

$$\alpha = 90^\circ - Z$$

Dalla fig. 4.7 si nota che soltanto la semiretta Aa è luogo di posizione, orientata rispetto al meridiano del punto A dell'angolo $180^\circ + Z$, e ciò anche per quanto accennato circa la curva d'azimut nel paragrafo 4.2.

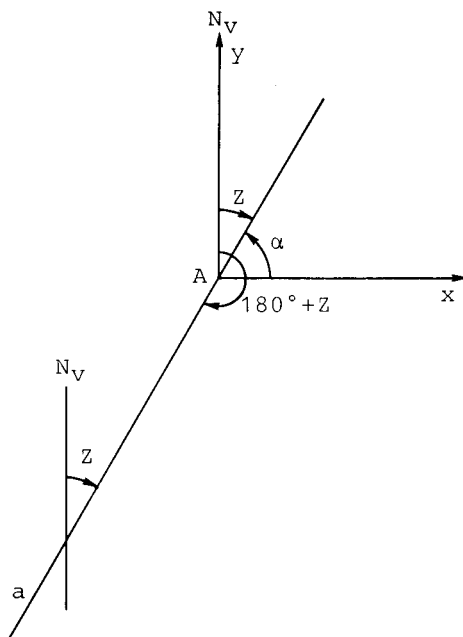


FIG. 4.7.

Tale semiretta prende il nome di *semiretta di rilevamento*, anch'essa una retta d'azimut per il caso particolare considerato.

Se al posto dell'angolo azimutale si considera il rilevamento, la semiretta di rilevamento risulta orientata rispetto al meridiano del punto rilevato di un angolo uguale a $\text{Ril}_v + 180^\circ$ se $\text{Ril}_v < 180^\circ$, oppure uguale a $\text{Ril}_v - 180^\circ$ se $\text{Ril}_v > 180^\circ$.

Semplificando, la retta espressa dall'equazione (4.9) non è altro che l'intersezione del piano verticale di collimazione, materializzato dall'apparato azimutale, col piano tangente alla terra nel punto rilevato.

4.6 - INCERTEZZA DELLA CURVA D'AZIMUT E DELLA SEMIRETTA DI RILEVAMENTO

Ricordando le espressioni dei coefficienti h_1 e h_2 ricavati nel paragrafo 4.4, si hanno i seguenti coseni direttori della direzione del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\text{sen } Z}{\text{tg } d} ; \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = \frac{\text{sen } Z \cotg \tau}{\text{sen } d}$$

con d la distanza tra il punto in cui si desidera l'incertezza e quello rilevato, Z e τ gli angoli azimutali del punto rilevato rispetto a quello relativo all'incertezza e viceversa (vedi fig. 4.6 dove al posto di O , va considerato il punto in cui si considera il gradiente).

Sostituendo queste espressioni nella (1.18a) ed indicando con $\pm \delta Z$ l'errore sul rilevamento, si ha:

$$\delta s = \pm [\cos^2 d + \cotg^2 \tau]^{-1/2} \text{cosec } Z \text{sen } d \delta Z \quad (4.10)$$

Considerando un errore di $\delta Z = \pm 1^\circ$, l'incertezza data dalla (4.10) ed espressa in miglia può essere rilevata dai grafici di fig. 4.8 e 4.9; la prima si riferisce ad un rilevamento misurato di 20° , la seconda ad un rilevamento di 90° . Lieve risulta l'influenza della latitudine, al contrario di quella della distanza dal punto rilevato.

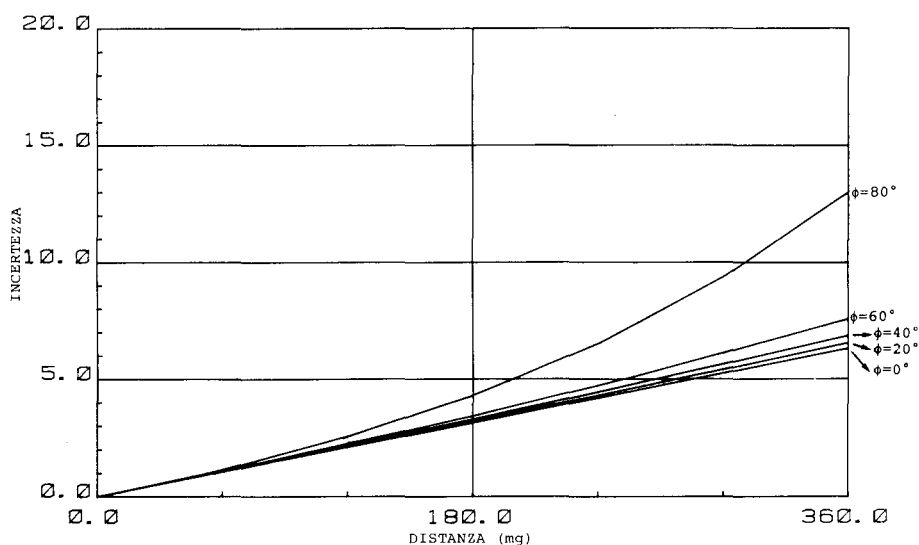


FIG. 4.8.

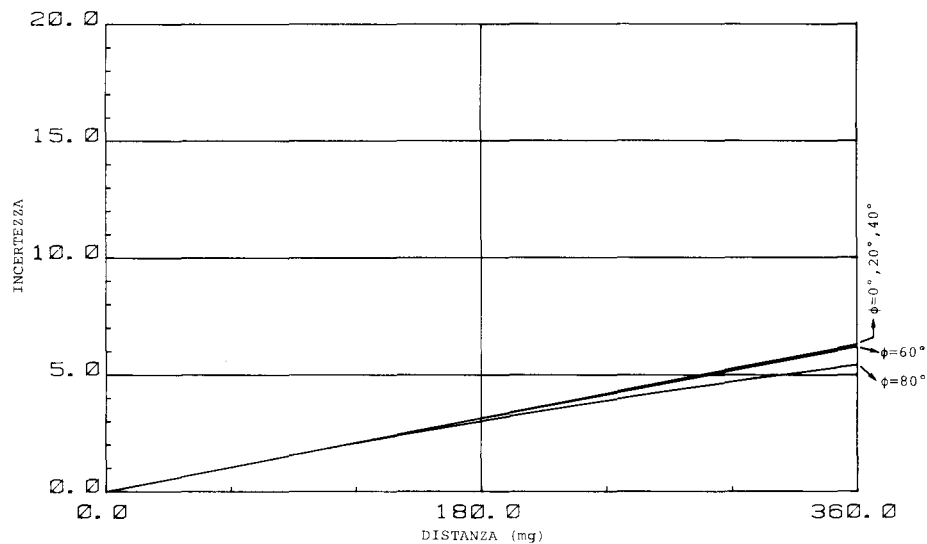


FIG. 4.9.

Per piccole distanze (caso della navigazione costiera) può porsi:

$$\cos d = 1 \quad \text{sen } d = d \quad \tau = 180^\circ - Z$$

per cui la (4.10) diventa:

$$\delta s = \pm d \delta Z \tag{4.11}$$

incertezza, questa, della semiretta di rilevamento, luogo di posizione, come già osservato, ottenuto dalla linearizzazione della curva d'azimut nell'intorno del punto rilevato.

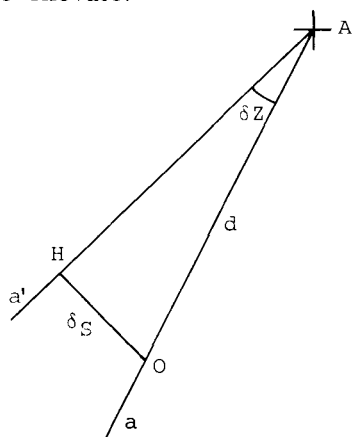


FIG. 4.10.

Si può facilmente ottenere la (4.11) considerando la fig. 4.10, dove Aa' rappresenta la semiretta di rilevamento errata ed Aa quella esatta. Per il punto O , alla distanza d dal punto rilevato A , si ha dal triangolo rettangolo OHA :

$$\delta s = \pm d \operatorname{sen} \delta Z = \pm d \delta Z$$

4.7 - LUOGO DI POSIZIONE QUANDO SI RILEVA DA UN PUNTO NOTO.
EQUAZIONE

Nel caso che si rilevi un mobile da un punto noto il luogo di posizione è rappresentato dall'arco di circonferenza massima uscente dal punto ed inclinato sul meridiano di questo di un angolo pari al rilevamento misurato o del rispettivo angolo azimutale, assumendo per polo quello dell'emisfero del punto noto.

In fig. 4.11 il luogo di posizione è rappresentato dall'arco di circonferenza massima u ; da tutti i suoi punti si viene rilevato dal punto A secondo lo stesso angolo di rilevamento.

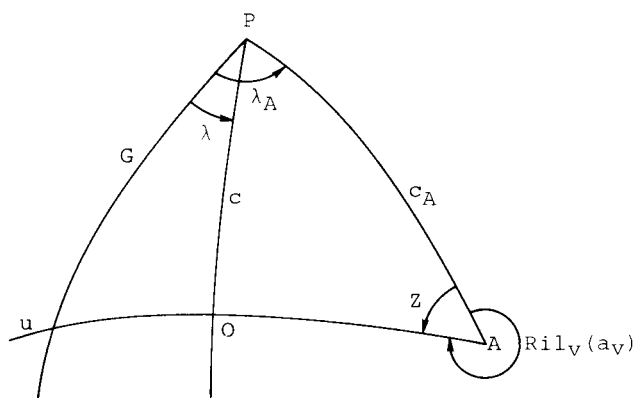


FIG. 4.11.

Considerando l'osservatore in O , l'equazione del luogo di posizione viene ricavata dal triangolo sferico $AP O$, con P il polo dell'emisfero del punto noto A .

Applicando la relazione di Vieta, si ottiene:

$$\operatorname{tg} Z = \frac{\operatorname{sen} (\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_A - \operatorname{sen} \varphi_A \cos (\lambda_A - \lambda)}$$

che può scriversi:

$$Z = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_A - \operatorname{sen} \varphi_A \cos(\lambda_A - \lambda)} \quad (4.12)$$

con Z , φ_A , λ_A costanti e φ , λ variabili.

La (4.12) è simile alla (4.4).

4.8 - LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA MASSIMA

Per la linearizzazione va tenuto presente il triangolo sferico O_sPA , con polo quello dell'emisfero del punto A (fig. 4.12).

Si omette la dimostrazione per ottenere il coefficiente h_1 (1.11), perché identica a quella seguita nel par. 4.4 per la determinazione dello stesso nel caso della curva d'azimut: basta scambiare φ_A con φ_s , per cui si ha:

$$h_1 = \frac{\cos \varphi_s \cos \tau_s}{\operatorname{sen} d_s}$$

Per il coefficiente h_2 , tenendo presente la (4.12), si ottiene:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 Z_s} \cdot \frac{-\cos \varphi_A \operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda_s)}{\cos^2 \varphi_s [\operatorname{tg} \varphi_s \cos \varphi_A - \operatorname{sen} \varphi_A \cos(\lambda_A - \lambda_s)]^2}$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro per $\operatorname{sen}^2(\lambda_A - \lambda_s)$ si perviene, in virtù sempre della (4.12), a:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_s = - \frac{\operatorname{sen}^2 Z_s \cos \varphi_A}{\operatorname{sen}(\lambda_A - \lambda_s) \cos^2 \varphi_s}$$

ed infine, per la relazione dei seni applicata due volte al triangolo sferico O_sPA , si giunge a:

$$h_2 = - \frac{\operatorname{sen} \tau_s}{\operatorname{sen} d_s}$$

Essendo poi $l = Z - Z_s$, la linearizzazione della (4.12) risulta così espressa:

$$Z - Z_s = \frac{\cos \varphi_s \cos \tau_s}{\operatorname{sen} d_s} \delta \lambda - \frac{\operatorname{sen} \tau_s}{\operatorname{sen} d_s} \delta \varphi \quad (4.13)$$

relazione che esprime l'equazione della *retta ortodromica* sulla sfera.

Sulla carta di Mercatore tale retta, per la (1.20), risulta espressa dall'equazione:

$$Z - Z_s = \frac{\cos \varphi_s \cos \tau_s}{\sin d_s} x - \frac{\sin \tau_s \cos \varphi_s}{\sin d_s} y$$

che può essere così scritta:

$$\cos \varphi_s \cos \tau_s x - \cos \varphi_s \sin \tau_s y - (Z - Z_s) \sin d_s = 0 \quad (4.14)$$

τ_s rappresenta l'angolo azimutale del punto noto A rispetto a quello stimato, d_s la distanza tra questi due punti.

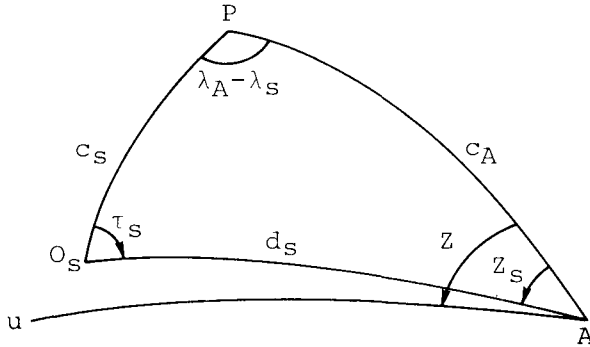


FIG. 4.12.

Trovandosi l'osservatore a breve distanza dal punto A , punto dal quale viene rilevato, a seguito di ragionamento pari a quello fatto nel par. 4.5, la (4.14) diventa:

$$y = - \cotg Z x \quad (4.15)$$

equazione di una retta passante per il punto A , origine degli assi cartesiani. Di tale retta interessa solamente quella parte che si sviluppa secondo la direzione azimutale, una *semiretta di rilevamento*, inclinata sul meridiano del punto noto di un angolo uguale al rilevamento misurato.

4.9 - INCERTEZZA DELLA CURVA ORTODROMICA E DELLA SEMIRETTA DI RILEVAMENTO

Essendo:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = - \frac{\sin \tau}{\sin d} \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = \frac{\cos \tau}{\sin d}$$

per quanto operato in occasione della linearizzazione della curva ortodromica, la (1.18a), per la presenza dell'errore $\pm \delta Z$, diventa:

$$\delta s = \pm \operatorname{sen} d \delta Z \quad (4.16)$$

Alla (4.16) si può pervenire considerando la fig. 4.13, nella quale u ed u_e rappresentano rispettivamente il luogo esatto e quello errato. Per ottenere l'incertezza nel punto O , dal triangolo sferico rettangolo OAH si ottiene:

$$\operatorname{sen} \delta s = \operatorname{sen} d \operatorname{sen} \delta Z$$

relazione che si identifica con la (4.16) per la piccolezza di δZ e di δs .

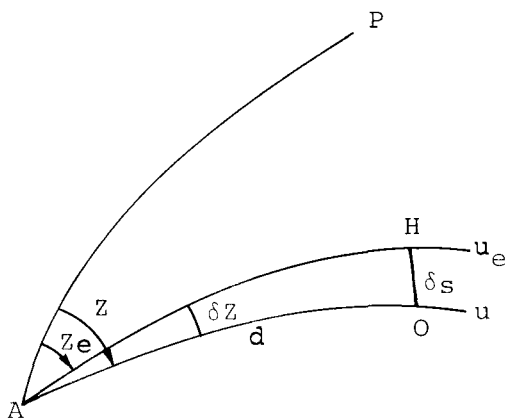


FIG. 4.13.

Considerando, poi, piccola anche la distanza d , la (4.16) diventa:

$$\delta s = \pm d \delta Z$$

identica alla (4.11).

Uguale l'espressione dell'incertezza della semiretta di rilevamento, sia che si rilevi il punto A sia che si venga rilevato da tale punto.

A parità di errore di misura, l'incertezza aumenta con la distanza. Per un errore $\pm 1^\circ$ sul rilevamento si ottiene $\delta s \approx \pm 1/10$ di miglio (≈ 185 metri) se la distanza dal punto noto è di miglia 6.

4.10 - CORREZIONE DI GIVRY

In fig. 4.14 l'osservatore O viene rilevato dal punto noto A , in fig. 4.15 è il punto A che viene rilevato dall'osservatore O .

In entrambi i casi, noto l'angolo γ , è possibile individuare la lossodromia (curva tratteggiata) che passa per i punti A ed O ; tale angolo va, pertanto, considerato quale correzione da apportare al rilevamento ortodromico (Ril_v) per ottenere quello lossodromico (Ril_l).

Orbene, l'arco lossodromico Aa è luogo di posizione soltanto per l'osservatore posto nel punto O ; esso forma col meridiano del punto A un angolo uguale al rilevamento lossodromico nel caso della fig. 4.14 ed uguale al rilevamento lossodromico opposto ($Ril_{l_{opp}} = Ril_l \pm 180^\circ$) nel caso della fig. 4.15: di qui il suo semplice tracciamento sulla carta di Mercatore (una *semiretta di rilevamento*).

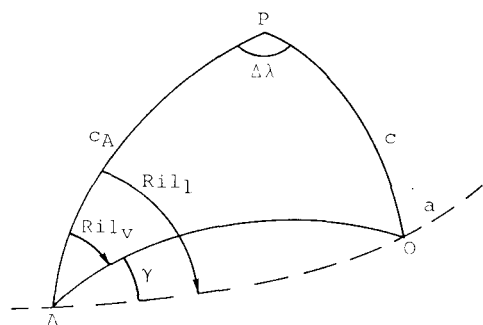


FIG. 4.14.

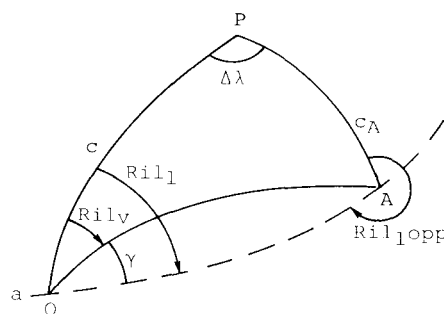


FIG. 4.15.

L'angolo γ è noto quale *correzione di Givry* in quanto fu proprio l'idrografo francese Givry a trovarne l'espressione a seguito di un geniale ragionamento. Fornì il Givry la seguente relazione che permette di ottenere γ in funzione del rilevamento ortodromico misurato, della latitudine della località in cui si rileva e della differenza di longitudine tra i due punti A ed O :

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{sen} \varphi - \frac{\Delta \lambda^2}{12} \operatorname{cotg} \operatorname{Ril}_v (1 - 3 \cos^2 \varphi) + \\ & + \frac{\Delta \lambda^3}{24} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cotg}^2 \operatorname{Ril}_v (1 - 6 \cos^2 \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

una serie, come ben si nota, con arresto al termine di terzo ordine in $\Delta \lambda$.

Da considerazioni sulle rappresentazioni delle due citate figure sulla carta di Mercatore, per distanze tra l'osservatore O ed il punto A non superiori alle 300 mg, si ottiene per γ la seguente relazione:

$$\gamma = \frac{\Delta \lambda}{2} \operatorname{sen} \varphi_m \quad (4.18)$$

con $\Delta \lambda$ e φ_m da calcolare tra le coordinate dei due punti A ed O , espressione, questa, che si identifica pressappoco col primo termine della (4.17).

Facile dedurre il segno della correzione in oggetto, tenendo presente che sulla carta di Mercatore una circonferenza massima (un'ortodromia) rivolge la sua concavità sempre verso l'equatore: nell'emisfero nord è positiva se il punto rilevato è ad est di quello dal quale si rileva, negativa se ad ovest; al contrario nell'emisfero sud.

Quanto fin qui esposto sembra del tutto superfluo in quanto viene considerata nota la posizione dell'osservatore O . In effetti è tale posizione che si vuole determinare, conoscendo di questo la posizione stimata. La correzione viene allora calcolata rispetto al punto noto A ed a quello stimato dell'osservatore e la semiretta di rilevamento che verrà tracciata può ancora essere considerata luogo di posizione per l'osservatore O .

Non sfugge l'osservazione che una tale semiretta non è altro che il miglioramento di quella considerata nei paragrafi 4.5 e 4.9.

Il suo tracciamento viene in pratica effettuato quando il mobile viene rilevato da una stazione radiogoniometrica fissa o quando dal mobile si rileva col radiogoniometro un noto radiofaro. Nel primo caso è il mobile che funge da radiofaro.

Essendo le portate dei radiofari molto modeste (inferiori alle 200 mg) è ben giustificata la risoluzione della (4.18) per ottenere la correzione γ . Ed è per questo che di tale formula vengono date risoluzioni grafiche e tavolari (vedi, ad esempio, delle Tavole Nautiche dell'Istituto Idrografico della Marina quella relativa alla suddetta correzione).

4.11 - LUOGO DI POSIZIONE PER ANGOLI SOTTESI A DUE PUNTI NOTI. EQUAZIONE E SUA LINEARIZZAZIONE

Il luogo di posizione relativo all'angolo misurato tra le direzioni a due noti punti della costa (angolo indicato con la lettera α nel par. 4.1) è una curva, detta *curva di uguale differenza di rilevamenti* o *di azimuth*; da ogni suo punto si misura lo stesso angolo tra le direzioni ai due punti noti.

La curva passa per l'osservatore e per i due punti. Rispetto a questi, in verità, si sviluppano due curve di uguale differenza di azimuth, simmetriche rispetto alla circonferenza massima passante per essi; va considerata solamente quella che passa per l'osservatore. Se uno dei due punti coincide col polo la curva degenera nella curva d'azimut.

In fig. 4.16, dove A e B rappresentano i due punti alla distanza Δ , la curva di uguale differenza d'azimut è segnata con tratteggio, curva u .

Si consideri su questa il punto generico O ; dal triangolo sferico AOB si ricava:

$$\cos \Delta = \cos d_A \cos d_B + \sin d_A \sin d_B \cos \alpha \quad (4.19)$$

relazione che rappresenta l'equazione della curva in argomento, con Δ ed α costanti e d_A e d_B variabili (distanze di P dai due punti).

Se $d_A = 0$ risulta $\cos d_B = \cos \Delta$ e quindi $d_B = \Delta$: la curva passa per il punto A . Analogamente, se $d_B = 0$ risulta $\cos d_A = \cos \Delta$ e quindi $d_A = \Delta$: la curva passa per il punto B .

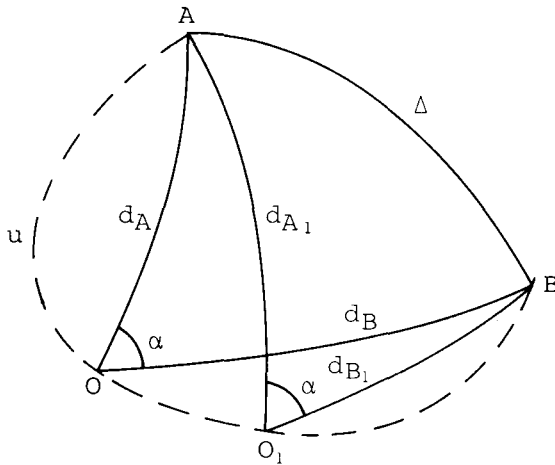


FIG. 4.16.

Poiché l'angolo α è uguale alla differenza dei rilevamenti dei due punti noti rispetto al punto generico O ($\alpha = Z_A - Z_B$), si può considerare per equazione del luogo di posizione, al posto della (4.19), la seguente espressione, tenendo presente la (4.4):

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen} (\lambda_A - \lambda)}{\operatorname{tg} \varphi_A \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos (\lambda_A - \lambda)} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\operatorname{sen} (\lambda_B - \lambda)}{\operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos (\lambda_B - \lambda)} \quad (4.20)$$

Nella (4.20) α , φ_A e λ_A , φ_B e λ_B sono parametri costanti, mentre φ e λ parametri variabili.

Di conseguenza, ricordando i coefficienti h_1 e h_2 della (4.7), la linearizzazione della (4.20) porta alla seguente equazione della retta di posizione sulla sfera terrestre, *retta di uguale differenza d'azimut*:

$$\alpha - \alpha_s = \left(\frac{\cos \varphi_A \cos \tau_{As}}{\operatorname{sen} d_{As}} - \frac{\cos \varphi_B \cos \tau_{Bs}}{\operatorname{sen} d_{Bs}} \right) \delta \lambda + \left(\frac{\operatorname{sen} Z_{As}}{\operatorname{tg} d_{As}} - \frac{\operatorname{sen} Z_{Bs}}{\operatorname{tg} d_{Bs}} \right) \delta \varphi \quad (4.21)$$

con α_s l'angolo sotteso tra la posizione stimata dell'osservatore ed i due punti noti; tutte le altre grandezze sono già note (fig. 4.17).

Riesce oltremodo semplice scrivere le equazioni di tale retta di posizione sul piano nautico e sulla carta di Mercatore.

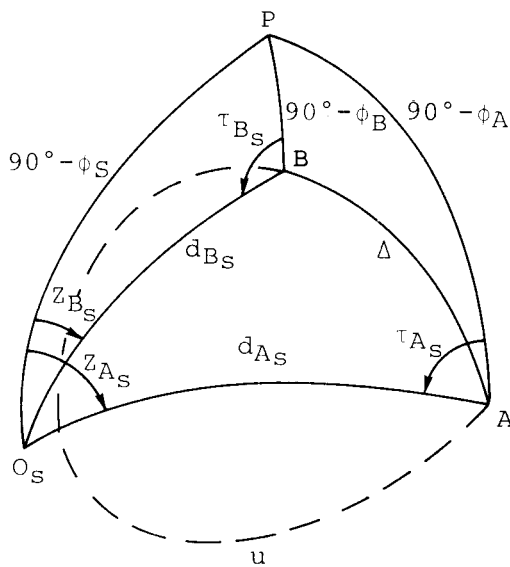


FIG. 4.17.

Per il luogo di posizione in argomento si presentano due casi particolari:

$Z_A = Z_B$ ($\alpha = 0^\circ$) e $Z_A = 180^\circ + Z_B$ o $Z_B = 180^\circ + Z_A$ ($\alpha = 180^\circ$), intendendo per Z_A e Z_B i corrispondenti azimut dei due punti.

La (4.20) si semplifica in:

$$\operatorname{tg} \varphi_A \operatorname{sen} (\lambda_B - \lambda) - \operatorname{tg} \varphi_B \operatorname{sen} (\lambda_A - \lambda) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} (\lambda_B - \lambda_A) \quad (4.22)$$

equazione della circonferenza massima passante per i due punti A e B , meglio di un arco di tale circonferenza che prende il nome di *allineamento esterno* per $\alpha = 0^\circ$ (fig. 4.18), *interno* per $\alpha = 180^\circ$ (fig. 4.19).

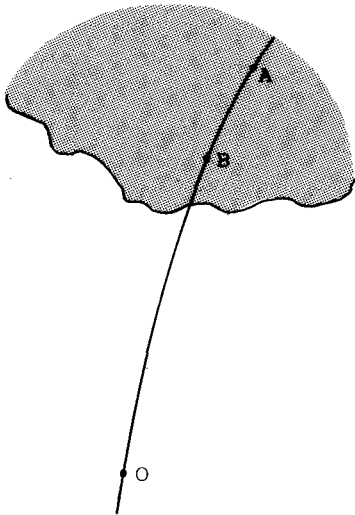


FIG. 4.18.

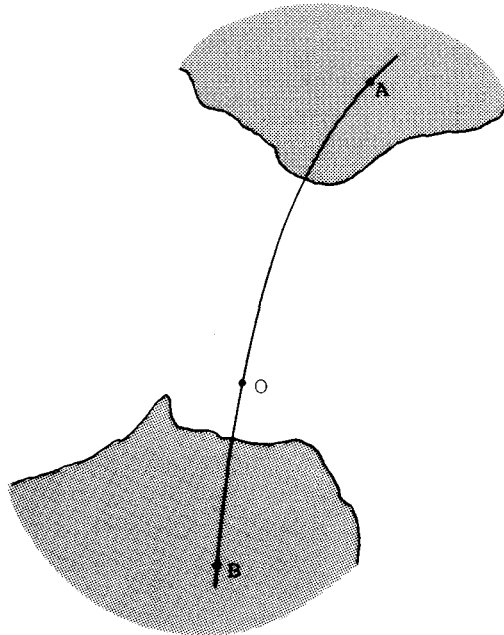


FIG. 4.19.

4.12 - CURVA DI UGUALE DIFFERENZA D'AZIMUT PER PICCOLE DISTANZE

Se le distanze d_A , d_B e Δ (quest'ultima detta *base*) sono piccole, caso della navigazione costiera, sviluppando nella (4.19) in serie $\cos \Delta$, $\cos d_A$, $\cos d_B$, $\sin d_A$, $\sin d_B$ fino ai termini del secondo ordine, si ottiene:

$$1 - \frac{\Delta^2}{2} = \left(1 - \frac{d_A^2}{2}\right) \left(1 - \frac{d_B^2}{2}\right) + d_A d_B \cos \alpha$$

Moltiplicando, semplificando e trascurando infine il termine di quarto ordine, si ricava:

$$\Delta^2 = d_A^2 + d_B^2 - 2 d_A d_B \cos \alpha \quad (4.23)$$

relazione che rappresenta l'applicazione della formula di Carnot al triangolo piano AOB di fig. 4.16. Dal che può considerarsi piano l'intorno

della base e di conseguenza circolare la curva di uguale differenza d'azimut u .

Il termine di quarto ordine trascurato, espresso da:

$$\frac{d_A^2 d_B^2}{2}$$

raggiunge il valore $4,5 \cdot 10^{-8}$ rad per $d_A = d_B = 60$ miglia.

Analogo andamento circolare sarà conservato sul piano nautico e sulla carta di Mercatore.

Per il tracciamento di tale arco di circonferenza, noto quale *arco circolare capace* o *segmento circolare capace*, occorre determinarne il centro.

Vanno considerati due casi: $\alpha < 90^\circ$ ed $\alpha > 90^\circ$.

Nel primo caso ($\alpha < 90^\circ$) si traccino da A e da B (fig. 4.20) le due semirette Aa e Bb inclinate sulla base dell'angolo $90^\circ - \alpha$ dalla parte dell'osservatore: il centro C è definito dal loro punto d'incontro.

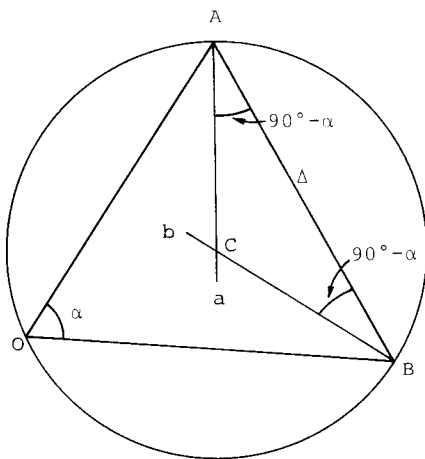


FIG. 4.20.

Nel secondo caso ($\alpha > 90^\circ$) le semirette Aa e Bb vanno tracciate dalla parte opposta a quella dell'osservatore (fig. 4.21), inclinate sulla base dell'angolo $\alpha - 90^\circ$: il loro incontro determina il centro del luogo di posizione.

Risulta immediato verificare per i due casi analizzati che l'osservatore si trova in uno dei punti dell'arco di circonferenza AOB .

Il centro può essere anche ottenuto dall'incontro di una delle due semirette con l'asse del segmento AB (base).

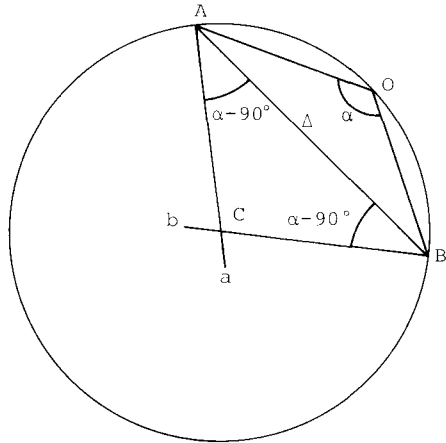


FIG. 4.21.

La (4.23) si semplifica in $\Delta = d_A - d_B$ per $\alpha = 0^\circ$ ed in $\Delta = d_A + d_B$ per $\alpha = 180^\circ$; l'arco di circonferenza capace diventa rettilineo, sia sul piano tangente alla superficie terrestre in un punto dell'intorno della base che sul piano nautico e sulla carta di Mercatore, conservando ancora la denominazione di *allineamento, esterno e interno* (figg. 4.22 e 4.23).

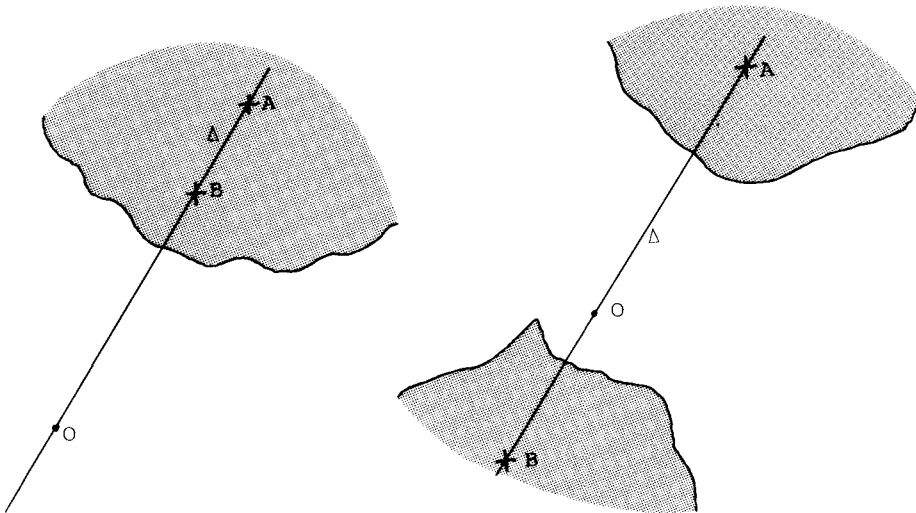


FIG. 4.22.

FIG. 4.23.

L'andamento rettilineo dell'allineamento sulla carta di Mercatore si può anche giustificare considerando l'arco di circonferenza massima passante per i due punti confuso con quello di lossodromia passante per gli stessi.

4.13 - INCERTEZZA

Immedie le espressioni dei coseni direttori della direzione del gradiente nel caso della curva di uguale differenza d'azimut, se si tengono presenti quelle dei coefficienti h_1 e h_2 relativi alla linearizzazione della curva d'azimut (par. 4.4).

Tali espressioni sono:

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\text{sen } Z_A}{\text{tg } d_A} - \frac{\text{sen } Z_B}{\text{tg } d_B}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} = \frac{\text{sen } Z_A \cotg \tau_A}{\text{sen } d_A} - \frac{\text{sen } Z_B \cotg \tau_B}{\text{sen } d_B}$$

i cui simboli sono ben noti (vedi fig. 4.17) dove al posto di O_s occorre considerare il punto in cui si considera il gradiente.

La (1.18a) per l'errore $\pm \delta \alpha$ risulta:

$$\delta s = \pm [(\text{sen } Z_A \cos d_A \text{sen } d_B - \text{sen } Z_B \cos d_B \text{sen } d_A)^2 +$$

$$+ (\text{sen } Z_A \cotg \tau_A \text{sen } d_B - \text{sen } Z_B \cotg \tau_B \text{sen } d_A)^2]^{-1/2} \text{sen } d_A \text{sen } d_B \delta \alpha \quad (4.24)$$

espressione, questa, dell'incertezza della curva di uguale differenza d'azimut.

Per piccole distanze può ritenersi:

$$\begin{array}{lll} \text{sen } d_A = d_A & \text{sen } d_B = d_B & \tau_A = 180^\circ - Z_A \\ \cos d_A = 1 & \cos d_B = 1 & \tau_B = 180^\circ - Z_B \end{array}$$

per cui la (4.24) diventa:

$$\delta s = \pm [(d_B \text{sen } Z_A - d_A \text{sen } Z_B)^2 + (d_A \cos Z_B - d_B \cos Z_A)^2]^{-1/2} d_A d_B \delta \alpha$$

ed essendo l'espressione in parentesi quadra uguale al quadrato della distanza Δ tra i due punti noti A e B , come può notarsi in fig. 4.24, si ha in definitiva:

$$\delta s = \pm \frac{1}{\Delta} d_A d_B \delta \alpha \quad (4.25)$$

incertezza dell'arco di circonferenza capace.

L'area del triangolo AOB di fig. 4.24, considerando come base una volta Δ ed una seconda d_A , risulta dalle relazioni:

$$\frac{1}{2} \Delta h = \frac{1}{2} d_A d_B \sin \alpha$$

con h l'altezza rispetto alla base Δ .

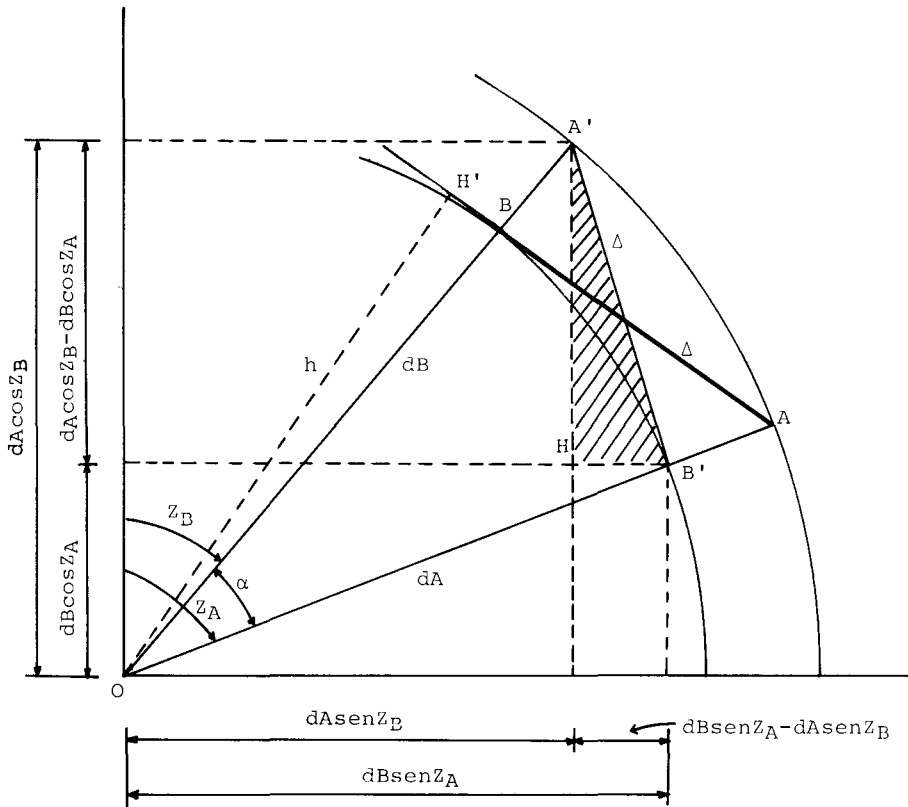


FIG. 4.24.

Dall'uguaglianza si ottiene una seconda espressione dell'incertezza:

$$\delta s = \pm \frac{h}{\sin \alpha} \delta \alpha \quad (4.26)$$

Indicando, poi, con m ed n i rapporti rispetto alla base rispettivamente della somma e della differenza delle due distanze del mobile (osservatore) dai punti A e B (con d_A la distanza maggiore):

$$m = \frac{d_A + d_B}{\Delta} \quad n = \frac{d_A - d_B}{\Delta}$$

si ottiene:

$$d_A = \frac{m + n}{2} \Delta \quad d_B = \frac{m - n}{2} \Delta$$

per cui la (4.25) si trasforma in:

$$\delta s = \pm \frac{1}{4} (m^2 - n^2) \Delta \delta a \quad (4.27)$$

Il rapporto m può variare tra 1 e ∞ , n varia tra 0 e 1; pertanto, considerando $n = 0$, la (4.27) si semplifica in:

$$\delta s = \pm \frac{1}{2} m^2 \Delta \delta \alpha \quad (4.28)$$

Come già detto alla fine del par. 4.1, $\delta \alpha = 0$ se c'è solamente presenza di un errore sistematico sulle misure dei due rilevamenti, per cui il luogo di posizione che viene tracciato è esente da incertezza.

La fig. 4.25 contempla proprio tale caso sulla carta nautica: l'arco di circonferenza capace u si riferisce all'angolo α sotteso ai due noti punti A e B , ottenuto quest'ultimo dalla differenza dei rilevamenti dei detti punti, rilevamenti considerati entrambi affetti dall'errore sistematico ε_s .

Le semirette di rilevamento errate, relative agli angoli misurati, segnate in figura con linee continue, localizzano su u la posizione errata dell'osservatore nel punto O_e ; le semirette esatte, segnate con tratteggio, localizzano, sempre sul luogo u , la posizione esatta nei punti O_1 ed O_2 a seconda del segno di ε_s .

Si nota che la tangente t all'arco capace u nel punto O_e si confonde proprio col tratto d'arco sul quale si trova la posizione esatta dell'osservatore: un nuovo luogo di posizione, denominato per l'appunto *tangente di posizione*.

Facile il suo tracciamento nel punto di incontro delle due semirette di rilevamento errate, come ben indica la citata fig. 4.25.

In conclusione, con due rilevamenti affetti dallo stesso errore sistematico e misurati quasi nello stesso istante può essere tracciato un luogo di posizione rettilineo esente da tale errore, la tangente di posizione.

Sempre per piccole distanze, se $Z_A = Z_B$ ($\alpha = 0^\circ$, caso dell'allineamento esterno), essendo $d_A = d_B + \Delta$, risulta:

$$m = \frac{2 d_B + \Delta}{\Delta} \quad n = 1$$

e la (4.27) diventa:

$$\delta s = \pm d_B \left(\frac{d_B}{\Delta} + 1 \right) \delta \alpha \quad (4.29)$$

Se, poi, $Z_A = 180^\circ + Z_B$ ($\alpha = 180^\circ$, caso dell'allineamento interno), essendo $m = 1$, la (4.27) assume l'espressione:

$$\delta s = \pm \frac{1}{4} (1 - n^2) \Delta \delta \alpha \quad (4.30)$$

suscettibile di ulteriore trasformazione a guisa della (4.29).

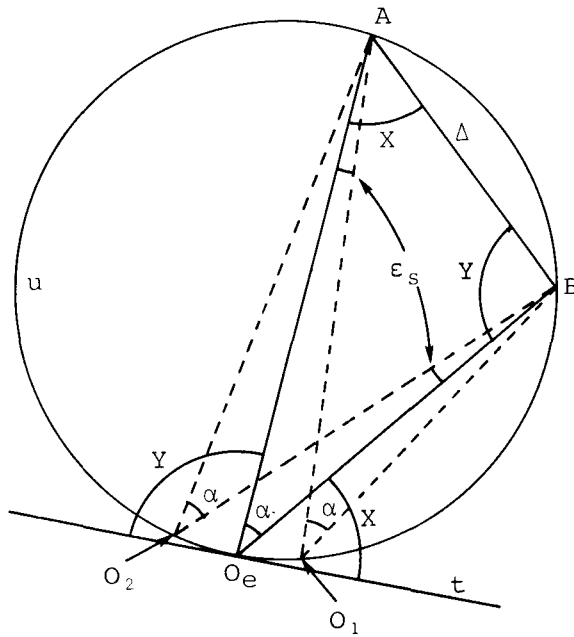


FIG. 4.25.

L'incertezza dell'arco di circonferenza capace, per un dato errore sull'angolo α , diminuisce con l'avvicinarsi ad uno dei due punti rispetto ai quali è stata effettuata la misura. Detta incertezza, per un errore di misura compreso tra $\pm 1^\circ$ e $\pm 5^\circ$, viene fornita dai grafici di fig. 4.26 e 4.27; mentre quelli di fig. 4.26 sono stati costruiti con rapporto $d_A/\Delta = 1$, quelli di fig. 4.27 con rapporto di $d_A/\Delta = 1.5$, con d_A la distanza del mobile da uno di essi.

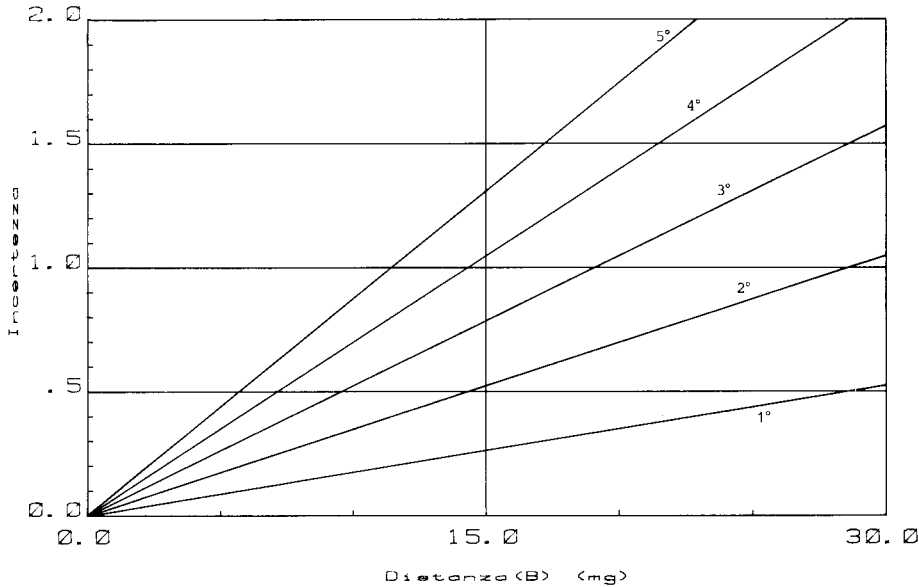


FIG. 4.26.

Ed ora qualche considerazione sull'allineamento esterno che viene spesso utilizzato quale rotta di sicurezza in presenza di pericoli per la navigazione. Occorre, in tal caso, che esso sia sensibile, cioè che si riesca a vedere i due punti non più allineati con l'allontanarsi di poco da esso. E la pratica suggerisce che l'angolo minimo, sotteso ai due punti, che riesce a percepire l'osservatore è dell'ordine del quarto di grado.

In fig. 4.28 è segnato, oltre all'allineamento dei due punti noti A e B , anche il segmento circolare capace di tale angolo ($\alpha = 0^\circ,25$), per cui, se O rappresenta la posizione dell'osservatore, la distanza di tale punto dall'allineamento rappresenta l'incertezza di quest'ultimo per l'angolo suddetto, incertezza che definisce lo spostamento dell'osservatore dall'allineamento per riuscire a notare i due punti A e B non più allineati.

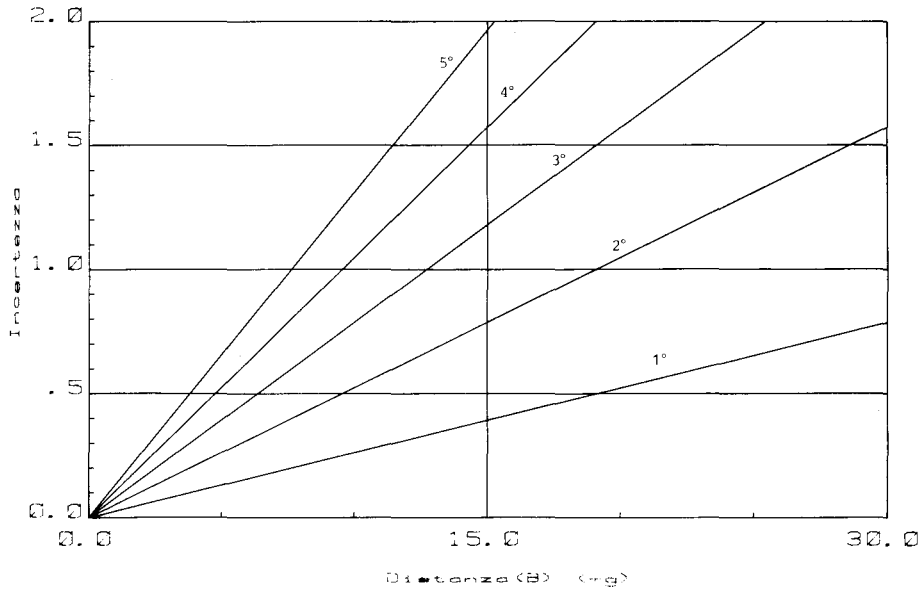


FIG. 4.27.

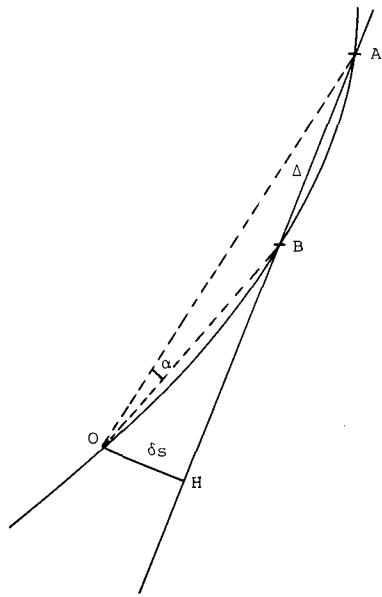


FIG. 4.28.

Tale incertezza è data per l'appunto dalla (4.29) che assume per le seguenti distanze dal punto B (punto più vicino all'osservatore) i valori:

$$\begin{aligned} d_B = \Delta & \quad \delta s = \pm 2 \Delta \delta \alpha \\ d_B = 2 \Delta & \quad \delta s = \pm 6 \Delta \delta \alpha \\ d_B = 3 \Delta & \quad \delta s = \pm 12 \Delta \delta \alpha \end{aligned}$$

con $\delta \alpha$ uguale, nel caso in esame, a $1/4$ di grado.

A mo' di esempio, se $\Delta = 3600$ metri, l'incertezza δs per le tre distanze analizzate assume i valori di ± 30 , ± 90 e ± 180 metri circa.

Dal che si evince che per una buona sensibilità occorre che il rapporto d_B/Δ non sia molto grande.

4.14 - MISURA DELL'ANGOLO TRA LE DIREZIONI AI CENTRI DI DUE ASTRILUOGHI DI POSIZIONE ED EQUAZIONI

La misura dell'angolo tra le direzioni ai centri di due astri permette di ottenere un luogo di posizione utile nei voli spaziali, che si differenzia a seconda degli astri osservati ed anche della misura effettuata.

Se i due astri sono vicini (Sole, Luna, pianeti) il luogo di posizione viene comunemente denominato *navoide*, superficie che si ottiene facendo ruotare l'arco di circonferenza capace dell'angolo misurato intorno alla retta che congiunge i centri dei due astri.

In fig. 4.29 O rappresenta l'osservatore che misura l'angolo α tra le direzioni ai centri dei due astri vicini A_1 e A_2 .

Indicando con \vec{p} il vettore noto che individua la posizione dell'astro A_2 rispetto all'astro A_1 e con \vec{r} il vettore incognito dell'osservatore, anch'esso con origine in A_1 , si può scrivere:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = r p \cos \beta \quad (4.31)$$

Dalle due seguenti relazioni relative ai moduli p e q :

$$p^2 = r^2 + q^2 - 2 r q \cos \alpha$$

$$q^2 = r^2 + p^2 - 2 r p \cos \beta$$

si ottiene:

$$r p \cos \beta = r^2 - r q \cos \alpha$$

espressione che sostituita nella (4.31) permette di ottenere l'equazione del navoide in forma vettoriale:

$$\bar{r} \cdot \bar{p} = r^2 - r q \cos \alpha \quad (4.32)$$

Se l'astro A_2 è una stella, risulta per l'osservatore O $\beta = 180^\circ - \alpha$ ed il vettore \bar{p} diventa il versore \bar{n} della direzione orientata astro vicino A_1 - astro lontano A_2 , per cui, essendo $p = 1$, la (4.31) diventa:

$$\bar{r} \cdot \bar{n} = -r \cos \alpha \quad (4.33)$$

equazione in forma vettoriale del cono con vertice nel centro dell'astro A_1 e con l'asse secondo la direzione $A_1 - A_2$, di semiapertura uguale al supplemento dell'angolo misurato. Per l'osservatore in O' , sempre in fig. 4.29, l'angolo β è ancora uguale a $180^\circ - \alpha$, per cui il luogo di posizione con misura dell'angolo tra le due direzioni ad un astro vicino e ad un altro molto lontano (stella) è un doppio cono.

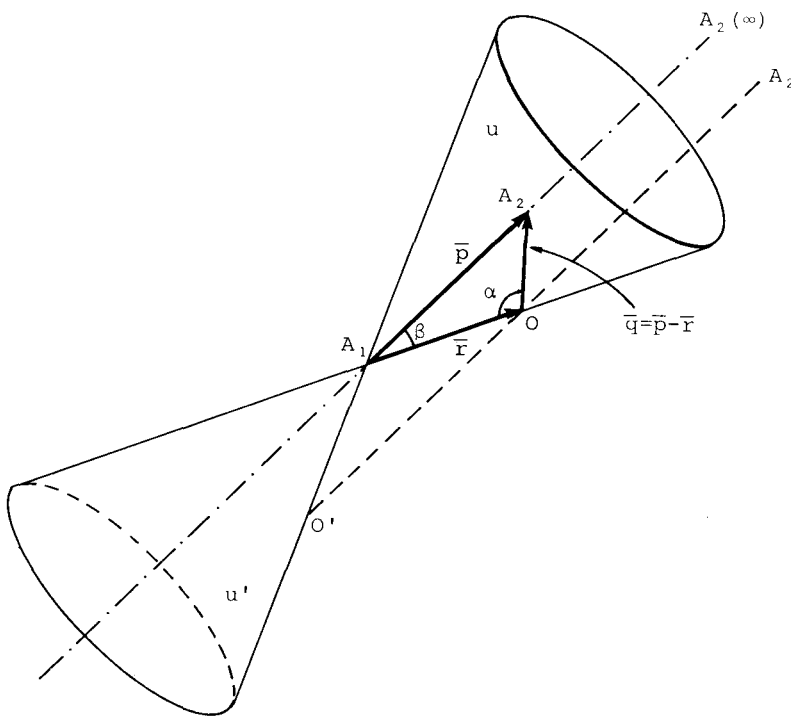


FIG. 4.29.

Con $\beta = 0^\circ$ la (4.31) si semplifica in:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = r p \quad (4.34)$$

equazione, questa, dell'*allineamento, interno* o *esterno* a seconda della grandezza del modulo del vettore \vec{r} rispetto a quello del vettore \vec{p} (fig. 4.30, a e b).

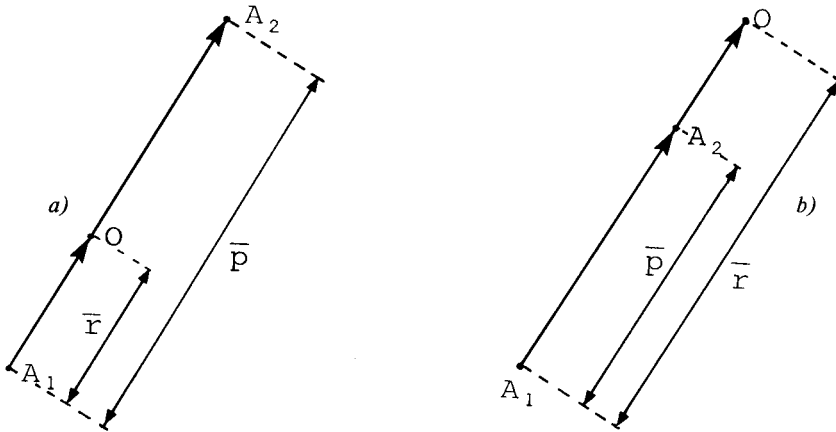


FIG. 4.30.

Con $\beta = 180^\circ$ si ha l'allineamento esterno di equazione:

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = - r p \quad (4.35)$$

e rappresentato in fig. 4.31.

Agli stessi casi di fig. 4.30b e di fig. 4.31 (allineamento esterno) si giunge considerando la (4.32) con $\alpha = 0^\circ$ ed al caso di fig. 4.30a (allineamento interno con $\alpha = 180^\circ$).

Se l'astro A_2 è una stella si verifica il caso di fig. 4.31 per $\alpha = 0^\circ$ ($\vec{r} \cdot \vec{n} = -r$) ed il caso di fig. 4.30a per $\alpha = 180^\circ$ ($\vec{r} \cdot \vec{n} = r$).

Il caso dell'allineamento è alquanto discutibile; esso, infatti, è praticamente possibile soltanto con un pianeta considerato puntiforme ed una stella.

Col Sole, con la Luna ed anche con un pianeta quali astri vicini ed una stella quale astro lontano potrà verificarsi l'occultazione di quest'ultima.

Il luogo di posizione per l'istante in cui inizia l'occultazione è la superficie laterale di un cilindro avente per asse la direzione astro vicino - stella occultata e per diametro quello dell'astro occultante.

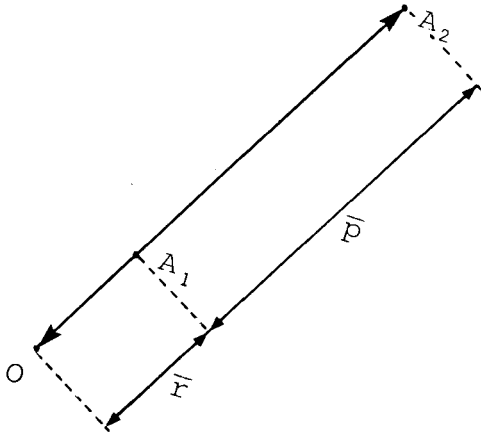


FIG. 4.31.

Dalla figura 4.32 in cui A_1 rappresenta l'astro vicino, per l'istante in cui da O si nota l'occultazione, si ha:

$$\bar{r} \cdot \bar{n} = r \cos \beta = -r \cos \sigma$$

con \bar{n} il versore della direzione astro A_1 - stella A_2 e σ la misura angolare da O del raggio dell'astro A_1 .

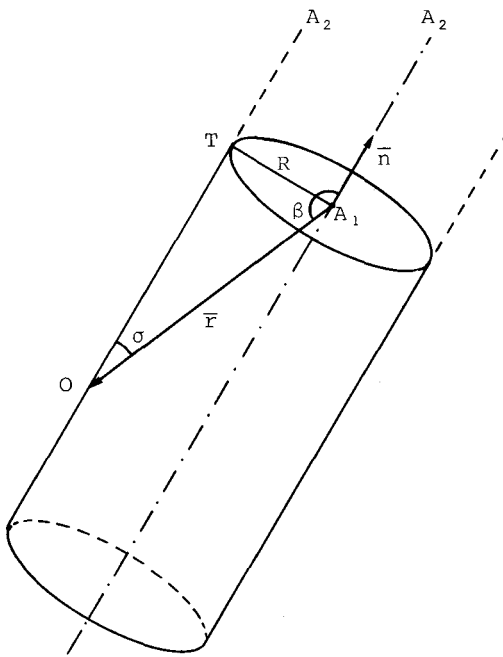


FIG. 4.32.

Per essere:

$$\text{sen } \sigma = \frac{R}{r}$$

con R il raggio dell'astro, la relazione scritta diventa:

$$(\bar{r} \cdot \bar{n})^2 = r^2 - R^2$$

È opportuno ora esplicitare le equazioni vettoriali dei luoghi di posizione testé analizzati con riferimento ad una terna cartesiana, comunque orientata, con origine nell'astro A_1 .

Indicando con $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ i versori degli assi, con a, b, c le coordinate dell'astro A_2 o i coseni direttori della direzione astro A_1 - astro A_2 secondo che l'astro A_2 sia a distanza finita o infinita dall'astro A_1 , e con x, y, z le coordinate di un generico punto dei luoghi di posizione, si ha:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \quad \bar{p} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}; \quad \bar{q} = (x-a)\bar{i} + (y-b)\bar{j} + (z-c)\bar{k}$$

$$\bar{r} \cdot \bar{p} = ax + by + cz$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}; \quad p = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}; \quad q = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}$$

per cui la (4.32) e la (4.33) risultano rispettivamente:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{sen}^2 \alpha - 2(x^2 + y^2 + z^2)(ax + by + cz) \text{sen}^2 \alpha - (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (ax + by + cz)^2 = 0 \quad (4.36)$$

$$(a^2 - \cos^2 \alpha)x^2 + (b^2 - \cos^2 \alpha)y^2 + (c^2 - \cos^2 \alpha)z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz = 0 \quad (4.37)$$

mentre la (4.34) e la (4.35) assumono entrambe l'espressione:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad (4.38)$$

equazione di una retta che passa per l'origine degli assi.

La (4.38) è valida anche con l'astro A_2 all'infinito (con a, b, c considerati quali coseni direttori).

In conformità della seconda delle (1.1) le equazioni del navoide e del cono vengono rispettivamente così scritte:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{r^2 - (\bar{r} \cdot \bar{p})}{r q} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{r^2 - (ax + by + cz)}{r q} \right) \quad (4.36')$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(-\frac{\bar{r} \cdot \bar{n}}{r} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{ax + by + cz}{r} \right) \quad (4.37')$$

i cui moduli r e q sono dati dalle espressioni testé riportate.

4.15 - LINEARIZZAZIONI ED INCERTEZZE

Volendo linearizzare le equazioni (4.36') e (4.37') è necessario calcolare i coefficienti (1.14) per poter poi scrivere le equazioni dei piani di posizione, dei quali l'espressione generale è data dalla (1.13).

Per il navoide i coefficienti sono dati da:

$$l = \alpha - \alpha_s$$

$$h_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s = -\frac{r_s (q_s - r_s \cos \alpha_s) (x_s - a) + q_s (r_s - q_s \cos \alpha_s) x_s}{r_s^2 q_s^2 \sin \alpha_s}$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s = -\frac{r_s (q_s - r_s \cos \alpha_s) (y_s - b) + q_s (r_s - q_s \cos \alpha_s) y_s}{r_s^2 q_s^2 \sin \alpha_s}$$

$$h_3 = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s = -\frac{r_s (q_s - r_s \cos \alpha_s) (z_s - c) + q_s (r_s - q_s \cos \alpha_s) z_s}{r_s^2 q_s^2 \sin \alpha_s}$$

mentre per il cono da:

$$l = \alpha - \alpha_s \quad h_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_s = \frac{a r_s + \cos \alpha_s x_s}{r_s^2 \sin \alpha_s}$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_s = \frac{b r_s + \cos \alpha_s y_s}{r_s^2 \sin \alpha_s} \quad h_3 = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)_s = \frac{c r_s + \cos \alpha_s z_s}{r_s^2 \sin \alpha_s}$$

Per il calcolo delle incertezze di questi due luoghi di posizione occorre, come già operato precedentemente, la somma dei quadrati dei coefficienti h_1 , h_2 , h_3 , considerati per un punto generico (coseni direttori della direzione del gradiente in tale punto).

Tale somma risulta per il navoide e per il cono rispettivamente:

$$\frac{p^2}{r^2 q^2} \quad \frac{1}{r^2}$$

per cui la (1.18b) fornisce le seguenti incertezze:

$$\delta s = \pm \frac{1}{p} r q \delta \alpha \quad (4.39) \quad [\text{navoide}]$$

$$\delta s = \pm r \delta \alpha \quad (4.40) \quad [\text{cono}]$$

relazioni analoghe a quelle relative alle incertezze del segmento circolare capace (4.25) e della semiretta di rilevamento (4.11).

E questo per il fatto che le incertezze vengono misurate in piani che contengono la congiungente i centri dei due astri, piani che intersecano i luoghi in considerazione secondo circonferenze (capaci) o semirette (di rilevamento).

Per l'allineamento, espresso dalla (4.38), valgono pertanto tutte le considerazioni fatte nel paragrafo 4.13.

DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE

5.1 - RISOLUZIONE ANALITICA E GRAFICA

Per la determinazione della posizione, considerato il mobile sulla superficie terrestre, occorrono, come già detto nel paragrafo 1.1, al minimo due misure relative allo stesso parametro od a parametri differenti.

Dal sistema d'equazioni, espresse dalla (1.12), si ricavano $\delta \lambda$ e $\delta \varphi$ e quindi:

$$\lambda = \lambda_s + \delta \lambda \quad \varphi = \varphi_s + \delta \varphi$$

Il sistema, in forma sintetica, è dato dall'espressione matriciale analoga alla relazione (1.16):

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} \quad (5.1)$$

dove \mathbf{y} è un vettore colonna, detto *vettore misura*, i cui elementi sono le differenze l_i tra le misure effettuate e quelle stimate calcolate ($i = 1, 2$); gli elementi della matrice \mathbf{H} (*matrice di misura*), di dimensioni 2×2 , sono dati dalle (1.11); già noto infine il vettore di stato \mathbf{x} , $\mathbf{x} = (\delta \lambda \ \delta \varphi)^T$.

Dalla (5.1) si ricava:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{y} \quad (5.2)$$

La risoluzione della (5.2) porta alla determinazione delle coordinate del punto d'intersezione delle due rette di posizione, mentre il punto esatto risulta dall'incontro delle due curve di posizione. Per avvicinarsi a quest'ultimo punto occorre seguire un procedimento iterativo, ponendo:

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}$$

linearizzando, così, tratti di curve via via più vicini al punto esatto.

La soluzione analitica può essere sostituita da quella grafica col tracciamento delle rette di posizione, espresse dalla (1.19) e (1.20), sul

piano nautico e sulla carta di Mercatore, non dimenticando i luoghi di posizione analizzati quando si è a breve distanza dai punti noti rilevati (vedi par. 5.6).

Evidentemente le misure che compaiono nel sistema (5.1) debbono essere simultanee o quasi; in caso contrario occorre renderle tali, tenendo conto della loro variazione secondo il moto dell'osservatore. All'uopo, per brevi percorsi, viene in aiuto proprio la relazione (1.12) che fornisce la variazione di una generica misura L dalla posizione stimata del mobile a quella esatta.

Nel caso in esame la variazione della misura dev'essere intesa tra l'istante dell'osservazione e quello rispetto al quale si desidera la posizione (generalmente quello relativo all'ultima osservazione). Nella relazione (1.12) occorre porre:

$$\delta \lambda = \delta m \operatorname{sen} R_v \sec \varphi \quad \delta \varphi = \delta m \cos R_v$$

con δm il percorso effettuato dal mobile nell'intervallo considerato e R_v la rotta vera seguita.

Nel caso della determinazione della posizione con piani (di posizione), nel sistema (5.1) la matrice di misura \mathbf{H} è di dimensioni 3×3 , essendo i suoi elementi dati dalle (1.14); il vettore di stato è dato da $\mathbf{x} = (\delta x \ \delta y \ \delta z)^T$; anche in questo caso si può seguire il metodo iterativo.

Se le misure sono affette da un errore sistematico δL_s , è possibile determinarlo procedendo ad un'ulteriore misura; il sistema, indicato sempre dalla (5.1), risulterà composto da tre equazioni nel caso di rette di posizione e da quattro nel caso di piani di posizione, tutte del tipo della (1.17) con $\delta l_i = \delta L_s$.

Gli elementi del vettore misura sono, in questo caso, le differenze tra le misure effettuate ed errate e quelle corrispondenti stimate calcolate; gli elementi delle prime due o tre colonne della matrice \mathbf{H} sono dati dalle (1.11) o (1.14) e quelli della sua ultima colonna sono uguali all'unità; il vettore di stato, infine, risulta:

$$\mathbf{x} = (\delta \lambda \ \delta \varphi \ \delta L_s)^T \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = (\delta x \ \delta y \ \delta z \ \delta L_s)^T$$

5.2 - VARIAZIONE DEI PARAMETRI DI POSIZIONE DOVUTA AL MOTO DEL MOBILE

— *Variazione di distanza*

La relazione (2.33) va così scritta:

$$d' - d = - \cos \varphi \operatorname{sen} Z \delta \lambda - \cos Z \delta \varphi$$

con d' e d rispettivamente la distanza desiderata e quella misurata.

Ponendo:

$$\delta d = d' - d \quad \delta \lambda = d m \operatorname{sen} R_v \sec \varphi \quad \delta \varphi = d m \cos R_v$$

si ottiene:

$$\delta d = -\delta m \cos (R_v - Z) \quad (5.3)$$

Nel caso di misure di altezze di astri:

$$\delta d = z' - z = h - h' = -(h' - h) = -\delta h$$

e quindi:

$$\delta h = \delta m \cos (R_v - Z) \quad (5.4)$$

Più avanti, a fine paragrafo, viene fatta un'importante considerazione su quest'ultima relazione.

– *Variazioni di differenza e somma di distanze*

Note la differenza e la somma delle distanze dai due punti A e B :

$$\Delta d = d_A - d_B \quad Sd = d_A + d_B$$

quelle desiderate risultano:

$$\Delta d' = d'_A - d'_B = d_A + \delta d_A - d_B - \delta d_B = \Delta d + (\delta d_A - \delta d_B) = \Delta d + \delta \Delta d$$

$$Sd' = d'_A + d'_B = d_A + \delta d_A + d_B + \delta d_B = Sd + (\delta d_A + \delta d_B) = Sd + \delta Sd$$

con $\delta \Delta d$ e δSd le variazioni richieste che per la (3.4) la prima e per la (3.8) la seconda risultano rispettivamente:

$$\delta \Delta d = \delta m [\cos (R_v - Z_B) - \cos (R_v - Z_A)] \quad (5.5)$$

$$\delta Sd = -\delta m [\cos (R_v - Z_B) + \cos (R_v - Z_A)] \quad (5.6)$$

– *Variazione del rilevamento*

Nel caso di rilevamento dell'oggetto A misurato dal mobile, la variazione $\delta Z = Z' - Z$, con Z' e Z rispettivamente l'angolo azimutale desiderato e quello noto, si ottiene, tenendo presente la (4.7):

$$\delta Z = \delta m \left[\frac{\cos \varphi_A \sec \varphi \cos \tau \operatorname{sen} R_v}{\operatorname{sen} d} + \frac{\operatorname{sen} Z \cos R_v}{\operatorname{tg} d} \right] \quad (5.7);$$

rilevando da un punto noto la variazione risulta per la (4.13):

$$\delta Z = \delta m \frac{\text{sen}(R_v - \tau)}{\text{sen } d} \quad (5.8)$$

– *Variazione dell'angolo orizzontale sotteso ai due punti noti A e B*

Indicando con $\delta \alpha$ tale variazione ($\delta \alpha = \alpha' - \alpha$, con α' l'angolo desiderato), la (4.21) porta a:

$$\begin{aligned} \delta \alpha = & \left(\frac{\cos \varphi_A \cos \tau_A}{\text{sen } d_A} - \frac{\cos \varphi_B \cos \tau_B}{\text{sen } d_B} \right) \delta m \text{sen } R_v \sec \varphi + \\ & + \left(\frac{\text{sen } Z_A}{\text{tg } d_A} - \frac{\text{sen } Z_B}{\text{tg } d_B} \right) \delta m \cos R_v \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nelle relazioni qui ottenute, tutti i dati relativi alla posizione non nota del mobile nell'istante della misura verranno considerati per la sua simultanea posizione stimata; al posto degli angoli azimutali possono essere sostituiti i rispettivi azimut.

Sia, fig. 5.1, d la distanza misurata e d' quella desiderata.

Considerando confuso con un arco di circonferenza massima l'arco di lossodromia δm percorso tra l'istante della misura della distanza e quello rispetto al quale questa viene desiderata, dal triangolo sferico $O'OA$ si ha:

$$\cos d' = \cos d \cos \delta m + \text{sen } d \text{sen } \delta m \cos (R_v - Z)$$

Ponendo $d' = d + \delta d$ e sviluppando in serie $\cos (d + \delta d)$, $\cos \delta m$ e $\text{sen } \delta m$, fino ai termini di 2° ordine, si perviene dopo alcuni passaggi a:

$$\delta d = -\delta m \cos (R_v - Z) + \frac{\delta m^2}{2} \cotg d - \frac{\delta d^2}{2} \cotg d$$

Ponendo in prima approssimazione:

$$\delta d = -\delta m \cos (R_v - Z)$$

e sostituendo, si ottiene alla fine:

$$\delta d = -\delta m \cos (R_v - Z) + \frac{\delta m^2}{2} \cotg d \text{sen}^2 (R_v - Z)$$

relazione che, esprimendo δd e δm in miglia, viene così scritta:

$$\delta d = -\delta m \cos (R_v - Z) + \frac{\delta m^2}{2} \cotg d \operatorname{sen}^2 (R_v - Z) \operatorname{sen} l' \quad (5.10)$$

Il secondo termine della (5.10) aumenta col diminuire di d e diventa massimo per $R_v - Z = 90^\circ$. Rispetto a tale condizione esso assume il valore di 0.7 mg e di 0.01 mg per uno stesso percorso δm di 3 miglia, rispettivamente per $d = \text{mg } 5$ e $d = \text{mg } 500$.

Tenendo conto solamente del primo termine della (5.10) si ottiene la (5.3), relazione quest'ultima che può essere ottenuta dal triangolo $O'OH$ considerato piano.

La (5.4) esprime per un dato istante la differenza delle altezze di un astro relative a due località vicine.

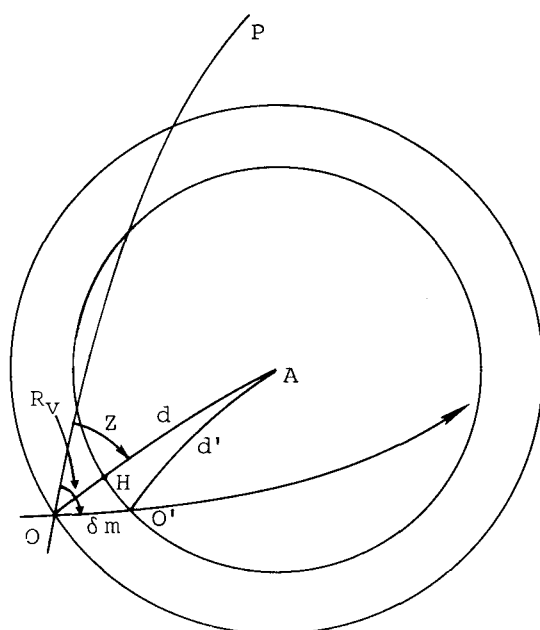


FIG. 5.1.

Orbene, volendo passare dall'altezza dell'astro A (fig. 5.1), misurata all'istante t nel punto O , all'altezza dello stesso per l'istante t' e per l'orizzonte del punto O' , dove si è pervenuti, occorre prima ridurre l'altezza relativa all'istante t all'orizzonte del punto O' mediante la relazione (5.4) e poi tener conto della sua variazione nell'intervallo $t' - t$.

Detta variazione si ottiene tenendo conto della relazione che lega, per una data località, l'altezza di un astro con le sue coordinate orarie. Per uno stesso luogo e per due istanti successivi, considerando δ costante, si ha rispettivamente:

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\text{sen } h' = \text{sen } \varphi \text{ sen } \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t'$$

Ponendo nella seconda relazione:

$$h' = h + \delta h \quad t' = t + \delta t$$

e sviluppando in serie con arresto ai termini del primo ordine per il breve intervallo $t' - t$, si ottiene:

$$\delta h = -\cos \varphi \text{ sen } Z \delta t \quad (5.11)$$

relazione che dà la variazione dell'altezza per una variazione dell'angolo orario dell'astro, data da:

$$\delta t = \delta t_A = \delta t_m + \delta \alpha_m - \delta \alpha_A \quad (5.12)$$

in cui $\delta \alpha_m$ e $\delta \alpha_A$ rappresentano le variazioni delle ascensioni rette del Sole medio e dell'astro nell'intervallo di tempo medio δt_m .

In prima approssimazione, per brevi intervalli di tempo, si può considerare $\delta \alpha_m = \delta \alpha_A = 0$, per cui $\delta t_A = \delta t_m$, cioè la variazione dell'angolo orario dell'astro uguale a quella del tempo medio; di qui, sostituendo l'azimut all'angolo azimutale, la (5.11) in valore assoluto diventa:

$$\delta h = |\cos \varphi \text{ sen } a \delta t_m| \quad (5.13)$$

Da precisare che nella relazione (5.13) φ rappresenta la latitudine del punto O' ed a l'azimut dell'astro per la medesima località e per l'istante t' .

La variazione δh è positiva per astri situati nell'emisfero celeste orientale, negativa per quelli nell'emisfero occidentale.

5.3 - TRASPORTO DI UNA RETTA DI POSIZIONE

Sia r (fig. 5.2) la retta di posizione, relativa alla lettura L eseguita all'istante t , tracciata sul piano nautico o sulla carta di Mercatore. Volendo utilizzare questo luogo per l'istante t' , posteriore a t , si dovrà proce-

dere al suo *trasporto*, considerando che ciascun suo punto si sposta secondo il moto del mobile.

Basta pertanto tracciare da un punto di r la rotta vera, riportare su questa il percorso δm e per il suo estremo tracciare la retta r' parallela ad r .

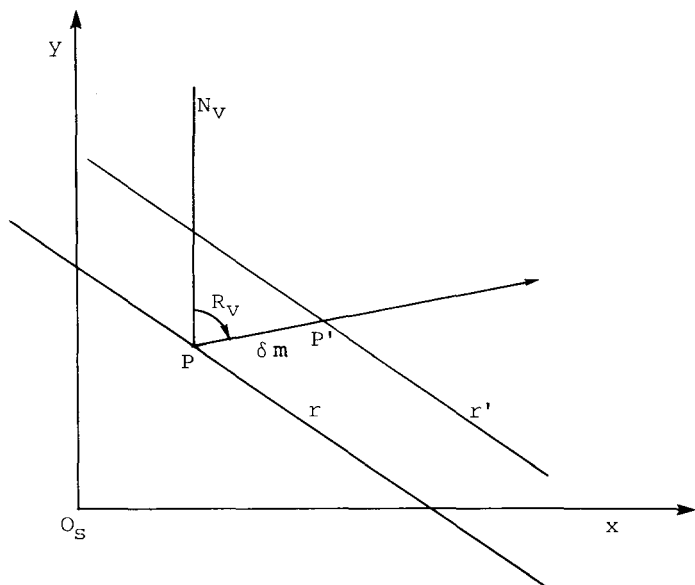


FIG. 5.2.

Si considerino, ora, due rette di posizione: la prima, r_1 , relativa all'osservazione eseguita nell'istante t_1 e calcolata per la posizione O_{s1} , la seconda, r_2 , relativa all'osservazione eseguita nell'istante t_2 e calcolata per la posizione O_{s2} .

Sulla carta di Mercatore (o sul piano nautico) si fissa il punto O_{s1} (fig. 5.3) e si traccia rispetto a questo la retta r_1 .

Riportando sulla rotta vera, tracciata da O_{s1} , il percorso m effettuato dal mobile nell'intervallo $t_2 - t_1$, si fissa il punto O_{s2} per tracciare rispetto a questo la retta r_2 . Per ottenere la posizione all'istante t_2 occorre a questo punto effettuare il trasporto della retta r_1 , seguendo il procedimento dianzi indicato. Prendendo in considerazione il suo punto D_1 , questo risulterà spostato nel punto D'_1 , per il quale si traccia la retta r'_1 parallela ad r_1 ; l'intersezione di r'_1 con r_2 fornisce la posizione del mobile.

Facilmente si nota dalla figura che basta fissare sulla carta nautica soltanto il punto O_{s2} , tracciando rispetto a questo sia la retta r_2 che la retta r_1 , calcolata quest'ultima rispetto al punto O_{s1} .

Or dunque, per ottenere la posizione del mobile all'istante dell'ultima osservazione, al minimo due, se queste sono poco intervallate, le relative rette di posizione vanno calcolate e tracciate per la stessa posizione stimata e poi trasportate all'istante dell'ultima. Si tratta, così, di un *trasporto grafico*. Convien, in tal caso, assumere quale punto stimato (punto di appoggio delle rette di posizione) quello relativo all'ultima osservazione, per poter rilevare dal grafico l'*errore di stima* (distanza tra le simultanee posizioni, stimata ed esatta).

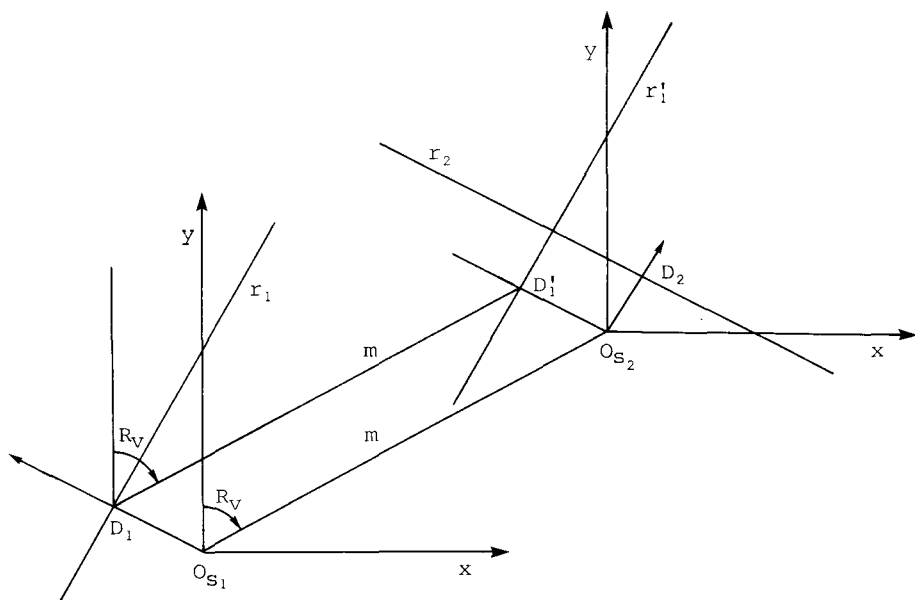


FIG. 5.3.

Se le osservazioni sono molto intervallate, le rispettive rette di posizione vanno calcolate ciascuna per il rispettivo punto stimato. Sulla carta nautica viene fissato soltanto il punto stimato relativo all'istante rispetto al quale si desidera la posizione, tracciando rispetto a questo tutte le rette di posizione. In ciò consiste il *trasporto analitico*, intendendo per tale anche il calcolo della variazione della misura L trattata nel paragrafo precedente.

Si ricorre al trasporto grafico quando intercorrono pochi minuti tra un'osservazione e l'altra, mentre si procede a quello analitico quando l'intervallo tra le osservazioni è dell'ordine di varie decine di minuti.

Il trasporto risente di eventuali errori sulla rotta e sulla velocità e la sua incertezza aumenta col tempo.

In presenza di un luogo di posizione circolare il trasporto consiste nello spostare il suo centro secondo il moto del mobile, tracciando rispetto a questo, con lo stesso raggio, la nuova circonferenza.

5.4 - TECNICA DI GAUSS DEI MINIMI QUADRATI

Sia data una serie di m misure istantanee o quasi di uno stesso parametro di navigazione e tra loro indipendenti, affette di errori aleatori di valore medio nullo e di varianza nota.

Il sistema (5.1) va ora così scritto, in analogia alla relazione (1.17):

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (5.14)$$

Gli elementi del vettore \mathbf{y} sono in questo caso le differenze tra le misure effettuate ed errate e quelle stimate, quelli del vettore \mathbf{e} sono proprio gli errori δL_i delle m misure.

La posizione più probabile dell'osservatore (*PPP*), cioè il vettore di stato più probabile, detto anche *vettore di stato ottimale*, di n elementi ($n \leq m$) ed indicato con $\hat{\mathbf{x}}$, suppone la condizione di minimizzare la somma dei quadrati degli elementi del vettore $\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}$. Dev'essere pertanto un minimo l'espressione:

$$J = (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}) \quad (5.15)$$

e per questo occorre che:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

La (5.15) può scriversi:

$$J = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}$$

per cui la sua derivata rispetto ad \mathbf{x} risulta essere data dall'espressione:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = -2 \mathbf{y}^T \mathbf{H} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}$$

che eguagliata a zero fornisce il desiderato vettore di stato ottimale:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (5.16)$$

La matrice di covarianza degli errori $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ è data da:

$$\mathbf{Q} = E [(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T]$$

che, tenendo presenti la (5.14) e la (5.16), diventa:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma^2 \quad (5.17)$$

La (5.17) permette il calcolo di \mathbf{Q} se nota la varianza degli errori di misura.

In generale è sufficiente un solo ciclo di calcoli essendo il punto stimato non molto lontano da quello esatto; in caso contrario occorre reiterare, assumendo:

$$\mathbf{x}_s = \hat{\mathbf{x}}$$

e per l'arresto del ciclo iterativo basta tener presente una opportuna norma della matrice \mathbf{Q} . Un indice di bontà è dato da:

$$\sqrt{\text{traccia } (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}} \quad (5.18)$$

Come già detto, il metodo dei minimi quadrati richiede un numero di misure maggiore o almeno uguale al numero degli elementi del vettore di stato. Qualora le misure si susseguono nel tempo, sarebbe utile organizzare i calcoli in maniera tale che i risultati ottenuti dalle m misure possano essere utilizzati per ottenere la stima alla $m + 1$ misura. Ciò può essere ottenuto seguendo la tecnica dei *minimi quadrati ricorsivi*.

Indicando con $\hat{\mathbf{x}}(m)$ la stima ottimale relativa alle m misure e con $l(m + 1)$ la differenza tra la $(m + 1)$ -ma misura effettuata e la corrispondente stimata calcolata, la stima ottimale conseguente alla $(m + 1)$ -ma misura può così ottenersi:

$$\hat{\mathbf{x}}(m + 1) = \hat{\mathbf{x}}(m) + \mathbf{K}(m) [l(m + 1) - \mathbf{h}^T(m + 1) \hat{\mathbf{x}}(m)] \quad (5.19)$$

dove $\mathbf{h}^T(m + 1) \hat{\mathbf{x}}(m)$ rappresenta la predizione di l fatta sulla base della stima $\hat{\mathbf{x}}(m)$.

La matrice $\mathbf{K}(m)$ che compare nella (5.19) può essere calcolata ricorsivamente:

$$\mathbf{K}(m) = \mathbf{Q}(m) \mathbf{h}(m + 1) [1 + \mathbf{h}^T(m + 1) \mathbf{Q}(m) \mathbf{h}(m + 1)]^{-1} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{Q}(m + 1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(m) \mathbf{h}^T(m + 1)] \mathbf{Q}(m) \quad (5.21)$$

dove $\mathbf{Q}(m)$ è la matrice di covarianza dell'errore di stima relativa alla m -ma misura.

Una tale tecnica può essere applicata quando si procede alla determinazione della posizione se fermi o lentamente in moto, considerando istantanee o quasi sia le m misure che la $(m + 1)$ -ma.

Le relazioni (5.19), (5.20) e (5.21) hanno delle analogie con quelle relative all'algoritmo del filtro ottimale di Kalman (vedi par. 7.5)

Alla (5.16) si può pervenire anche nel seguente modo, considerando per semplicità rette di posizione.

La *i*-esima di queste ha per equazione:

$$h_{1i} \delta \lambda + h_{2i} \delta \varphi - l_{ei} = -\delta L_i$$

Per essere:

$$\sum \delta L_i^2 = \text{minimo}$$

deve porsi:

$$\frac{\partial \sum \delta L_i^2}{\partial \lambda} = 0 \quad \frac{\partial \sum \delta L_i^2}{\partial \varphi} = 0$$

Si hanno, pertanto, le seguenti equazioni, dette *di condizione*:

$$\sum h_{1i}^2 \delta \hat{\lambda} + \sum h_{1i} h_{2i} \delta \hat{\varphi} = \sum h_{1i} l_{ei}$$

$$\sum h_{2i}^2 \delta \hat{\varphi} + \sum h_{1i} h_{2i} \delta \hat{\lambda} = \sum h_{2i} l_{ei}$$

che formano un sistema di primo grado e che può essere così scritto:

$$\begin{pmatrix} \delta \hat{\lambda} \\ \delta \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum h_{1i}^2 & \sum h_{1i} h_{2i} \\ \sum h_{1i} h_{2i} & \sum h_{2i}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum h_{1i} l_{ei} \\ \sum h_{2i} l_{ei} \end{pmatrix}$$

Non riesce difficile individuare nella prima matrice del secondo membro il prodotto $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ e nella seconda il prodotto $\mathbf{H}^T \mathbf{y}$, per cui può scriversi:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

Viene spontanea la seguente osservazione: la minimizzazione della somma dei quadrati degli errori δL_i garantisce anche quella dei quadrati delle distanze del *PPP* dai luoghi di posizione errati.

Questo permette di localizzare con estrema facilità il *PPP* nel caso del tracciamento sul piano nautico o sulla carta di Mercatore di tre rette di posizione ottenute con misure affette da errori aleatori. Infatti tale punto, situato nell'interno del triangolo formato dalle tre rette, per la proprietà testé enunciata, coincide col punto Greebe-Lemoine che, tra l'altro, gode delle seguenti proprietà:

1) le tre rette che congiungono i punti medi dei lati del triangolo ai punti medi delle corrispondenti altezze concorrono nel *PPP*;

2) le tre ceviane per il *PPP* (le tre rette passanti per tale punto e per i vertici del triangolo) dividono ogni lato del triangolo in parti proporzionali ai quadrati degli altri due lati;

3) le distanze del *PPP* dai lati del triangolo sono proporzionali alle lunghezze dei rispettivi lati;

4) i piedi delle distanze di cui al numero precedente sono vertici di un altro triangolo del quale il punto più probabile è il baricentro: pertanto questo secondo triangolo risulta inscritto nel primo e tra tutti i triangoli inscritti gode della proprietà che è minima la somma dei quadrati dei suoi lati;

5) sui lati del triangolo ed esternamente ad esso si costruiscano tre quadrati e si prolunghino i loro lati paralleli a quelli del triangolo dato, in modo da ottenere un nuovo triangolo: le congiungenti i vertici corrispondenti dei due triangoli concorrono nel *PPP*;

6) le simediane del triangolo concorrono nel *PPP* (s'intende per simediana la semiretta simmetrica alla mediana rispetto alla bisettrice).

Risulta, pertanto, immediata la localizzazione del *PPP* nell'interno del triangolo alla luce specialmente delle proprietà di cui ai numeri 1, 5 e 6.

Con quattro o più rette di posizione la ricerca grafica del *PPP* nell'interno del poligono formato dalle rette è molto complessa.

La fig. 5.4 mostra un diagramma di flusso per i calcoli del *PPP* con misure di altezze di astri e di rilevamenti di noti punti.

5.5 - PUNTO PIÙ PROBABILE (*PPP*) NEL CASO DI UNA SOLA MISURA

Si consideri di eseguire una sola misura di uno dei parametri di navigazione dopo un intervallo Δt di moto da un punto di coordinate esatte.

Il luogo di posizione, retta o piano, risulterà vicino alla posizione stimata se l'intervallo di moto è piccolo, lontano se è grande. Il non far parte la posizione stimata del luogo di posizione può essere giustificato nel primo caso da un errore più sulla misura che non sui dati del moto, inversamente nel secondo caso.

Nella fig. 5.5, che non rispetta le giuste proporzioni, O rappresenta la posizione esatta di riferimento, O_s quella stimata dopo l'intervallo Δt di moto ed r la retta di posizione ottenuta dall'unica misura effettuata, la cui distanza da O_s è indicata con p ($p = O_s D$).

Dando peso anche alla posizione stimata, cosa che in genere non viene fatta quando si hanno a disposizione più osservazioni, la posizione

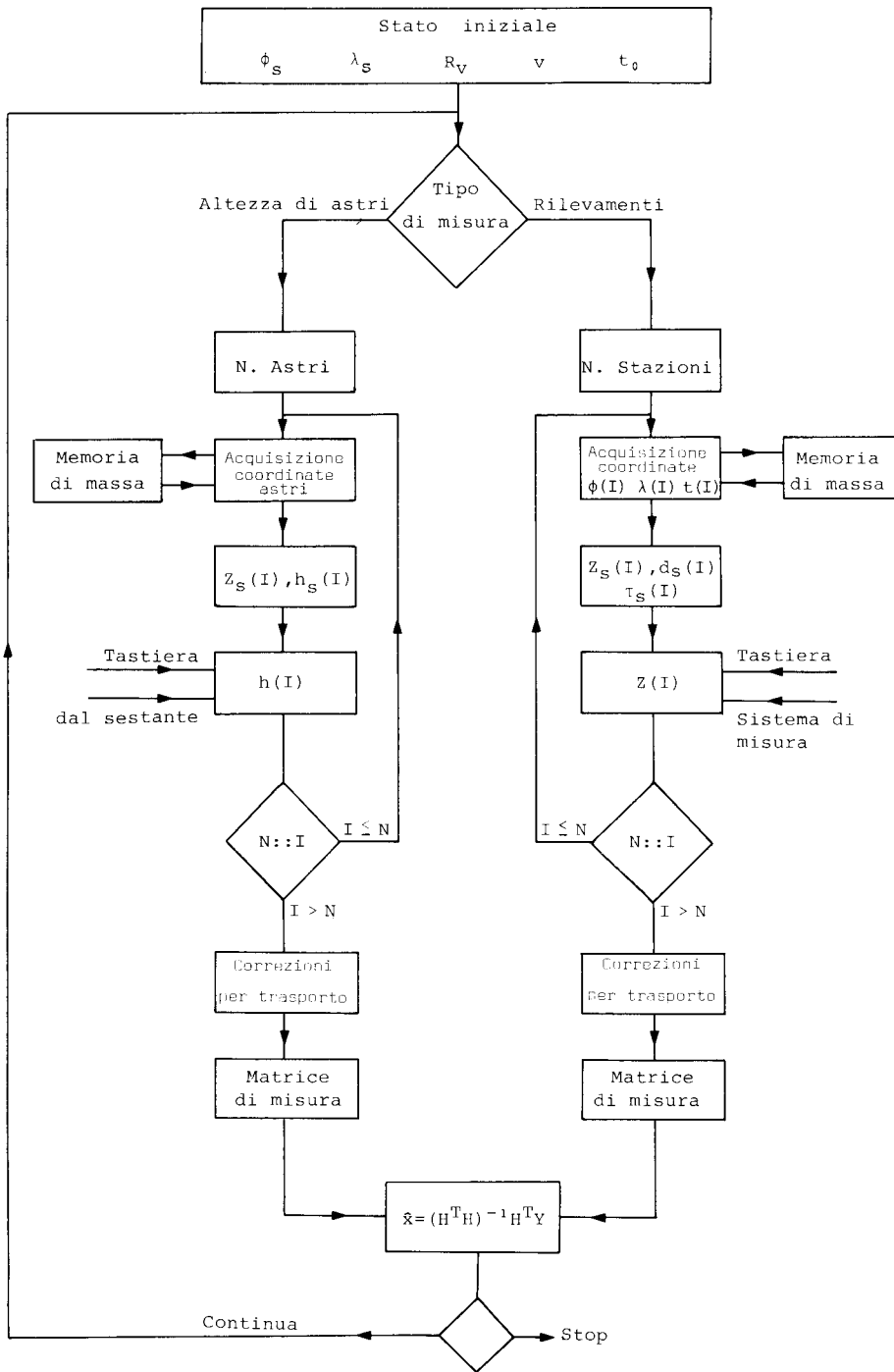


FIG. 5.4.

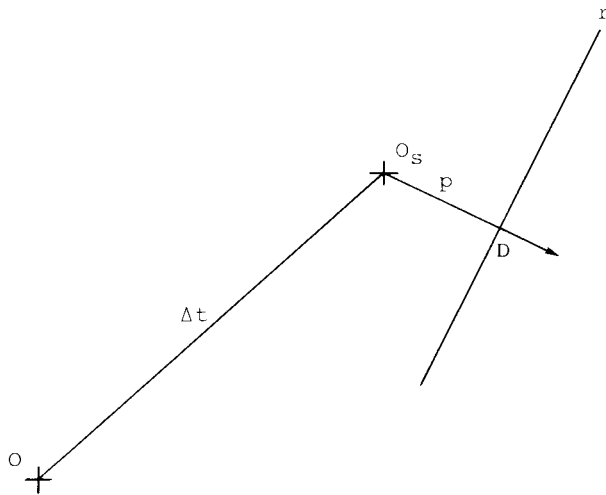


FIG. 5.5.

più probabile viene considerata nel baricentro del sistema di « forze » p e Δt (intervallo di tempo espresso in distanza), applicate rispettivamente in O_s e D (fig. 5.6).

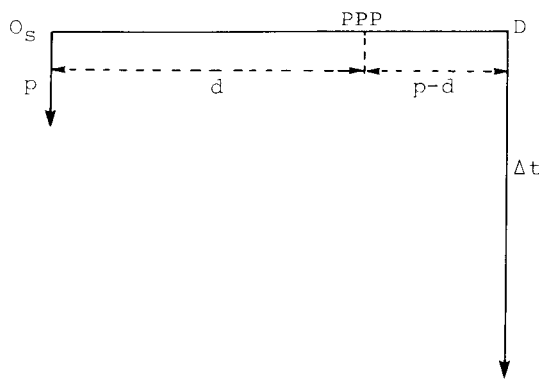


FIG. 5.6.

Indicando con d la distanza del PPP da O_s , si ha:

$$p d = \Delta t (p - d)$$

da cui:

$$d = \frac{p \Delta t}{p + \Delta t} \quad (5.22)$$

Il *PPP*, situato sul segmento p , risulterà pertanto tanto più vicino alla posizione stimata quanto più piccolo è l'intervallo di moto e tanto più vicino al luogo di posizione quanto più grande è tale intervallo.

5.6 - DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE IN VICINANZE DI COSTE

Navigando in vicinanze di coste si misurano generalmente rilevamenti, distanze, angoli orizzontali, per cui i luoghi di posizione utilizzati sono semirette di rilevamento, circonferenze di uguale distanza e segmenti circolari capaci.

Con un solo punto cospicuo e noto sulla costa, la posizione viene ottenuta sia con misure istantanee o non di un rilevamento e di una distanza, che con misure intervallate di due rilevamenti. Tracciati i luoghi sulla carta nautica, si procede poi all'eventuale trasporto di uno di essi, da considerare necessario nel secondo caso. L'incertezza sulla posizione è minore con misura di rilevamento e distanza, essendo piccolo l'angolo d'incontro delle due semirette di rilevamento, dato il breve intervallo tra gli istanti delle due misure (vedi par. 6.2).

Con due punti ben visibili si può procedere sia alla misura dei loro rilevamenti che delle rispettive distanze, eseguendo il trasporto di uno dei luoghi se non simultanei. L'incertezza sulla posizione viene minimizzata con l'incontro ortogonale dei due luoghi e ciò è ben intuibile (vedi ancora par. 6.2).

Nel caso, poi, di tre punti a disposizione, la posizione viene generalmente ottenuta sia con la misura dei loro rilevamenti che dei due angoli orizzontali limitati dalle visuali osservatore - punti (la visuale al punto centrale fa parte del primo e secondo angolo). Tali angoli possono essere dati anche dalle differenze dei rispettivi rilevamenti quando questi sono simultanei.

Le tre semirette di rilevamento, rese simultanee, generalmente si intersecano formando un triangolo; la posizione va ricercata nell'interno dello stesso seguendo la tecnica dei minimi quadrati. Se le semirette, ruotate di uno stesso angolo e nello stesso senso, si incontrano in un punto, con molte probabilità esse sono tutte affette da un errore sistematico pari all'angolo di rotazione.

È ben noto il procedimento geometrico per individuare il centro del segmento circolare capace (vedi par. 4.12); di conseguenza riesce facile operare per ottenere la posizione con due di questi luoghi, anche se intervallati.

Se i due angoli orizzontali sottesi ai tre punti sono simultanei, la posizione può essere ottenuta con uno speciale apparecchio detto *stazio-grafo*.

Esso consta, nelle linee schematiche, di un goniometro circolare metallico (fig. 5.7) graduato da 0° e 180° , verso destra e verso sinistra, e da tre bracci (*alidade*), anch'essi metallici; uno fisso sulla graduazione 0° (braccio centrale) e due mobili, orientabili secondo le dette graduazioni.

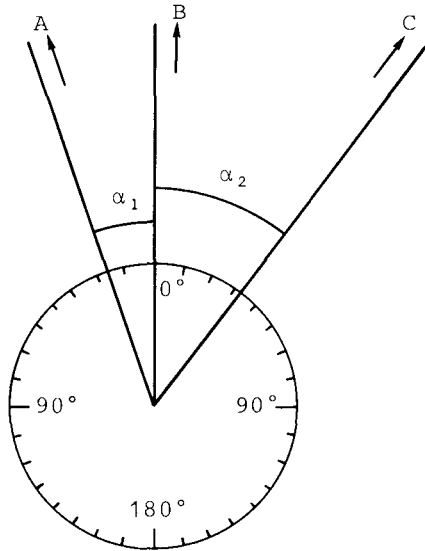


FIG. 5.7.

Noti gli angoli orizzontali α_1 e α_2 , relativi alle coppie di punti della costa *A, B* e *B, C*, si orientano i bracci laterali secondo tali angoli e si poggia lo stazigrafo sulla carta nautica, spostandolo opportunamente in modo che ciascuna alidada passi per il suo rispettivo punto della costa. Trovato il giusto orientamento, il centro del goniometro indica la posizione dell'osservatore.

Alcuni stazigrafi hanno nel centro del goniometro un foro nel quale l'operatore inserisce la matita la cui punta segnerà sulla carta la desiderata posizione. Altri, invece, presentano al posto del foro una punta metallica che va premuta in modo da lasciare l'impronta sulla carta.

Ben si comprende che le alidade orientate secondo gli angoli misurati materializzano le tre semirette di rilevamento; di qui la possibilità di schematizzare tale apparecchio su una carta trasparente che va poi adagiata sulla carta nautica operando come prima descritto.

Sempre con due angoli orizzontali simultanei, riferiti a tre punti della costa, oltre all'uso dello stazigrafo ed alla costruzione grafica dei due luoghi circolari, può essere tenuto in considerazione il seguente procedimento (fig. 5.8), semplice nell'esecuzione ed anche di agevole comprensione.

Dagli estremi delle basi AB e BC , cioè dai punti A e C , si traccino dalla parte dell'osservatore le normali alle basi stesse e dal punto interno B si traccino, sempre dalla parte dell'osservatore, due semirette inclinate sulle basi rispettivamente dagli angoli $90^\circ - \alpha_1$ e $90^\circ - \alpha_2$ (entrambi gli angoli sono stati considerati minori di 90°). Tali semirette incontrano le citate normali nei punti D ed E ; l'intersezione della perpendicolare alla congiungente DE abbassata dal punto B definisce la posizione O dell'osservatore.

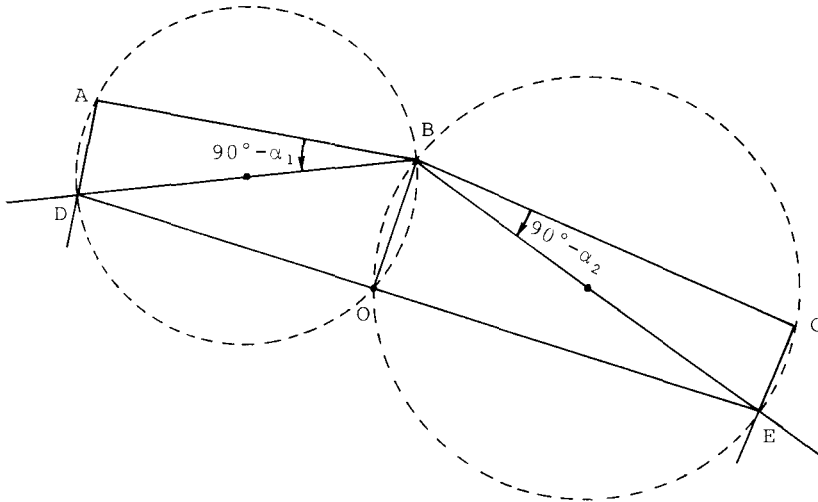


FIG. 5.8.

Per rendere minima l'incertezza sulla posizione occorre, come già precedentemente detto, che i due luoghi s'incontrino ortogonalmente e ciò si verifica quando:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 270^\circ$$

con β l'angolo \widehat{ABC} .

Se invece:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 180^\circ$$

è impossibile determinare la posizione in quanto il quadrilatero $ABCO$ risulta inscritto in una circonferenza (fig. 5.9).

Il punto ottenuto con due segmenti circolari capaci è noto come *punto di Pothenot* o *punto a vertice di piramide*, del quale si fa menzione in tutti i testi di trigonometria piana.

Utili in navigazione presso costa sono gli allineamenti, impiegati sia quali luoghi di posizione che quali rotte di sicurezza; per questo secondo scopo occorre che siano *sensibili* (vedi par. 4.13).

Infine, in caso di necessità, anche le linee batimetriche possono essere di ausilio al navigante. Se queste sono regolarmente distribuite, basterà una sola informazione dello scandaglio per conoscere su quale isobata si trova la nave; in tal caso un rilevamento di un punto noto permetterà di determinare la posizione con discreta precisione.

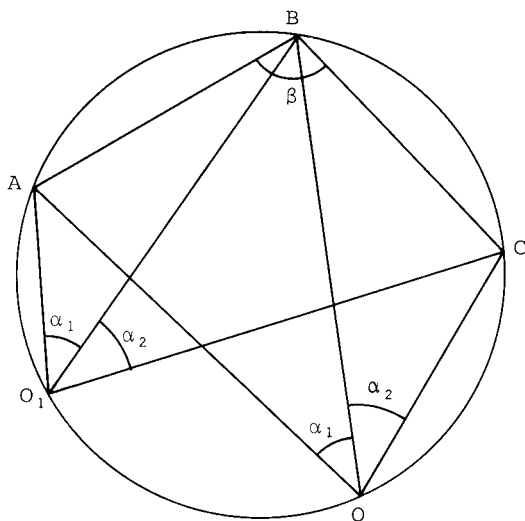


FIG. 5.9.

Spesso, in zone pericolose per la navigazione, uno dei citati luoghi di posizione viene segnato sulla carta nautica allo scopo di utilizzarlo per rimanere nei margini di sicurezza, per cui la misura corrispondente viene denominata *rilevamento, distanza, angolo orizzontale di sicurezza*. La fig. 5.10 tratta, ad esempio, il caso di un angolo orizzontale di sicurezza: per essere certi di evitare i pericoli segnati occorre che l'angolo sotteso ai due punti *A* e *B* sia minore di α .

Non sembra, qui, fuori luogo accennare ai criteri da seguire per una buona condotta della navigazione in prossimità di costa.

Occorre, anzitutto, utilizzare carte nautiche aggiornate ed a grande scala, non tralasciando di consultare il portolano e gli avvisi ai naviganti riguardanti la zona di mare interessata.

Tenere in debito conto vento e corrente e fidarsi dello scandaglio.

Rilevare quando la nave è stabile in rotta e, con mare agitato, quando il rollio ed il beccheggio sono meno vivi. Nel rilevare alla nor-

male muovere il circolo azimutale in modo da non inclinare il piano del traguardo; osservare, poi, punti bassi sull'orizzonte e segnati sulla carta; ugualmente bassi sull'orizzonte debbono essere i due punti rispetto ai quali viene misurato l'angolo orizzontale col sestante o col circolo Amici - Magnaghi.

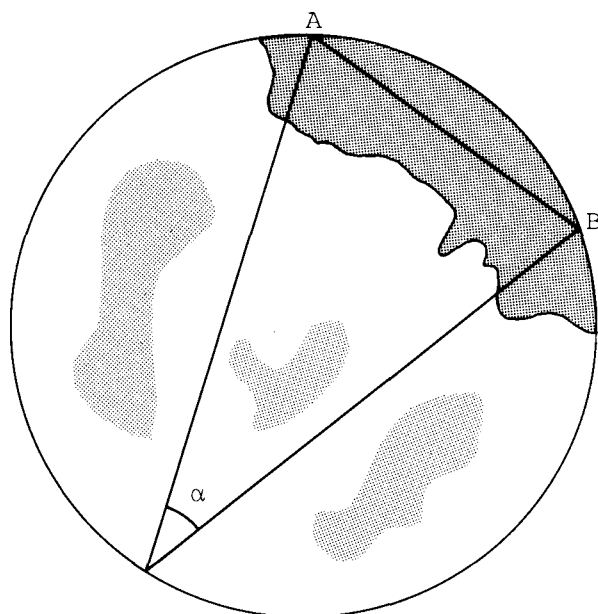


FIG. 5.10.

Col piano del traguardo inclinato, sistemato su bussola magnetica, si commette un errore sulla misura del rilevamento valutato con buona approssimazione dalla seguente relazione:

$$\text{tg } \Delta \text{ Ril} = \text{tg } \Delta a = \text{tg } i \text{ tg } h \text{ sen } \gamma$$

con i l'angolo di inclinazione, h l'altezza del punto rilevato sull'orizzonte e γ l'angolo tra il piano verticale dell'oggetto ed il piano verticale contenente la verticale errata.

In due casi, pur con presenza dell'inclinazione i , è nullo tale errore: quando l'oggetto rilevato è sull'orizzonte ($h = 0^\circ$) e quando è situato sulla circonferenza massima che contiene i due zenit, relativi rispettivamente alla verticale esatta ed a quella errata ($\gamma = 0^\circ$).

La misura dell'angolo tra le visuali condotte a due punti alti sull'orizzonte non rappresenta la differenza d'azimut richiesta. In fig. 5.11 l'an-

golo misurato tra le visuali condotte dall'osservatore O ai due punti A e B è indicato con β , mentre la differenza d'azimut con α . La differenza tra questi due angoli aumenta con l'aumentare delle altezze dei due punti sull'orizzonte.

E continuando sui criteri da tener presente, nel seguire un allineamento di guida, se vi è corrente o vento fresco al traverso, governare più a dritta o più a sinistra del necessario numero di gradi.

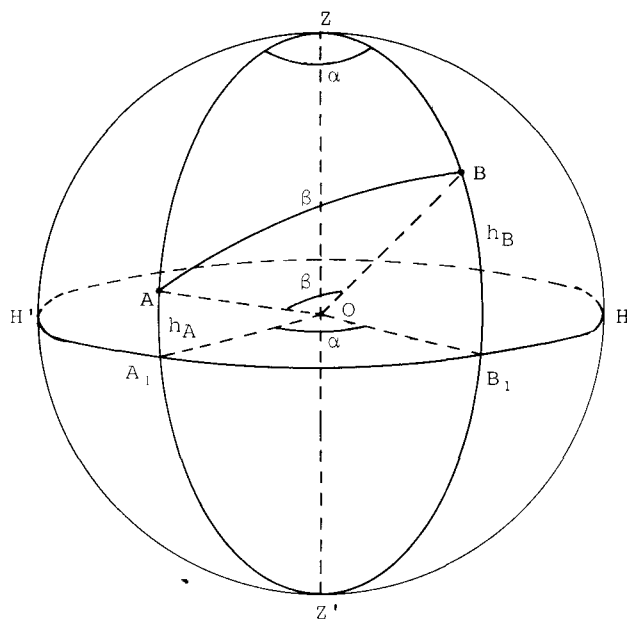


FIG. 5.11.

In prossimità di zone pericolose determinare la posizione con continuità, preferendo i metodi più rigorosi.

Infine, saper stimare ad occhio angoli e distanze: un occhio ben esercitato è in grado di far navigare la nave in passi stretti ed in zone pericolose soltanto con la stima delle distanze.

Nel chiudere questa breve trattazione riguardante la navigazione in prossimità di costa va messo ben in evidenza il grande aiuto fornito dal radar, specialmente in presenza di nebbia ed in passi stretti. Dal radar vengono estratte anche informazioni per la posizione, quali rilevamenti e distanze.

5.7 - DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE IN CASI PARTICOLARI

In particolari casi è richiesta un'alta precisione nella determinazione della posizione, quali rilievi idrografici, posa di cavi sottomarini, ricerche di idrocarburi in mare, prove di velocità e di evoluzione della nave ed ancora per accessi in porti, canali, estuari, resi questi ultimi spesso pericolosi da cattive condizioni meteorologiche.

Una posizione molto precisa è anche richiesta all'inizio di un atterraggio; sovente, poi, la precisione molto spinta è desiderata anche con elevata frequenza.

La posizione, in tutti questi casi, può essere ottenuta sia con tecniche ottiche che con tecniche radioelettriche.

I metodi di posizionamento con tecniche ottiche, oltre a quelli descritti nel paragrafo precedente (navigazione presso coste), comprendono anche quelli trattati nei testi di «Manovra navale» per la determinazione dei parametri della curva di evoluzione della nave. Questi ultimi si dividono in due categorie a seconda che le misure vengono effettuate a bordo o a terra. Il metodo «Risbec», per esempio, appartiene alla prima categoria, quello delle «basi esterne» alla seconda.

Le tecniche radioelettriche permettono di ottenere, come già precedentemente accennato, distanze da punti noti, oppure differenze e somme di distanze da due punti noti; di qui luoghi di posizione piani: circolari, iperbolici ed ellittici.

I relativi sistemi utilizzano frequenze comprese nella gamma delle UF, UHF, SHF con impiego di piccole potenze; di conseguenza: portate molto limitate (sistemi a breve raggio) e l'impiego di antenne e trasmettitori di modeste dimensioni. Questi ultimi sono talmente miniaturizzati da poter essere facilmente trasportati ed installati da una sola persona. È possibile, pertanto, spostare a piacimento le stazioni in modo da avere i reticolati dei luoghi di posizione lì dove sono necessari.

Dovendo, per esempio, effettuare ricerche in vicinanza di una costa per un certo periodo, si installeranno ivi nel miglior modo le stazioni radiotrasmettenti (o i risponditori, se il trasmettitore-ricevitore è a bordo), che verranno poi recuperate a lavoro ultimato.

I ricevitori forniscono con continuità le misure, i cui valori, oltre ad essere opportunamente trasferiti su nastri magnetici, appaiono digitalizzati su quadranti; se muniti di microprocessori, danno la posizione sia in coordinate geografiche che piane (cartesiane o polari).

Oltre ai dati di posizione vengono registrati quelli del tempo e quelli delle specifiche misure di rilievo idrografico effettuato, per poi procedere all'elaborazione a campagna idrografica conclusa.

5.8 - DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE CON TERRA ELLISSOIDICA

Com'è noto, la forma geometrica della Terra che più si avvicina al geode è l'ellissoide di rotazione, i cui parametri sono ben noti. Pertanto, per un'accurata determinazione della posizione occorre riferirsi alla sua superficie, in ogni punto della quale la verticale (normale geoidica) può essere considerata coincidente con la normale alla superficie, dato il piccolissimo valore dell'angolo di deviazione della verticale: dal che nessuna differenza tra coordinate ellissoidiche e geografiche (astronomiche o geodetiche).

Misurare la distanza tra due punti della superficie ellissoidica significa ottenere il valore dell'arco di geodetica passante per questi; il luogo di posizione non è più una circonferenza minore, come avviene nel caso di Terra sferica (sfera di Gauss, che conserva le latitudini geografiche).

Si pensi pure alla circonferenza di altezza considerata sulla sfera celeste e proiettata sulla superficie terrestre.

Il rilevamento (o azimut) di un punto noto fornisce l'angolo tra il meridiano del mobile ed una ben definita sezione normale (quella relativa al piano verticale di collimazione) che non coincide con la geodetica passante per il punto ed il mobile; di conseguenza la differenza di rilevamento tra due punti rappresenta l'angolo tra due sezioni normali.

Non è difficile qui pensare ad un diverso andamento, rispetto al caso sferico, della curva d'azimut e di quella di uguale differenza d'azimut; se tale differenza è uguale a 0° o 180° il luogo di posizione è definito dalla sezione normale relativa al piano verticale passante per i due punti. È ancora una sezione normale il luogo di posizione del mobile quando questo viene rilevato da un punto noto.

Molte di queste osservazioni restano, però, pure disquisizioni, se ci si riferisce a misure effettuate rispetto a punti non molto lontani, per cui rimane valido operare sulla sfera. Il problema della sostituzione dell'ellissoide alla sfera resta soltanto per misure di distanze, di differenze o di somme tra queste, relative a punti molto lontani (varie centinaia di miglia), misure che possono essere effettuate soltanto con tecniche radioelettriche.

Le radioonde si propagano proprio secondo linee geodetiche e le distanze misurate relative a punti lontani vanno intese quali archi di geodetiche; con differenze o somme di distanze i relativi luoghi di posizione sono iperboli o ellissi ellissoidiche.

Ancora l'ellissoide viene tenuto in considerazione negli algoritmi per la determinazione della posizione con misure di distanze o di differenze di distanze da satelliti artificiali.

INCERTEZZA DELLA POSIZIONE

6.1 - GENERALITÀ

Gli errori sulle misure dei parametri di navigazione, come su qualsiasi altra misura, constano generalmente di una componente aleatoria e di una sistematica.

L'influenza della componente aleatoria può con speciali accorgimenti essere ridotta ma mai eliminata, al contrario di quella sistematica, denominata *bias* dagli anglosassoni, che può essere corretta o eliminata, essendone quasi sempre nota la causa o la legge secondo la quale viene generata. A volte, però, piccoli errori di natura sistematica vengono inclusi nel *rumore*.

Gli errori di misura inficiano i luoghi di posizione: di qui le loro rispettive incertezze e quella, poi, della posizione ottenuta. È sulla precisione di quest'ultima che ci si vuole un po' intrattenere in questo capitolo, sia dal lato deterministico che da quello statistico.

6.2 - VALUTAZIONE DETERMINISTICA DELL'INCERTEZZA DELLA POSIZIONE

Per tale valutazione i luoghi di posizione vengono considerati affetti da date incertezze, prendendo in esame prima il caso piano e poi quello spaziale.

6.2.1 - Caso piano

La fig. 6.1 considera la posizione ottenuta dall'intersezione delle due rette di posizione r_1 ed r_2 , affette rispettivamente delle incertezze $\pm \delta s_1$ e $\pm \delta s_2$, valori massimi.

La posizione del mobile va ricercata all'interno o al massimo sul perimetro del parallelepipedo $ABCD$, detto *parallelogramma degli errori* o *parallelogramma di certezza o d'incertezza*.

La valutazione dell'incertezza della posizione può essere fornita dall'area di tale parallelogramma o dalla lunghezza della sua semidiagonale maggiore.

L'area S del parallelogramma è data da:

$$S = AB \cdot CF$$

ma:

$$AB = AE \operatorname{cosec} \alpha = 2 \delta s_1 \operatorname{cosec} \alpha \quad CF = 2 \delta s_2$$

per cui:

$$S = \frac{4 \delta s_1 \delta s_2}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (6.1)$$

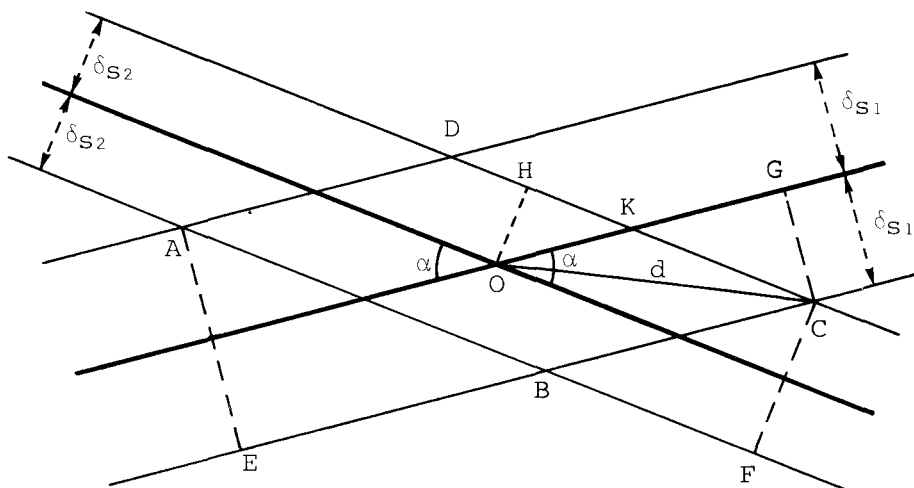


FIG. 6.1.

La semidiagonale maggiore d risulta, tenendo presente il triangolo OCK :

$$d = (CK^2 + OK^2 + 2 CK \cdot OK \cos \alpha)^{1/2}$$

ma:

$$CK = CG \operatorname{cosec} \alpha = \delta s_1 \operatorname{cosec} \alpha \quad OK = OH \operatorname{cosec} \alpha = \delta s_2 \operatorname{cosec} \alpha$$

e quindi:

$$d = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} (\delta s_1^2 + \delta s_2^2 + 2 \delta s_1 \delta s_2 \cos \alpha)^{1/2} \quad (6.2)$$

Per $\alpha = 90^\circ$ si ha la minima incertezza; in tal caso:

$$S_{\min} = 4 \delta s_1 \delta s_2 \quad d_{\min} = (\delta s_1^2 + \delta s_2^2)^{1/2}$$

risultando il parallelogramma un rettangolo di lati δs_1 e δs_2 ed ancora un quadrato se $\delta s_1 = \delta s_2$.

Con $\delta s_1 = \pm 1 \text{ mg}$, $\delta s_2 = \pm 2 \text{ mg}$ e per $\alpha = 30^\circ$ risultano $S = 16 \text{ mg}^2$ e $d = 5.8 \text{ mg}$; con le stesse incertezze e per $\alpha = 90^\circ$ $S_{\min} = 8 \text{ mg}^2$ e $d_{\min} = 2.24 \text{ mg}$.

La fig. 6.2 riguarda la determinazione della posizione con le tre rette di posizione r_1 , r_2 ed r_3 , affette rispettivamente delle incertezze $\pm \delta s_1$, $\pm \delta s_2$ e $\pm \delta s_3$. Sono diversamente indicati i tre parallelogrammi d'errori relativi agli accoppiamenti delle rette $r_1 - r_2$, $r_1 - r_3$, $r_2 - r_3$; parti di tali parallelogrammi capitano nell'interno del triangolo $O_1 O_2 O_3$ formato dalle tre rette di posizione e ciò si verifica sempre, per qualsiasi importo delle incertezze.

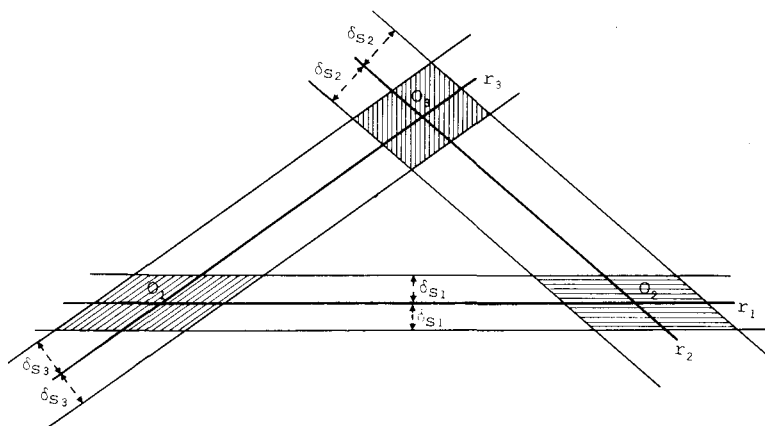


FIG. 6.2.

Di qui la ricerca del punto più probabile nell'interno del triangolo seguendo una delle costruzioni di cui al par. 5.4.

Se le rette r_1 ed r_2 di fig. 6.1 sono due rette di distanza o d'altezza di pari incertezza (valore e segno), dovuta ad esempio ad un errore sistematico sulle misure, il mobile si trova sulla bisettrice della coppia di angoli α definita dalla relazione $\alpha = 180^\circ - \Delta a$, con Δa la differenza d'azimut tra i due punti noti o tra i due astri.

La bisettrice, com'è noto, viene denominata bisettrice di distanza o d'altezza che s'identifica con la retta iperbolica relativa alla differenza tra le due distanze o le due altezze misurate.

Non è superfluo rammentare che la coppia di angoli interessata alla bisettrice può essere individuata dalla combinata convergenza e divergenza delle frecce di cui vengono munite le rette di posizione, indicanti le direzioni azimutali dei due punti noti o dei due astri.

Con la presenza anche di un errore aleatorio la bisettrice diventa un luogo errato, la cui incertezza ha per espressione la (3.17) che qui si riporta:

$$\delta s = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Delta Z}{2} \delta \Delta d$$

Se δd_1 e δd_2 sono gli errori complessivi sulle due distanze (o sulle due altezze), indicando con δd_s la componente sistematica comune e con δd_{a1} e δd_{a2} quella aleatoria per l'una e l'altra distanza, si ha:

$$\delta d_1 = \delta d_s + \delta d_{a1} \quad \delta d_2 = \delta d_s + \delta d_{a2}$$

L'errore $\delta \Delta d$ risulta essere:

$$\delta \Delta d = \Delta d_e - \Delta d = (d_{1e} - d_{2e}) - (d_1 - d_2)$$

con d_1 e d_2 le distanze esatte e d_{1e} , d_{2e} quelle misurate ed errate. Essendo:

$$d_{1e} = d_1 + \delta d_1 \quad d_{2e} = d_2 + \delta d_2$$

risulta:

$$\delta \Delta d = \delta d_{a1} - \delta d_{a2}$$

per cui l'incertezza della bisettrice diventa:

$$\delta s = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\Delta Z}{2} (\delta d_{a1} - \delta d_{a2})$$

Il minimo valore di δs si ottiene con $\Delta Z = 180^\circ$, in tal caso:

$$\delta s_{\min} = \pm \frac{1}{2} (\delta d_{a1} - \delta d_{a2})$$

e la bisettrice viene detta *bisettrice ottima*.

Due rette di distanza o d'altezza permettono, dunque, di avere un luogo di posizione esente dall'errore sistematico, la bisettrice di distanza o d'altezza.

Si considerino, ora, rette di distanza o di altezza le tre rette di fig. 6.2. Affette soltanto dello stesso errore sistematico, la posizione va individuata nel punto d'incontro delle bisettrici (almeno due) degli angoli del triangolo, opportunamente definiti. Tale punto cade all'interno o all'esterno del triangolo secondo che la somma di due differenze d'azimut consecutive dei punti considerati per la misura delle distanze o degli astri sia maggiore o minore di 180° . Se poi le tre direzioni azimutali sono uniformemente distribuite nell'orizzonte, se cioè le differenze d'azimut dei punti o degli astri sono tutte uguali a 120° , l'incontro delle bisettrici coincide col *PPP*.

La distanza del punto ottenuto dall'incontro delle bisettrici da una delle tre rette rappresenta l'importo dell'errore sistematico. Per le rette di distanza tale errore è positivo se le direzioni azimutali sono rivolte verso il punto, altrimenti è negativo; al contrario per le rette d'altezza (considerando l'errore sulle altezze e non sulle distanze zenitali).

Poca fiducia occorre porre sul punto d'incontro delle bisettrici quando oltre all'errore sistematico è certa la presenza di un errore aleatorio sulle tre rette, specialmente se l'incontro delle bisettrici cade all'esterno del triangolo.

Con quattro o più rette di posizione, come già accennato nel par. 5.4, la ricerca grafica del *PPP* nell'interno del poligono formato dalle rette è molto complessa.

Nel caso specifico di quattro rette di distanza o di altezza affette di errore sistematico è possibile ottenere la posizione dall'intersezione di due bisettrici ottime; per questo occorre che la differenza d'azimut tra i punti noti o tra gli astri sia di 90° .

Se le zone d'altezza delle due coppie di rette rispetto alle quali vengono tracciate le bisettrici hanno uguale ampiezza, la distanza del punto ottenuto dall'incontro delle bisettrici da una delle quattro rette fornisce per l'appunto l'importo dell'errore sistematico. Per il segno di tale errore vale quanto precedentemente esposto trattando il caso di tre rette di distanza o d'altezza.

Se le zone non hanno pari ampiezza, l'errore sistematico può essere considerato uguale alla media delle due distanze del punto d'incontro delle bisettrici da una retta di ciascuna coppia. Indicando con d_1 e d_2 tali distanze, si ha:

$$e_s = \delta d_s = \delta h_s = \frac{d_1 + d_2}{2} \pm \sigma_{es} = \frac{d_1 + d_2}{2} \pm \frac{d_1 - d_2}{2}$$

con σ_{es} la deviazione standard di tale errore, poco attendibile dato l'esiguo numero delle misure a disposizione (soltanto due).

Evidentemente dev'esserci concomitanza di orientamento delle frecce riportate dalle rette per indicare le direzioni azimutali rispetto al punto ottenuto dall'intersezione delle bisettrici. In caso contrario, una delle quattro rette risulta affetta di un sensibile errore aleatorio, per cui si consiglia di essere cauti nell'affidarsi alle bisettrici; meglio localizzare il mobile nel poligono formato dalle rette.

6.2.2 - *Caso spaziale*

Come nel caso piano, considerando due piani di posizione derivanti da misure di distanze da due punti dello spazio affette soltanto di errore sistematico, si può parlare di un piano di posizione esente da tale errore, piano che biseca la coppia di angoli diedri α ottenuta dal loro incontro, legata all'angolo β tra le direzioni ai due punti dello spazio dalla relazione:

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

Un tale piano non è altro che il risultato della linearizzazione, in prossimità della posizione stimata dell'osservatore, dell'iperboloide di rotazione relativo alla differenza delle due distanze misurate.

Senza andare oltre su tale argomento, si consideri la posizione ottenuta da tre generici piani di posizione, indicati con u_1 , u_2 e u_3 , affetti rispettivamente delle incertezze $\pm \delta s_1$, $\pm \delta s_2$ e $\pm \delta s_3$, valori massimi. La posizione del mobile va ricercata nell'interno o al massimo sulla superficie del parallelepipedo formato dai luoghi esatti, *parallelepipedo degli errori* o *parallelepipedo di certezza* o *d'incertezza*.

Ragionando similmente al caso piano, la valutazione dell'incertezza della posizione viene fornita dal volume di tale parallelepipedo o dall'entità della sua semidiagonale maggiore.

Detti α e β gli angoli d'intersezione (angoli diedri) rispettivamente tra i piani u_1 e u_2 , u_1 e u_3 , il volume risulta espresso da:

$$V = \frac{8 \delta s_1 \delta s_2 \delta s_3}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta} \quad (6.4)$$

mentre la semidiagonale maggiore da:

$$d = \frac{1}{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta} [(\delta s_1^2 + \delta s_2^2 + 2 \delta s_1 \delta s_2 \cos \alpha) \text{sen}^2 \beta + \delta s_3^2 \text{sen}^2 \alpha + (\delta s_1^2 + \delta s_2^2 + 2 \delta s_1 \delta s_2 \cos \alpha)^{1/2} \text{sen } \alpha \text{sen } 2 \beta]^{1/2} \quad (6.5)$$

Di qui la minima incertezza per $\alpha = \beta = 90^\circ$; in tal caso:

$$V_{\min} = 8 \delta s_1 \delta s_2 \delta s_3 \quad d_{\min} = (\delta s_1^2 + \delta s_2^2 + \delta s_3^2)^{1/2}$$

Con $\delta s_1 = \pm 1$ mg, $\delta s_2 = \pm 3$ mg, $\delta s_3 = \pm 2$ mg e per $\alpha = \beta = 30^\circ$ risultano $V = 192$ mg³ e $d = 10.2$ mg; con le medesime incertezze e per $\alpha = \beta = 90^\circ$ $V_{\min} = 48$ mg³ e $d_{\min} = 3.74$ mg.

6.3 - VALUTAZIONE STATISTICA DELL'INCERTEZZA DELLA POSIZIONE

Supponendo annullata la componente sistematica degli errori sulle misure effettuate, si rimane in presenza soltanto di quella aleatoria, la cui influenza sulla precisione della posizione non è affatto trascurabile.

6.3.1 - Volume e zona di certezza (o d'incertezza) statistica

È noto che all'errore δL sulla misura L di un dato parametro di navigazione corrisponde l'incertezza δs del relativo luogo di posizione, da calcolare con la (1.18).

Degli errori di misura δL_i di un dato parametro di navigazione, considerati aleatori gaussiani, è possibile calcolare la deviazione standard $\sigma_{\delta L}$ e da questa ottenere di conseguenza quella della incertezza $\sigma_{\delta s}$ del corrispondente luogo di posizione.

Tanto premesso, dato un luogo di posizione, ottenuto a seguito della media di una serie di misure, se si considerano, a guisa del caso deterministico, altri due luoghi paralleli e distanti dal primo di $\pm \sigma_{\delta s}$, si viene a delimitare un volume o una superficie (o striscia) in cui si trova il luogo di posizione esatto (piano o retta di posizione) con una probabilità del 68.27%.

Similmente, se la distanza di questi due luoghi dal primo è di $\pm 0.6745 \sigma_{\delta s}$ si ha il volume o striscia con probabilità del 50%, assumendo la denominazione, in questo specifico caso, di *volume probabile* e *striscia probabile*.

Si consideri, ora, la determinazione della posizione con tre piani di posizione opportunamente orientati, ottenuto ciascun piano da una serie di misure con l'ipotesi che gli errori commessi sulle misure della prima serie siano indipendenti da quelli commessi sulle misure delle altre due serie, errori, per ogni serie, di natura aleatoria gaussiana (valore medio nullo e con deviazione standard $\sigma_{\delta L_i}$ ($i = 1, 2, 3$)).

Tenendo presente per i tre piani i volumi di certezza (o d'incertezza) relativi alla probabilità del 68.27%, costruiti con $\pm \sigma_{\delta s_i}$ ($i = 1, 2, 3$), si ottiene un parallelepipedo: la probabilità che la posizione del mobile capiti all'interno di questo è solamente del 31.8% (prodotto delle probabilità).

Nel caso piano le due strisce di probabilità del 68.27%, costruite con $\pm \sigma_{\delta s_i}$ ($i = 1, 2$), danno luogo ad un parallelogramma e la probabilità che la posizione del mobile capiti nel suo interno è del 46.6%.

I contorni del parallelepipedo e del parallelogramma non sono però luoghi di uguale densità di probabilità; basti pensare, nel caso del parallelogramma, a due uguali e limitate aree, l'una situata nei pressi del centro e l'altra presso uno dei vertici: la probabilità che la posizione capiti nella prima area è maggiore di quella relativa alla seconda.

La figura 6.3 considera la posizione ottenuta con tre piani, u_i ($i = 1, 2, 3$), ciascuno affetto di una propria incertezza δs_i ($i = 1, 2, 3$). I punti O ed O_e rappresentano rispettivamente la posizione esatta ed errata del mobile. Nel punto O è ubicata l'origine di una terna di assi cartesiani comunque orientata.

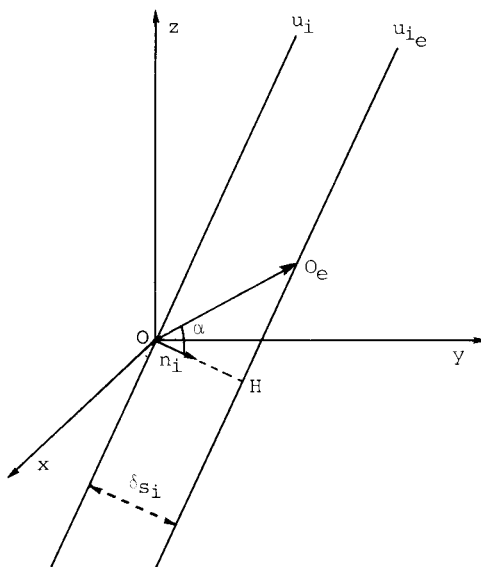


FIG. 6.3.

Considerando in O il vettore \vec{n}_i della normale al piano di posizione errato u_{ie} , si ha:

$$\vec{n}_i \cdot \vec{OO}_e = \delta s_i$$

relazione che risulta così esplicitata:

$$a_i x + b_i y + c_i z = \delta s_i \quad (6.6)$$

con a_i, b_i, c_i i coseni direttori del vettore \vec{n}_i rispetto agli assi coordinati ed x, y, z le coordinate del punto errato O_e .

Per i tre piani di posizione considerati, tenendo presente la (6.6), si ottiene il seguente sistema, scritto in forma compatta:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{s} \quad (6.7)$$

con \mathbf{A} la matrice (3×3) dei coseni direttori dei versori delle normali abbassate dalla posizione esatta ai piani errati, \mathbf{x} il vettore colonna delle coordinate della posizione errata, \mathbf{s} il vettore colonna delle incertezze dei tre luoghi di posizione.

Le tre coordinate x, y, z sono delle variabili aleatorie gaussiane con valori medi nulli e con deviazioni standard rispettivamente $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, facilmente calcolabili in funzione di δs_i , ma, al contrario delle incertezze, non sono indipendenti. Infatti, non c'è ragione perché siano nulli i numeratori dei coefficienti di correlazione:

$$r_{xy} = \frac{E[x y]}{\sigma_x \sigma_y} \quad r_{xz} = \frac{E[x z]}{\sigma_x \sigma_z} \quad r_{yz} = \frac{E[y z]}{\sigma_y \sigma_z}$$

È però possibile trovare quel particolare orientamento degli assi cartesiani da rendere nulli tali numeratori: i nuovi assi vengono denominati *assi principali del sistema* (6.7).

Essendo, come già detto, i componenti del vettore \mathbf{x} variabili aleatorie gaussiane, la loro densità di probabilità è data da:

$$p(\mathbf{x}) = p(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\mathbf{Q}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}} \quad (6.8)$$

con \mathbf{Q} la matrice di covarianza delle variabili x, y, z :

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^T] = \begin{pmatrix} E[x^2] & E[x y] & E[x z] \\ E[y x] & E[y^2] & E[y z] \\ E[z x] & E[z y] & E[z^2] \end{pmatrix}$$

e con $|\mathbf{Q}|^{1/2}$ la radice quadrata del determinante della stessa matrice che è simmetrica e definita positiva.

L'esponente della (6.8) è una forma quadratica per cui la sua espressione $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} = c^2$ definisce una superficie S_c sulla quale la densità di probabilità è costante ed uguale a p_c . Annullandosi la densità all'infinito in tutte le direzioni ed in virtù della simmetria delle leggi di probabilità, la superficie S_c è chiusa ed appartiene ad un solido con centro nell'origine degli assi, un ellissoide come si noterà appresso.

Rispetto a quel particolare orientamento della terna cartesiana, sempre con origine in O , che rende nulli i coefficienti di correlazione, la matrice di covarianza delle nuove coordinate x' , y' , z' , tra loro indipendenti, è data da:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} E[x'^2] & 0 & 0 \\ 0 & E[y'^2] & 0 \\ 0 & 0 & E[z'^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

con σ_x , σ_y , σ_z le deviazioni standard delle nuove coordinate.

La densità di probabilità nel caso specifico risulterà:

$$p(\mathbf{x}') = p(x', y', z') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{\sigma_x^2} + \frac{y'^2}{\sigma_y^2} + \frac{z'^2}{\sigma_z^2} \right)} \quad (6.9)$$

e l'espressione esponenziale:

$$\frac{x'^2}{\sigma_x^2} + \frac{y'^2}{\sigma_y^2} + \frac{z'^2}{\sigma_z^2} = c^2 \quad (6.10)$$

indica ora con chiarezza che la superficie di uguale densità di probabilità p_c è quella di un ellissoide i cui assi coincidono con quelli della nuova terna cartesiana. I semiassi dell'ellissoide sono dati da:

$$a_1 = c \sigma_x \quad a_2 = c \sigma_y \quad a_3 = c \sigma_z \quad (6.11)$$

Ritornando alla (6.8), l'integrale:

$$P = \int_{p \leq p_c} p(x, y, z) dx dy dz \quad (6.12)$$

dà la probabilità che un punto di coordinate x , y , z si trovi all'interno dell'ellissoide sulla superficie del quale la densità di probabilità è p_c . Tra i tanti ellissoidi di probabilità, ciascuno riferito ad un dato valore di P , quello relativo a $P = 0.5$ è detto *ellissoide d'errore probabile* nell'interno del quale si trova il 50% delle posizioni del mobile.

Tenendo presente la (6.9) e la (6.10), la probabilità P data dalla (6.12) risulta:

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_0^c e^{-\frac{1}{2} c^2} dx' dy' dz' \quad (6.13)$$

Per l'integrazione della (6.13) si consideri un sistema di coordinate sferiche polari con origine nel punto O , l'asse polare coincidente con l'asse z' ed il piano polare di riferimento contenente l'asse x' . Dette ρ , α , β tali coordinate ed esprimendo ciascuna coordinata cartesiana in unità di rispettiva deviazione standard, si ha (fig. 6.4):

$$\frac{x'}{\sigma_{x'}} = \rho \cos \beta \cos \alpha$$

$$\frac{y'}{\sigma_{y'}} = \rho \cos \beta \sin \alpha$$

$$\frac{z'}{\sigma_{z'}} = \rho \sin \beta$$

per cui il parametro c risulta uguale al raggio vettore ρ ed il volume infinitesimo $\frac{dx'}{\sigma_{x'}} \frac{dy'}{\sigma_{y'}} \frac{dz'}{\sigma_{z'}}$ a $\rho^2 d\rho d\alpha d\beta \cos\beta$.

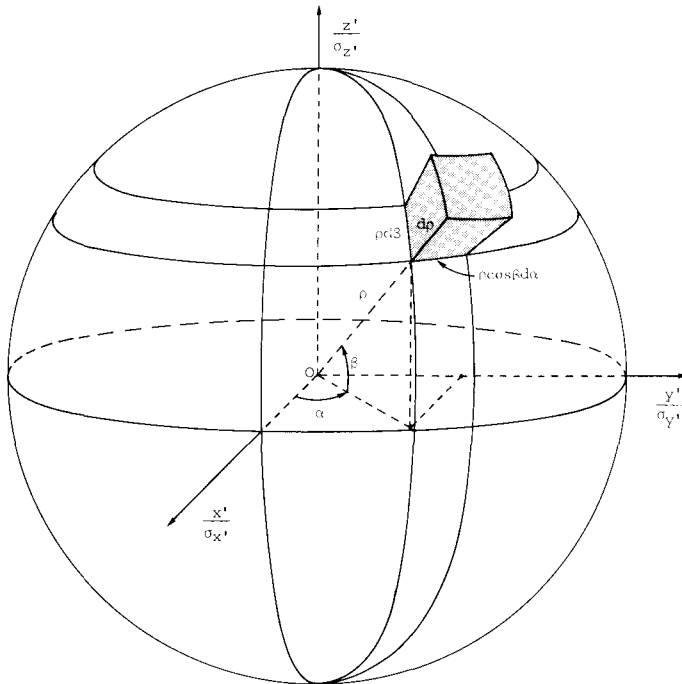


FIG. 6.4.

Tanto sostituendo nella (6.13) si ottiene:

$$P = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\beta \, d\beta \int_0^{\rho} \rho^2 e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \int_0^{\rho} \rho^2 e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

Essendo poi:

$$\int_0^{\rho} \rho^2 e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = - \int_0^{\rho} \rho \, d\left(e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\right) = -\rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} + \int_0^{\rho} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

e risolvendo l'ultimo integrale mediante lo sviluppo in serie di $e^{-\frac{1}{2}\rho^2}$ si giunge, per essere $\rho = c$, a:

$$P = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \left[-c e^{-\frac{1}{2}c^2} + c - \frac{c^3}{6} + \frac{c^5}{40} - \frac{c^7}{336} + \frac{c^9}{3456} - \frac{c^{11}}{42240} + \dots \right] \quad (6.14)$$

espressione che lega la probabilità P col parametro c che caratterizza gli ellissoidi di probabilità; l'espressione è rappresentata dal grafico di fig. 6.5.

Per $P = 0.5$ risulta $c \approx 1.535$.

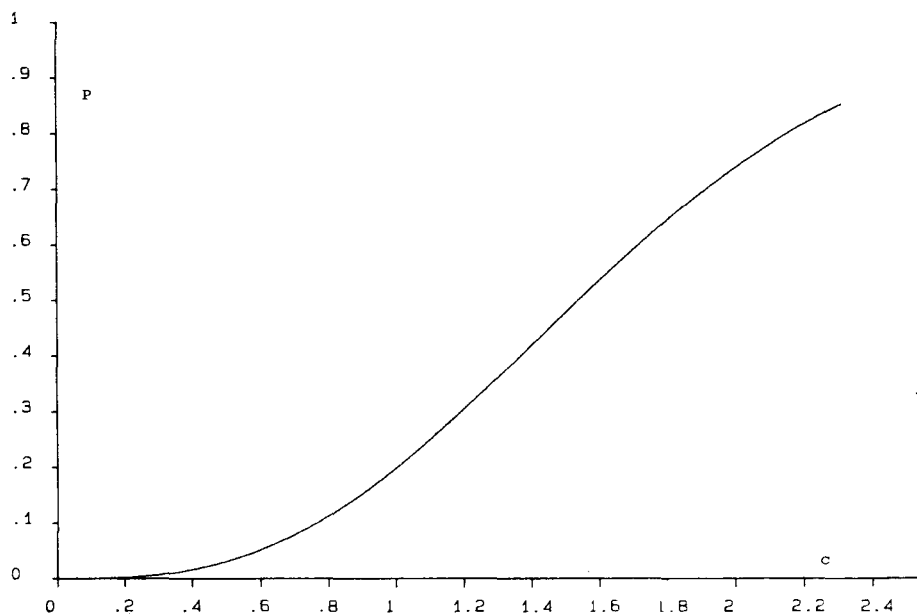


FIG. 6.5.

Agli ellissoidi di probabilità possono essere sostituite, con buone approssimazioni, delle sfere, dette *sfere di probabilità*, i cui raggi risultano pressappoco uguali alla media dei loro rispettivi semiassi; per l'ellissoide d'errore probabile si ha, quindi, la *sfera d'errore probabile* il cui raggio è:

$$r_{SEP} \approx 0,51 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.15)$$

6.3.2 - Caso piano

In caso di determinazione della posizione nel piano con due luoghi rettilinei la densità di probabilità è data da:

$$p(\mathbf{x}) = p(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y (1-r^2)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right)} \quad (6.16)$$

per essere:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} E[x^2] & E[xy] \\ E[yx] & E[y^2] \end{pmatrix}$$

con:

$$E[x^2] = \sigma_x^2 \quad E[y^2] = \sigma_y^2 \quad E[xy] = r \sigma_x \sigma_y$$

L'espressione ad esponente della (6.16):

$$\frac{1}{1-r^2} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{xy}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \quad (6.17)$$

esprime l'equazione della curva piana chiusa U_c , con centro nel punto origine degli assi cartesiani comunque orientati, punto O di fig. 6.6, con r_1 ed r_2 le due rette di posizione esatte ed r_{1e} e r_{2e} quelle errate. Su tale curva, un'ellisse, la densità di probabilità è costante ed uguale a p_c .

Come nel caso precedentemente analizzato (localizzazione con piani di posizione), viene considerata quella particolare coppia di assi cartesiani, sempre con origine in O , per la quale si annulla il coefficiente di correlazione:

$$r = \frac{E[xy]}{\sigma_x \sigma_y}$$

La (6.16), di conseguenza, acquista la seguente espressione:

$$p(\mathbf{x}') = p(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'^2}{\sigma_x^2} + \frac{y'^2}{\sigma_y^2}\right)} \quad (6.18)$$

avente ad esponente l'equazione canonica di un'ellisse:

$$\frac{x'^2}{\sigma_x^2} + \frac{y'^2}{\sigma_y^2} = c^2 \quad (6.19)$$

i cui semiassi, situati sui nuovi assi cartesiani, sono dati da:

$$a_1 = c\sigma_x \quad a_2 = c\sigma_y \quad (6.20)$$

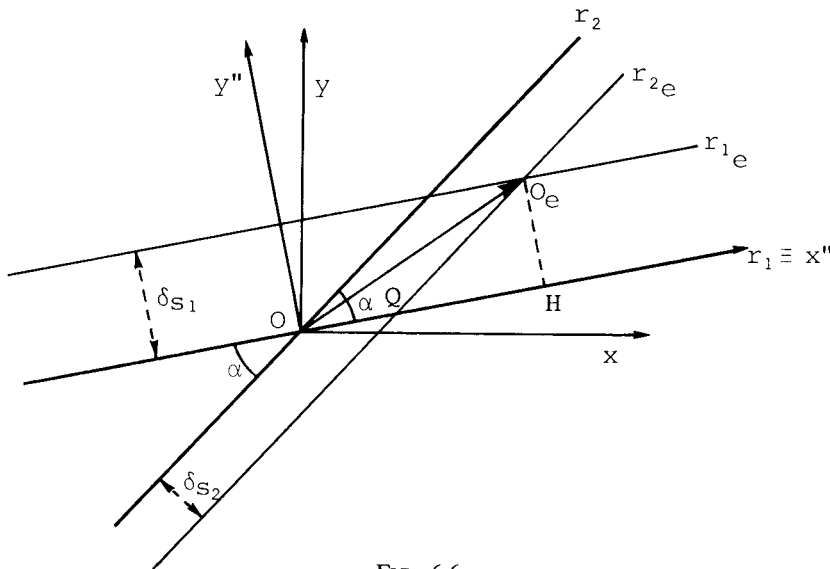


FIG. 6.6.

Pertanto la probabilità che un punto si trovi nell'interno dell'ellisse sulla quale la densità di probabilità è p_c , tenendo presente la (6.18) e la (6.19) è data:

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_0^c e^{-\frac{1}{2}c^2} dx' dy' \quad (6.21)$$

Per l'integrazione della (6.21), come già fatto nel paragrafo precedente, viene considerato un sistema di coordinate polari con origine nel

punto O e con l'asse polare coincidente con l'asse x' (fig. 6.7). Le coordinate ρ, θ sono legate a quelle cartesiane x', y' , rispettivamente espresse in unità σ_x e σ_y , dalle relazioni:

$$\frac{x'}{\sigma_x} = \rho \cos \theta$$

$$\frac{y'}{\sigma_y} = \rho \sin \theta$$

per cui si ricava:

$$c = \rho \quad \frac{dx'}{\sigma_x} \frac{dy'}{\sigma_y} = \rho d\rho d\theta$$

e la (6.21) risulta:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} \rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = 1 - e^{-\frac{1}{2}c^2} \quad (6.22)$$

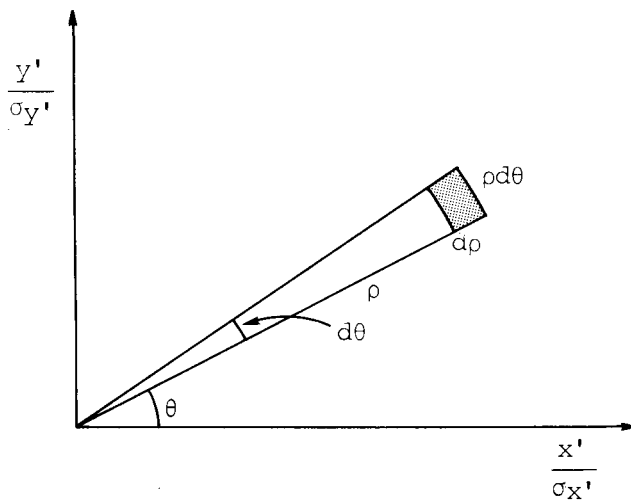


FIG. 6.7.

Ad ogni valore di P corrisponde un dato valore di c e quindi una data ellisse di probabilità; per $P = 0.5$ risulta $c = 1.1774$ e la relativa ellisse, *ellisse d'errore probabile*, ha per semiassi:

$$a_1 = 1.1774 \sigma_x \quad a_2 = 1.1774 \sigma_y$$

Se la generica coppia di assi cartesiani è invece vincolata alle due rette di posizione, per esempio uno degli assi coincidente con la retta r_1 di fig. 6.6 e l'altro a questa normale, le coordinate del punto O_e sono date da:

$$\begin{aligned}x'' &= OQ + QH = \delta s_2 \operatorname{cosec} \alpha + \delta s_1 \cotg \alpha \\y'' &= HO_e = \delta s_1\end{aligned}\quad (6.23)$$

Di qui la considerazione che, al contrario delle incertezze dei due luoghi di posizione, le coordinate x'' ed y'' non sono indipendenti.

Tenendo presente le (6.23), le varianze delle due coordinate ed il loro coefficiente di correlazione sono:

$$\begin{aligned}\sigma_{x''}^2 &= \sigma_{\delta s_1}^2 \cotg^2 \alpha + \sigma_{\delta s_2}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha & \sigma_{y''}^2 &= \sigma_{\delta s_1}^2 \\r &= \frac{\sigma_{\delta s_1} \cotg \alpha}{(\sigma_{\delta s_1}^2 \cotg^2 \alpha + \sigma_{\delta s_2}^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha)^{1/2}}\end{aligned}\quad (6.24)$$

La (6.17) per questo nuovo orientamento di assi va così riscritta:

$$\frac{1}{1-r^2} \left(\frac{x''^2}{\sigma_{x''}^2} - 2r \frac{x'' y''}{\sigma_{x''} \sigma_{y''}} + \frac{y''^2}{\sigma_{y''}^2} \right) = c^2$$

espressione che per le relazioni (6.24) diventa:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} x''^2 - 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} x'' y'' + \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} + \frac{1}{\sigma_{\delta s_1}^2} \right) y''^2 = c^2 \quad (6.25)$$

ed ancora:

$$A x''^2 + B x'' y'' + C y''^2 + D = 0 \quad (6.26)$$

con:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} & B &= -2 \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} \\C &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{\delta s_2}^2} + \frac{1}{\sigma_{\delta s_1}^2} & D &= -c^2\end{aligned}\quad (6.27)$$

La (6.26) rappresenta l'equazione di un'ellisse per essere:

$$B^2 - 4AC = -\frac{4}{\sigma_{\delta s_1}^2 \sigma_{\delta s_2}^2} \operatorname{sen}^2 \alpha < 0$$

Per riferire l'ellisse a quella già nota coppia di assi cartesiani ($O x' y'$) rispetto alla quale è nullo il coefficiente di correlazione delle due relative coordinate, coppia i cui assi coincidono con quella della curva, occorre tener conto delle seguenti relazioni di corrispondenza, facilmente deducibili dalla fig. 6.8

$$x'' = OS - PQ = x' \cos \beta - y' \sin \beta$$

$$y'' = QS + O_e P = x' \sin \beta + y' \cos \beta$$

Queste, sostituite nella (6.26), danno:

$$A_1 x'^2 + B_1 x' y' + C_1 y'^2 + D_1 = 0 \quad (6.28)$$

con:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos^2 \beta + B \sin \beta \cos \beta + C \sin^2 \beta \\ B_1 &= B \cos 2\beta - (A - C) \sin 2\beta \\ C_1 &= A \sin^2 \beta - B \sin \beta \cos \beta + C \cos^2 \beta \\ D_1 &= D \end{aligned} \quad (6.29)$$

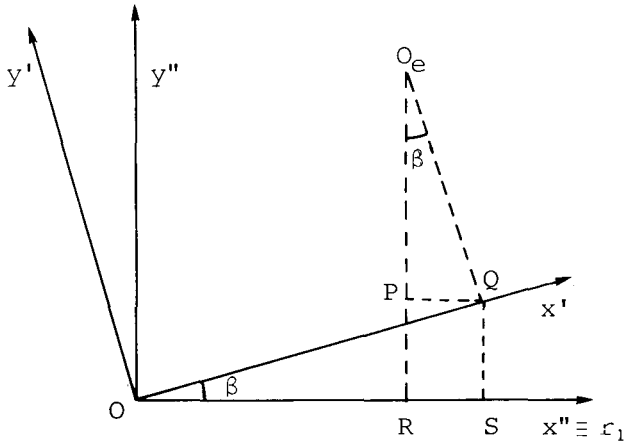


FIG. 6.8.

Per ottenere dalla (6.28) l'equazione canonica dell'ellisse bisogna che sia in essa $B_1 = 0$; dalla seconda delle (6.29) risulta di conseguenza:

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{B}{A - C} \quad (6.30)$$

e quindi per la (6.27):

$$\operatorname{tg} 2 \beta = \frac{\sigma_{\delta s_1}^2 \operatorname{sen} 2 \alpha}{\sigma_{\delta s_1}^2 \cos 2 \alpha + \sigma_{\delta s_2}^2} \quad (6.31)$$

Con $B_1 = 0$, tenendo presente la (6.28), i due semiassi dell'ellisse risultano:

$$a_1^2 = -\frac{D_1}{A_1} \quad a_2^2 = -\frac{D_1}{C_1} \quad (6.32)$$

Sommando e sottraendo, membro a membro, le relazioni A_1 e C_1 (prima e terza delle (6.29)), si ricava:

$$\begin{aligned} A_1 + C_1 &= A + C \\ A_1 - C_1 &= (A - C) \cos 2 \beta + B \operatorname{sen} 2 \beta \end{aligned}$$

esprimendo $\operatorname{sen} 2 \beta$ e $\cos 2 \beta$ in funzione di $\operatorname{tg} 2 \beta$ e tenendo presente la (6.30) si perviene, sommando e sottraendo ancora membro a membro, a:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} [(A + C) + \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] \\ C_1 &= \frac{1}{2} [(A + C) - \sqrt{B^2 + (A - C)^2}] \end{aligned}$$

relazioni, queste, che con la quarta delle (6.29), in virtù poi delle (6.27), permettono di esplicitare le (6.32), ottenendo:

$$a_{1,2}^2 = \frac{c^2}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} [(\sigma_{\delta s_1}^2 + \sigma_{\delta s_2}^2) \pm \sqrt{(\sigma_{\delta s_1}^2 + \sigma_{\delta s_2}^2)^2 - 4 \sigma_{\delta s_1}^2 \sigma_{\delta s_2}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}] \quad (6.33)$$

La (6.31) e le (6.33) permettono, dunque, di calcolare, in funzione delle deviazioni standard delle incertezze dei due luoghi di posizione e del loro angolo d'intersezione, sia i semiassi dell'ellisse che l'orientamento del maggiore rispetto alla retta r_1 .

Dal confronto tra le relazioni (6.33) e (6.20) si ricavano le varianze e quindi le deviazioni standard delle coordinate x' ed y' riferite alla coppia di assi cartesiani con l'origine nel punto esatto O , centro dell'ellisse, e coincidenti con quelli della curva stessa:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \alpha} [(\sigma_{\delta s_1}^2 + \sigma_{\delta s_2}^2) \pm \sqrt{(\sigma_{\delta s_1}^2 + \sigma_{\delta s_2}^2)^2 - 4 \sigma_{\delta s_1}^2 \sigma_{\delta s_2}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}] \\ \sigma_y^2 & \end{aligned} \quad (6.34)$$

Le deviazioni standard σ_x e σ_y esprimono le dimensioni dei due semiassi dell'ellisse di probabilità $P = 0.393$ ($P = 39.3\%$), ellisse definita da $c = 1$ e per questo denominata *ellisse unitaria*.

Analogamente al caso spaziale, alle ellissi di probabilità è più conveniente sostituire delle circonferenze dette *circonferenze di probabilità*, le cui aree sono note quali *cerchi di probabilità* o *cerchi di certezza* o *incertezza statistica*.

Il raggio di una circonferenza di probabilità ha una lunghezza compresa tra quelle dei due semiassi della corrispondente ellisse; in prima approssimazione tale lunghezza può essere considerata uguale alla media delle lunghezze dei due semiassi dell'ellisse.

Pertanto il raggio del cerchio di errore probabile (C E P = circular error probable) è dato da:

$$r_{CEP} = 0.59 (\sigma_x + \sigma_y) \quad (6.35)$$

relazione affidabile quando il rapporto σ_y/σ_x risulta compreso tra 0.15 ed 8.

In verità esistono procedimenti più rigorosi per sostituire ad un ellissoide o ad una ellisse di data probabilità una sfera od una circonferenza, procedimenti che per brevità si omettono.

Nella trattazione fin qui condotta gli ellissoidi e le ellissi di probabilità sono stati considerati centrati nel punto esatto; nulla vieta considerarli centrati nel punto errato, dato lo spostamento parallelo dei piani e delle rette di posizione dovuto alle loro relative incertezze.

6.3.3 - Ancora sui semiassi dell'ellissoide e dell'ellisse di probabilità

Si consideri l'ellissoide di probabilità riferito alla primitiva terna cartesiana O, x, y, z . Il quadrato della lunghezza di un suo qualunque semiasse, avendo per estremi un punto della superficie ellissoidica e l'origine del sistema stesso (centro del solido), è dato dall'espressione:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (6.36)$$

con la condizione che le coordinate del vettore \mathbf{x} appartengano alla superficie:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} = c^2 \quad (6.37)$$

Per i semiassi principali l'espressione (6.36) dovrà essere un massimo (o un minimo), per cui è necessario che siano nulle le sue derivate rispetto agli elementi di \mathbf{x} che giacciono sulla superficie (6.37).

Introducendo il moltiplicatore lagrangiano λ e tenendo presente la condizione (6.37), la funzione da massimizzare (o da minimizzare) è:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \lambda [\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} - c^2] \quad (6.38)$$

la cui derivata parziale rispetto al vettore \mathbf{x} risulta:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{x} - 2 \lambda \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} \quad (6.39)$$

Uguagliando a zero la (6.39) si ottiene l'equazione che dev'essere soddisfatta dalle coordinate degli estremi dei semiassi principali:

$$[\mathbf{I} - \lambda \mathbf{Q}^{-1}] \mathbf{x} = 0 \quad (6.40)$$

La (6.40) può essere scritta anche nel seguente modo, dato che la matrice \mathbf{Q} è non singolare:

$$[\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{x} = 0$$

Questa equazione ammette soluzione non banale se:

$$\det[\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}] = 0 \quad (6.41)$$

relazione, quest'ultima, che rappresenta l'*equazione caratteristica* della matrice \mathbf{Q} , polinomio di terzo grado in λ . Le sue tre radici caratteristiche ed i vettori caratteristici ad esse associati definiranno pertanto le lunghezze e le direzioni dei tre semiassi principali. Infatti, moltiplicando l'equazione (6.40) per \mathbf{x}^T , si ottiene:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda c^2 \quad (6.42)$$

Dal che la lunghezza del semiasse maggiore a_1 , per un prefissato valore di c , viene determinata dalla più grande radice caratteristica (λ_1) di \mathbf{Q} ; le lunghezze degli altri due semiassi saranno definite dalle altre due radici caratteristiche (λ_2 e λ_3), considerate in ordine decrescente; in definitiva:

$$a_1 = c\sqrt{\lambda_1} \quad a_2 = c\sqrt{\lambda_2} \quad a_3 = c\sqrt{\lambda_3} \quad (6.43)$$

Dal confronto di queste relazioni con le (6.11) si deduce che le radici caratteristiche λ_i ($i = 1, 2, 3$) s'identificano nelle varianze delle coordinate x' , y' , z' , coordinate riferite alla terna cartesiana centrata in O e con gli assi lungo gli assi principali dell'ellissoide.

Non sfugga la seguente considerazione. I coseni direttori dei tre assi principali dell'ellissoide sono dati dagli elementi dei vettori caratteristici normalizzati α_i associati alle radici caratteristiche λ_i di \mathbf{Q} .

Se le radici caratteristiche sono *distinte* in modo che:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$$

le posizioni dei tre assi, mutuamente ortogonali, sono univocamente determinate.

Se, invece, due radici successive sono uguali, l'ellissoide assume forma circolare nel piano generato dai vettori associati alle stesse radici; l'orientamento dei due assi tra loro perpendicolari, dedotti dalla radice comune, non può però essere univocamente determinato.

Analogo ragionamento può essere fatto nel caso piano, trattando l'ellisse di probabilità.

6.4 - ERRORE RADIALE E DILUIZIONE GEOMETRICA DELLA PRECISIONE

Con riferimento alla fig. 6.3 ed alla relazione (6.7) le coordinate del punto errato O_e sono date da:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\delta s_1 A_{11} + \delta s_2 A_{21} + \delta s_3 A_{31}}{|\mathbf{A}|} \\ y &= \frac{\delta s_1 A_{12} + \delta s_2 A_{22} + \delta s_3 A_{32}}{|\mathbf{A}|} \\ z &= \frac{\delta s_1 A_{13} + \delta s_2 A_{23} + \delta s_3 A_{33}}{|\mathbf{A}|} \end{aligned} \quad (6.44)$$

con $|\mathbf{A}|$ il valore del determinante della matrice \mathbf{A} ed A_{ij} il cofattore associato all'elemento di posto i, j .

Le (6.44) permettono di ottenere il modulo del vettore OO_e , distanza d tra il punto esatto e quello errato, la quale distanza, considerata variabile gaussiana al pari delle incertezze, ha per varianza:

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{|\mathbf{A}|^2} \left(\sum_i \sigma_{\delta s_i}^2 \sum_{ij} A_{ij}^2 \right) \quad (6.45)$$

e la relativa deviazione standard:

$$\sigma_d = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left(\sum_i \sigma_{\delta s_i}^2 \sum_{ij} A_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (6.46)$$

è nota quale *errore radiale* (radial error) o *errore quadratico medio radiale* (root mean square radial error).

Alla (6.45) si è giunti sommando i quadrati delle relazioni (6.44), opportunamente ordinando e trascurando infine i doppi prodotti per le ipotesi fatte (aleatorietà ed indipendenza delle variabili δs_i).

Questo parametro statistico, valevole anche per il caso piano, rappresenta il raggio della sfera o del cerchio relativo alla probabilità del 68.27%, a condizione, come già detto, di considerare la distanza d variabile gaussiana.

Raddoppiando, triplicando nella (6.46) le deviazioni standard delle incertezze δs_i si ottengono i raggi delle sfere e dei cerchi, centrati nel punto esatto, relativi alle probabilità del 95.45% e del 99.73% e così via.

Pur essendo un parametro teorico, data la non distribuzione normale della variabile d , l'errore quadratico medio radiale viene tenuto in buona considerazione in Navigazione: ottenuta la posizione e note le varianze delle incertezze dei luoghi di posizione, la posizione esatta del mobile con probabilità del 68.27% (cioè, nel 68,27 dei casi) si trova entro un raggio dato per l'appunto da tale errore.

Esprimendo le deviazioni standard $\sigma_{\delta s_i}$ in unità di deviazione standard di riferimento σ , ottenuta quest'ultima effettuando misure nella stessa maniera in un punto noto e rispetto a basi note, ponendo cioè:

$$K_i = \frac{\sigma_{\delta s_i}}{\sigma}$$

la (6.46) diventa, dividendo tutto per σ :

$$\frac{\sigma_d}{\sigma} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \left(\sum_i K_i^2 \sum_{ij} A_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (6.47)$$

espressione denominata *diluizione geometrica della precisione* (o *fattore di espansione della precisione*) ed indicata con la sigla GDOP (geometric dilution of precision), parametro statistico che, al pari dell'errore radiale, non dipende dal sistema di assi cartesiani rispetto al quale vengono fatti i calcoli; entrambi i parametri dipendono però dalla posizione geometrica dei luoghi di posizione.

Per molti sistemi di navigazione vengono fornite cartine relative a date stazioni, sulle quali sono riportate le curve di uguale errore radiale o di uguale diluizione geometrica.

Si consideri il caso piano di fig. 6.9: determinazione della posizione con due rette.

Con \vec{n}_1 ed \vec{n}_2 sono indicati i versori delle normali alle due rette di posizione errate.

La matrice \mathbf{A} è data da:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

per cui:

$$A_{11} = \sin \varphi_2 \quad A_{21} = \sin \varphi_1$$

$$A_{12} = \cos \varphi_2 \quad A_{22} = \cos \varphi_1$$

$$|\mathbf{A}| = \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 = \sin (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin \alpha$$

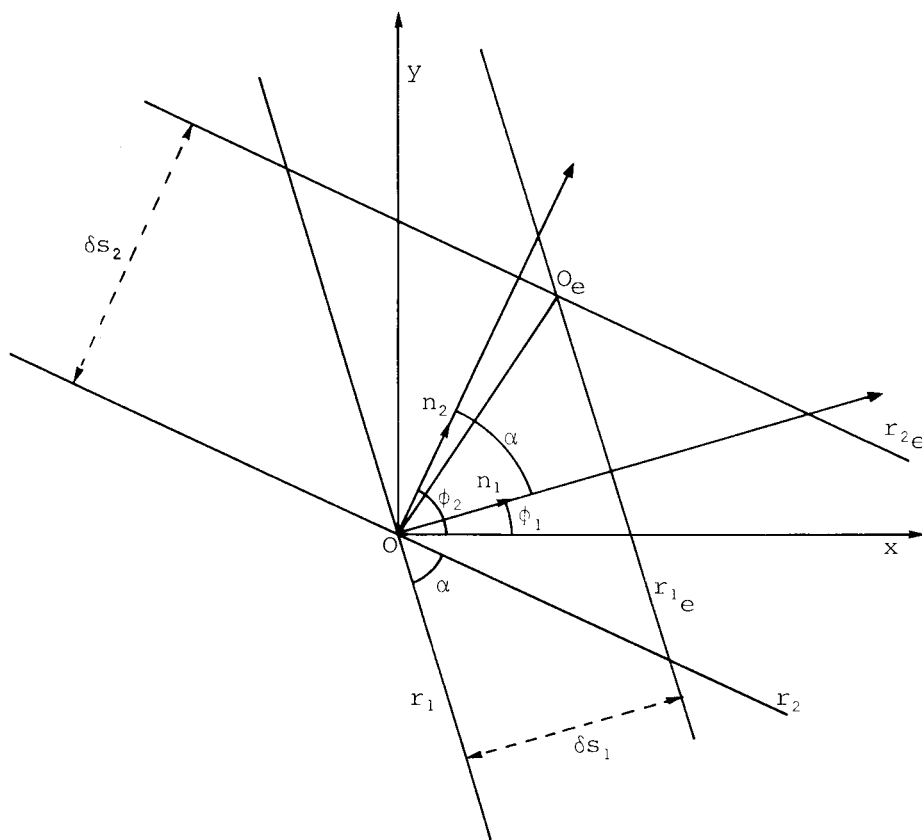


FIG. 6.9.

L'errore radiale risulta:

$$\begin{aligned}\sigma_d &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \sqrt{\sigma_{\delta s_1}^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi_2 + \operatorname{cos}^2 \varphi_2) + \sigma_{\delta s_2}^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \operatorname{cos}^2 \varphi_1)} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \sqrt{\sigma_{\delta s_1}^2 + \sigma_{\delta s_2}^2}\end{aligned}\quad (6.48)$$

e ponendo:

$$K_1 = \frac{\sigma_{\delta s_1}}{\sigma} \quad K_2 = \frac{\sigma_{\delta s_2}}{\sigma}$$

la diluizione geometrica è data da:

$$\operatorname{GDOP} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad (6.49)$$

Se le due rette r_1 ed r_2 sono due rette di distanza o d'altezza, i versori \vec{n}_i delle normali ai due luoghi errati coincidono con quelli delle direzioni dei due punti noti o dei due astri, per cui:

$$\sigma_{\delta s_1} = \sigma_{\delta s_2} = \sigma_{\delta L} \quad K_i = 1$$

e pertanto le relazioni (6.48) e (6.49) diventano rispettivamente:

$$\sigma_d = \frac{\sqrt{2} \sigma_{\delta L}}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (6.50) \quad \operatorname{GDOP} = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (6.51)$$

Minimi valori di σ_d e GDOP si hanno per $\alpha = 90^\circ$: $\sigma_{d_{\min}} = \sqrt{2} \sigma_{\delta L}$; $\operatorname{GDOP}_{\min} = \sqrt{2}$.

Tenendo presente la (6.34), l'errore radiale dato dalla (6.48) può essere espresso anche dalla seguente relazione:

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (6.52)$$

Ed ora un semplice caso di determinazione della posizione con tre piani (fig. 6.10), considerando i versori \vec{n}_1 ed \vec{n}_2 orientati rispettivamente secondo gli assi z ed x . Indicando con α l'anomalia del versore \vec{n}_3 rispetto

al piano xz e con β l'angolo che il dato versore forma con l'asse z , la matrice A dei coseni direttori è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cos \alpha \operatorname{sen} \beta & \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

per cui:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0 & A_{21} &= -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & A_{31} &= 0 \\ A_{12} &= \cos \beta & A_{22} &= -\cos \alpha \operatorname{sen} \beta & A_{32} &= -1 \\ A_{13} &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta & A_{23} &= 0 & A_{33} &= 0 \end{aligned}$$

$$|A| = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

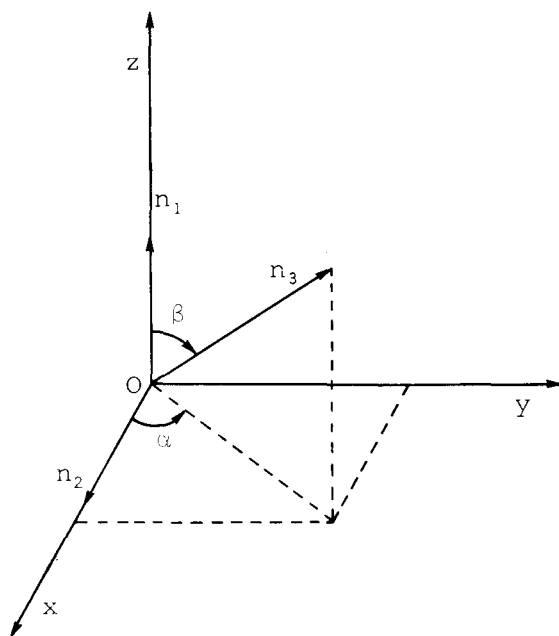


FIG. 6.10.

L'errore radiale e la diluizione geometrica risultano:

$$\sigma_d = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \sqrt{\sigma_{\delta s_1}^2 (1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta) + \sigma_{\delta s_2}^2 \operatorname{sen}^2 \beta + \sigma_{\delta s_3}^2}$$

$$\text{GDOP} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \sqrt{K_1^2 (1 - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta) + K_2^2 \operatorname{sen}^2 \beta + K_3^2}$$

Trattandosi di misure di distanze:

$$\sigma_{\delta s_1} = \sigma_{\delta s_2} = \sigma_{\delta s_3} = \sigma_{\delta L} \quad K_i = 1$$

e di conseguenza:

$$\sigma_d = \frac{\sigma_{\delta L}}{\sin \alpha \sin \beta} \sqrt{2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

$$\text{GDOP} = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} \sqrt{2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

Minimi valori si hanno per $\alpha = \beta = 90^\circ$ (versore n_3 lungo l'asse y).

Si osservi, mettendo a confronto la matrice \mathbf{A} della relazione (6.7) con la matrice \mathbf{H} della relazione (5.1) quanto segue: gli elementi della prima rappresentano i coseni direttori rispetto agli assi cartesiani delle perpendicolari abbassate dal punto esatto ai luoghi errati, quelli della seconda i coseni direttori delle perpendicolari abbassate dal punto stimato agli stessi luoghi, direzioni tra loro parallele. Nel caso di rette di posizione il coefficiente $h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_s$ dev'essere considerato $h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda \cos \varphi} \right)_s$: coseno direttore della direzione del gradiente rispetto all'asse x coincidente col parallelo stimato. Inoltre, al contrario della matrice \mathbf{A} che è quadrata, la matrice \mathbf{H} può essere anche rettangolare.

Pertanto, quando si ha uguale deviazione standard per i luoghi di posizione utilizzati, caso dei luoghi circolari e sferici per i quali $\sigma_{\delta s} = \sigma_{\delta L} = \sigma$, si ha che il GDOP è anche dato da:

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{traccia}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}} \quad (6.53)$$

espressione già introdotta nel paragrafo (5.4), formula (5.18) e ciò è facilmente verificabile.

Alla luce della (5.17) la diluizione geometrica risulta essere uguale alla radice quadrata della somma delle varianze delle singole coordinate:

$$\text{GDOP} = \sqrt{\sigma_{\delta \lambda}^2 + \sigma_{\delta \varphi}^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

Nel caso di posizionamento tridimensionale vengono considerate due distinte diluizioni, l'orizzontale e la verticale, HDOP e VDOP (horizontal dilution of precision e vertical dilution of precision), date rispettivamente da:

$$\text{HDOP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \text{VDOP} = \sigma_z$$

La diluizione GDOP viene più propriamente indicata con la sigla PDOP, diluizione della precisione della posizione (position dilution of precision); un tale parametro, dipendendo esclusivamente dalla geometria relativa alla configurazione degli oggetti rispetto ai quali vengono effettuate le misure, rappresenta per l'appunto un criterio per la scelta di detti oggetti.

6.5 - ALCUNI ESEMPI

Esempio N. 1

Sono note le deviazioni standard delle incertezze di due luoghi rettilinei di posizione: $\sigma_{\delta s_1} = \pm 1$ mg, $\sigma_{\delta s_2} = \pm 1.5$ mg. Calcolare i semiassi dell'ellisse unitaria (probabilità 39.3%) e di quella relativa alla probabilità del 50%, nonché il raggio del cerchio probabile e l'errore radiale, essendo l'angolo tra le due rette di 40° .

I due semiassi dell'ellisse unitaria risultano per la (6.34):

$$a_1 = 2.66 \text{ mg} \quad a_2 = 0.88 \text{ mg}$$

mentre per quelli dell'ellisse di probabilità 0.5, (essendo $c = 1.1774$ per la (6.22)), le (6.33) danno:

$$a_1 = 3.14 \text{ mg} \quad a_2 = 1.03 \text{ mg}$$

I semiassi maggiori di queste due ellissi sono inclinati rispetto alla retta di deviazione standard $\sigma_{\delta s_1}$ dell'angolo β , dato dalla (6.24):

$$\beta = 11^\circ.1$$

Per la (6.35) il raggio del cerchio probabile è:

$$r_{\text{CEP}} = 2.1 \text{ mg}$$

e per la (6.48) o per la (6.52) l'errore radiale risulta:

$$\sigma_d = 2.8 \text{ mg}$$

In fig. 6.11 sono segnate le due rette, le due ellissi e le due circonferenze relative al raggio del cerchio probabile ed all'errore radiale. L'ellisse unitaria risulta inscritta nelle due strisce di posizione.

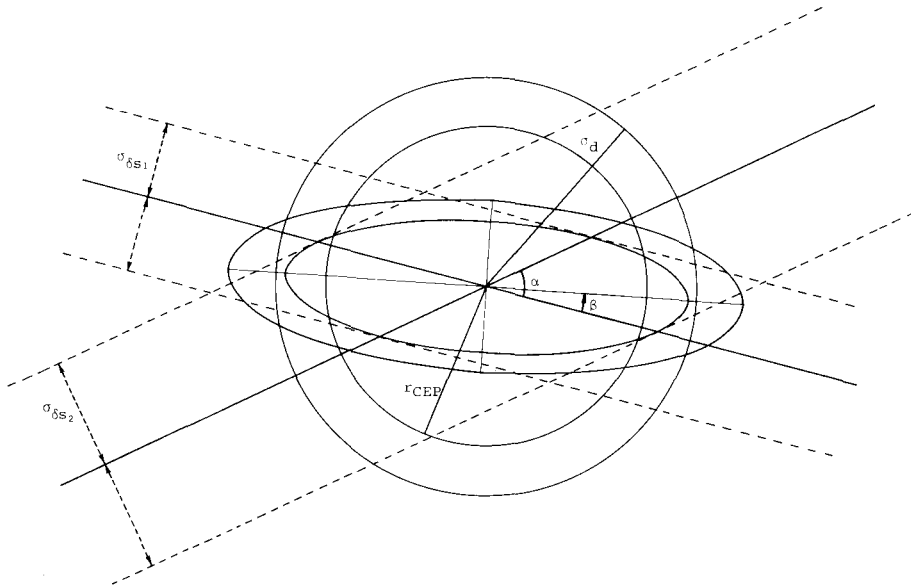


FIG. 6.11.

Esempio N. 2

Trattare della diluizione geometrica della precisione della posizione ottenuta con due, tre e quattro rette d'altezza.

La (6.53):

$$\text{GDOP} = \sqrt{\text{traccia}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}}$$

porta alla seguente relazione:

$$\text{GDOP} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{ij} \text{sen}^2 \Delta a_{ij}}}$$

con $i = 1, \dots, n$ e $j \neq i$ ($n =$ numero astri, Δa la loro differenza d'azimut).

Nel caso della misura di due altezze la differenza tra gli azimut dei due astri è uguale all'angolo α d'intersezione delle due rette.

Moltiplicando il valore della diluizione geometrica per la deviazione standard delle misure d'altezza si ottiene l'entità dell'errore radiale, raggio del cerchio di probabilità del 68.25%.

La diluizione geometrica della precisione ottenuta con due rette d'altezza è riportata qui di seguito in funzione dell'angolo α :

α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
GDOP	8.14	4.13	2.83	2.20	1.85	1.63	1.50	1.43	1.41

Con gli astri tutti ad uguale differenza d'azimut l'uno dall'altro la diluizione geometrica per il caso di tre e quattro rette d'altezza risulta:

caso di tre rette d'altezza

Δa	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°
GDOP	4.12	2.59	1.55	1.29	1.18	1.15	1.17	1.21	1.22	1.21	1.17	1.15

caso di quattro rette d'altezza

Δa	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
GDOP	2.64	1.44	1.11	1.01	1.01	1.03	1.04	1.06	1.00

I dati riportati si riferiscono alla determinazione della posizione con la tecnica dei minimi quadrati (l'intersezione delle due rette, nel caso di osservazioni di due astri, entra in tale tecnica).

Dai dati riportati si conferma quanto già rilevato nel paragrafo precedente: con la misura di due altezze la precisione diminuisce col diminuire dell'angolo d'intersezione delle due rette.

Con tre rette d'altezza minimi valori della diluizione geometrica si hanno con $\Delta a = 60^\circ$ e $\Delta a = 120^\circ$ (intersezione delle rette secondo un triangolo equilatero) mentre con quattro rette d'altezza il minimo valore si ottiene con $\Delta a = 90^\circ$ (intersezione delle rette secondo un rettangolo o un quadrato). In questi casi il *PPP* capita nel baricentro delle dette figure geometriche.

Esempio N. 3

Trattare della diluizione geometrica della precisione della posizione ottenuta con la misura di distanze da satelliti artificiali (sistema Navstar - GPS).

Si consideri (fig. 6.12) una terna cartesiana centrata nel punto O (osservatore), con l'asse z coincidente con la verticale di O ed orientata verso lo zenit, gli altri due assi nel piano orizzontale e comunque orientati. Dette α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) le coordinate sferiche dei satelliti legate

alla terna, i coseni direttori delle direzioni ai detti satelliti rispetto agli assi cartesiani sono dati da:

$$\cos \beta_i \cos \alpha_i \quad \cos \beta_i \sin \alpha_i \quad \sin \beta_i$$

per cui la matrice **H** risulta:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \sin \alpha_1 & \sin \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos \beta_n \cos \alpha_n & \cos \beta_n \sin \alpha_n & \sin \beta_n \end{pmatrix}$$

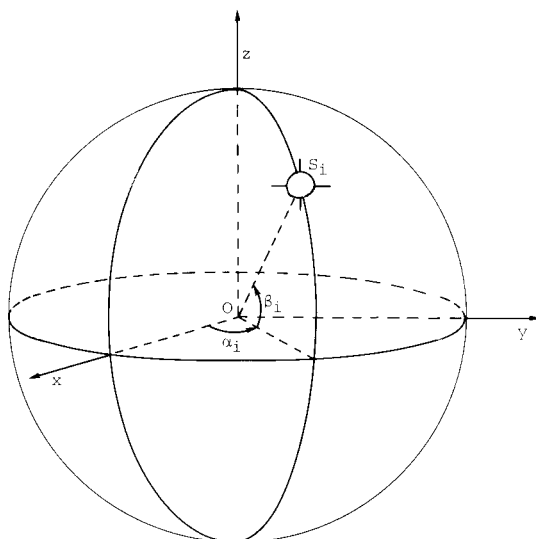


FIG. 6.12.

Nel caso di misura di distanze da tre satelliti equamente distanziati in azimuth, cioè ad una differenza d'azimut di 120° l'uno dall'altro e ad uguale altezza sull'orizzonte, la (6.53) fornisce i seguenti valori della diluizione geometrica della precisione:

β	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
GDOP	2.08	1.87	1.76	1.73	1.75	1.83	1.95	2.13	2.40

Minimo valore si ha per $\beta = 35^\circ$, entità che si ottiene anche quando i tre piani di posizione sono tra loro perpendicolari (vedi paragrafo precedente).

Se poi la differenza d'azimut tra i tre satelliti è minore di 120° la diluizione è caratterizzata da valori più elevati di quelli dianzi riportati.

Sempre equamente distribuiti in azimut, GDOP = 1.77 per $\beta_1 = \beta_2 = 45^\circ$ e $\beta_3 = 30^\circ$, GDOP = 1.81 per $\beta_1 = \beta_2 = 30^\circ$ e $\beta_3 = 60^\circ$ mentre GDOP = 1.89 per $\beta_1 = 30^\circ$, $\beta_2 = 45^\circ$ e $\beta_3 = 60^\circ$.

Con quattro satelliti lo stesso equamente distanziati in azimut (in tal caso è di 90° la loro differenza d'azimut) e ad uguale altezza sull'orizzonte si hanno i seguenti valori della diluizione:

β	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
GDOP	1.81	1.62	1.53	1.50	1.52	1.58	1.69	1.85	2.08

Come per il caso di tre satelliti equamente distribuiti in azimut e ad uguale altezza sull'orizzonte il minimo valore della diluizione si ha per $\beta = 35^\circ$, passando da 1.73 a 1.50.

Lo stesso la diluizione aumenta se diminuisce il valore della differenza d'azimut dei satelliti.

Come già detto nella discussione dell'esempio precedente, la posizione è da considerarsi ottenuta con la tecnica dei minimi quadrati ed il caso minimo di tre distanze per risolvere il sistema 5.1 entra in tale tecnica.

Moltiplicando la diluizione geometrica per la deviazione standard delle misure di distanze si ottiene l'errore radiale, cioè il raggio della sfera centrata nel PPP entro la quale con probabilità del 68.25% si trova l'osservatore.

Un caso a parte occorre trattare quando oltre alla posizione si vuole anche determinare l'errore (sistematico) dell'orologio del ricevitore. Tenendo presente quanto accennato alla fine del paragrafo 5.1, essendo quattro le incognite, le prime tre di posizione (x, y, z) e la quarta temporale (l'errore dell'orologio), bisogna disporre di quattro distanze da quattro satelliti; la matrice di misura \mathbf{H} risulta pertanto così composta:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 \sin \alpha_1 & \sin \beta_1 & 1 \\ \cos \beta_2 \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 \sin \alpha_2 & \sin \beta_2 & 1 \\ \cos \beta_3 \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 \sin \alpha_3 & \sin \beta_3 & 1 \\ \cos \beta_4 \cos \alpha_4 & \cos \beta_4 \sin \alpha_4 & \sin \beta_4 & 1 \end{pmatrix}$$

Di qui il calcolo di due distinte diluizioni, una di posizione ed una temporale, rispettivamente così indicate: PDOP e TDOP (position dilution of precision e time dilution of precision).

PRINCIPI DI NAVIGAZIONE INTEGRATA

7.1 - INTRODUZIONE

Ogni sistema di navigazione è soggetto ad errori che aumentano col tempo; per ridurli bisogna intervenire di tanto in tanto con informazioni ottenute da sensori esterni al sistema. Si parla di riduzione degli errori del sistema e non di annullamento in quanto anche le informazioni dei sensori esterni sono affette da errori.

In ciò consiste il problema della *navigazione integrata*, sempre sentito dal navigante, ma che solo in questi ultimi tempi ha avuto pratica applicazione per la disponibilità di calcolatori digitali, che permettono di eseguire in tempo reale un'analisi statistica delle misure effettuate e di trarre quindi valide informazioni per definire lo «stato» della navigazione.

Per la determinazione della posizione in navigazione marittima si utilizza il sistema bussola-solcometro, in quella aerea oggi è molto in uso il navigatore inerziale; sistemi entrambi autonomi i cui errori aumentano col tempo, donde la loro denominazione di «apparati stimati» o di «sistemi stimati».

Le informazioni ottenute dai sensori esterni a tali apparati permettono di rifasarli e dopo ogni rifasamento gli errori riprendono con le stesse caratteristiche.

Un rifasamento molto elementare consiste nel tenere soltanto conto delle informazioni del sensore esterno, trascurando i suoi errori. È questo il caso allorché si controlla la posizione stimata con quella ottenuta con osservazioni di astri, col ricevitore satellitare, coi sistemi di radionavigazione, ecc.

Un rifasamento accurato si ha quando si calcolano mediante opportuni algoritmi matematici gli errori più probabili del sensore esterno, note le loro caratteristiche statistiche. Ed infine si ottiene un rifasamento ottimale quando si tiene anche conto degli errori più probabili delle informazioni fornite dall'apparato stimato.

7.2 - SCHEMA DI UN SISTEMA DI NAVIGAZIONE INTEGRATA

Nel campo nautico l'impiego del calcolatore rappresenta un primo passo verso i sistemi di navigazione integrata. Si consideri il seguente sistema (fig. 7.1) formato da:

- a) un indicatore di velocità (un sonar-Doppler, per es.);
- b) una bussola (giroscopica);
- c) un'unità interfaccia;
- d) un calcolatore digitale con display e munito di orologio.

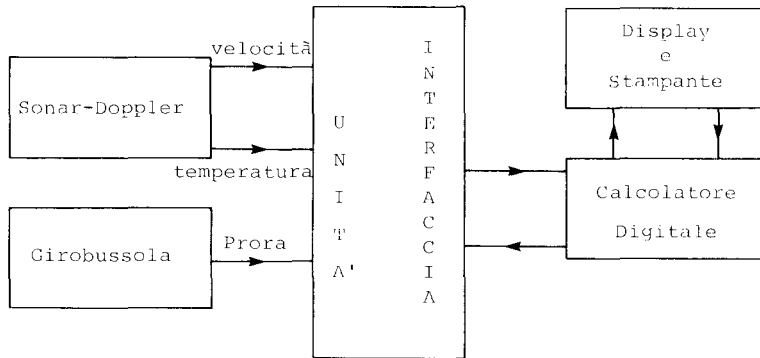


FIG. 7.1.

I parametri in ingresso sono la velocità, la prora, il tempo e le condizioni iniziali (posizione, ecc.); queste ultime vengono introdotte manualmente nel calcolatore.

I dati in uscita sono forniti ad intervalli stabiliti dal calcolatore e possono però essere richiesti in qualsiasi istante mediante un comando manuale.

Tra i sensori di navigazione ed il calcolatore è situata l'unità interfaccia; a questa pervengono i segnali relativi alle informazioni di velocità longitudinale e trasversale, di temperatura e di prora. Tali segnali da analogici vengono trasformati in digitali ed assegnati a degli indirizzi di memorizzazione in modo da permettere al calcolatore di leggerli quando lo richiede il programma. In generale l'informazione di prora fornita dalla girobussola è una indicazione «sincro».

Il calcolatore svolge tre funzioni: esamina i dati in ingresso, esegue i calcoli di navigazione e fornisce in uscita gli elementi richiesti (dati di posizione ecc...).

L'esame dei dati in ingresso consiste nel loro filtraggio mediante filtri digitali programmati e nell'apportare le dovute correzioni ai dati del sonar-Doppler e della girobussola.

I calcoli di navigazione consistono principalmente nell'integrazione della velocità per ottenere il percorso effettuato dalla nave e per determinare poi la sua posizione.

La sequenza con la quale vengono svolte le operazioni dal calcolatore è regolata sia da un orologio che dal programma stesso.

È evidente che l'incertezza della posizione stimata aumenta col trascorrere del tempo, dato che la funzione del calcolatore è limitata soltanto alla risoluzione dei calcoli che altrimenti dovrebbe eseguire l'operatore.

Al sistema descritto si può accoppiare (fig. 7.2) un altro apparato di navigazione (un ricevitore satellitare, un ricevitore Loran C, Decca, ecc...) utilizzando le sue informazioni per correggere la posizione stimata elaborata dal calcolatore.

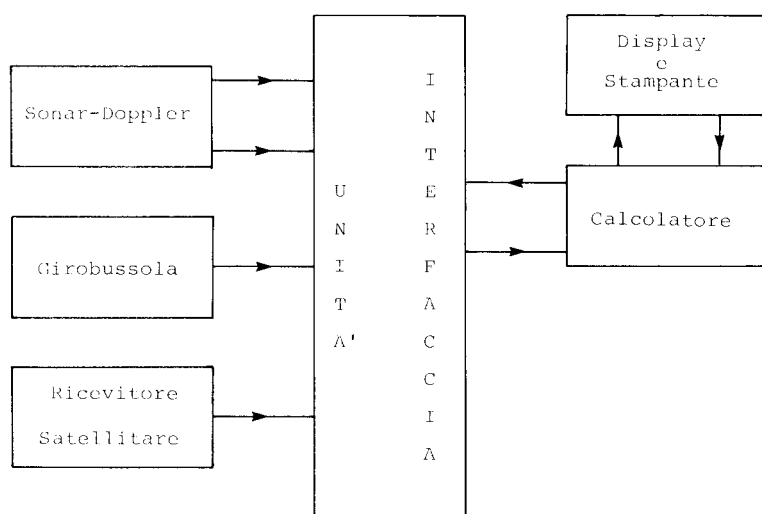


FIG. 7.2.

Si ottiene, come già detto, un rifasamento alquanto grossolano del sistema stimato (bussola-solcometro) in quanto si pone piena fiducia sulle informazioni dell'apparato aggiunto.

Infine, si può programmare il calcolatore per utilizzare in modo ottimale le informazioni del nuovo apparato ed anche di quello stimato: si viene così ad organizzare un vero sistema di navigazione integrata. Col sistema integrato apparato stimato-ricevitore satellitare, schematizzato in

fig. 7.2, le informazioni dell'apparato bussola-solcometro vengono migliorate in modo ottimale da quelle del ricevitore satellitare.

Sistemi integrati possono essere effettuati tra due qualsiasi apparati di navigazione, quali, ad esempio, navigatore inerziale-satellitare, Loran C-satellitare, Omega-satellitare, ecc.

La realizzazione di un sistema integrato richiede conoscenze di calcolo matriciale, di statistica e di filtraggio statistico, argomenti che esulano dalla presente trattazione.

Tra i filtri ottimali il più adatto è quello di Kalman, in quanto coinvolge nel processo di ottimizzazione le informazioni di tutti gli apparati del sistema e richiede nel contempo modesti calcolatori in quanto opera in modo iterativo.

7.3 - NAVIGAZIONE QUALE «SISTEMA»

Il procedere della navigazione può essere descritto quale evoluzione di *un sistema*, il cui *vettore di stato* ha per elementi i dati di posizione e di moto, sei per la navigazione aerea, quattro per quella marittima.

La dinamica di tale vettore viene espressa da una generica equazione non lineare del tipo:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = f[\mathbf{z}(t), \mathbf{v}(t)] \quad (7.1)$$

con $\mathbf{z}(t)$ il vettore di stato e $\mathbf{v}(t)$ il *vettore dei disturbi*, i cui elementi esprimono gli errori che aleatoriamente si producono nell'interno del sistema stesso (errori di direzione e di velocità per presenza di corrente, di vento, ecc.).

Oltre alle *variabili di stato e dei disturbi*, per una completa descrizione del sistema, occorre considerare le *variabili di uscita o di osservazione*, date dalle misure che vengono effettuate e che sono rappresentabili come elementi di un vettore indicato con $\mathbf{y}(t)$, detto *vettore misura*.

Per linearizzare la (7.1) viene considerata una traiettoria nominale $\mathbf{z}_s(t)$ del sistema conseguente ad un disturbo stimato $\mathbf{v}_s(t)$:

$$\dot{\mathbf{z}}_s(t) = f[\mathbf{z}_s(t), \mathbf{v}_s(t)] \quad (7.2)$$

Sviluppando la (7.1) in serie di Taylor nell'intorno della traiettoria stimata con arresto ai termini del primo ordine, si ha:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\mathbf{z}}_s(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right)_s \delta \mathbf{z}(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_s \delta \mathbf{v}(t) \quad (7.3)$$

dove:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{z}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{z}_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{z}_n} \end{bmatrix} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{v}_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \mathbf{v}_n} \end{bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_s(t)$$

$$\delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_s(t)$$

Ponendo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}}\right)_s = \mathbf{F}(t) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)_s = \mathbf{G}(t) \quad \delta \mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) \quad \delta \mathbf{v}(t) = \mathbf{w}(t)$$

la (7.3) diventa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{w}(t) \quad (7.4)$$

con:

– $\mathbf{x}(t)$ un vettore i cui elementi rappresentano gli scarti dei dati di posizione e di moto rispetto a quelli stimati;

– $\mathbf{F}(t)$ una matrice $n \times n$ che esprime la dinamica con cui si evolve il sistema;

– $\mathbf{G}(t)$ la matrice degli ingressi di disturbo, di dimensioni $n \times n$;

– $\mathbf{w}(t)$ un vettore i cui elementi indicano gli scarti tra gli errori reali e quelli corrispondenti stimati.

Gli errori di navigazione vengono considerati aleatori, generati da processi markoviani ed indicati nel seguito col simbolo $\mathbf{w}(t)$.

Pertanto la (7.4) diventa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (7.5)$$

Con l'equazione di stato del sistema così scritta è possibile ricavare le proprietà statistiche di $\mathbf{x}(t)$ note quelle di $\mathbf{w}(t)$.

Nel caso in cui $\mathbf{w}(t) = 0$ la (7.5) diventa omogenea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) \quad (7.6)$$

e supponendo note le condizioni iniziali:

$$\mathbf{x}(t_0) = [\mathbf{x}(t)]_{t=0}$$

dalla (7.6) si ricava:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (7.7)$$

con $\Phi(t, t_0)$ una matrice $n \times n$, detta *matrice di transizione*, che permette, quale operatore, di trasformare il vettore di stato dall'istante t_0 all'istante t . Essa gode delle seguenti proprietà:

$$\Phi(t, t) = \mathbf{I} \quad \Phi(t_2, t_1) \cdot \Phi(t_3, t_2) = \Phi(t_3, t_1) \quad \Phi(t_2, t_1) = \Phi^{-1}(t_1, t_2)$$

e va ricavata dall'equazione matriciale:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_0) \quad (7.8)$$

Tale equazione può essere approssimativamente così scritta:

$$\frac{\Phi(t + \Delta t, t_0) - \Phi(t, t_0)}{\Delta t} \simeq \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_0)$$

da cui:

$$\Phi(t + \Delta t, t_0) \simeq \Phi(t, t_0) + \Delta t \mathbf{F}(t) \Phi(t, t_0) \simeq [\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F}(t)] \Phi(t, t_0)$$

Moltiplicando il vettore $\mathbf{x}(t_0)$ a sinistra per entrambi i membri si ottiene:

$$\Phi(t + \Delta t, t_0) \mathbf{x}(t_0) \simeq [\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F}(t)] \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

relazione che per la (7.7) diventa:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) \simeq [\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F}(t)] \mathbf{x}(t)$$

per cui:

$$\Phi(t_0 + \Delta t, t_0) \simeq \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F}(t_0) \quad (7.9)$$

espressione approssimata della matrice di transizione, correntemente utilizzata quando Δt è piccolo.

A questo punto, nota la matrice di transizione $\Phi(t, t_0)$, è possibile risolvere la (7.5):

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (7.10)$$

e considerando $\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t_0)$ quando l'intervallo $t - t_0$ è piccolo, la (7.10) diventa:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{w}(t) \quad (7.11)$$

La (7.11) per intervalli di tempo finiti e piccoli viene così scritta:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (7.12)$$

All'equazione di stato, espressa dalla (7.12), per una rappresentazione completa del sistema navigazione, occorre accoppiare l'equazione di misura (5.14) che qui si riporta:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \quad (7.13)$$

7.4 - EQUAZIONE DI STATO IN NAVIGAZIONE LOSSODROMICA

All'istante t la posizione del mobile è data da:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + v(t - t_0) \cos R \\ \mu &= \mu_0 + v(t - t_0) \sin R \end{aligned} \quad (7.14)$$

con φ_0 e μ_0 la posizione all'istante t_0 e v ed R i valori della velocità e della rotta nell'intervallo $t - t_0 = \Delta t$.

Sviluppando in serie di Taylor la (7.14) con arresto ai termini del primo ordine, tenendo presente la traiettoria stimata, con riferimento, cioè, ai parametri stimati φ_s , μ_s , v_s , R_s , si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_s &= \delta \varphi = \Delta t \cos R_s \delta v - v_s \Delta t \sin R_s \delta R \\ \mu - \mu_s &= \delta \mu = \Delta t \sin R_s \delta v + v_s \Delta t \cos R_s \delta R \end{aligned} \quad (7.15)$$

relazioni che derivate rispetto al tempo danno:

$$\begin{aligned} \dot{\delta \varphi} &= \cos R_s \delta \dot{v} - v_s \sin R_s \delta \dot{R} \\ \dot{\delta \mu} &= \sin R_s \delta \dot{v} + v_s \cos R_s \delta \dot{R} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Le (7.15) permettono di ottenere gli scarti di latitudine e di appartenimento in funzione di quelli di velocità e di rotta ($\delta v = v - v_s$, $\delta R = R - R_s$); le (7.16) forniscono, invece, le variazioni degli stessi scarti.

Per la natura aleatoria degli errori si ipotizzano le seguenti funzioni esponenziali di autocorrelazione:

$$E[\delta v(t) \delta v(t + \tau)] = \sigma_v^2 e^{-\frac{|\tau|}{T_v}}$$

$$E[\delta R(t) \delta R(t + \tau)] = \sigma_R^2 e^{-\frac{|\tau|}{T_R}}$$

con σ_v^2 , σ_R^2 e T_v , T_R le varianze ed i rispettivi tempi di autocorrelazione.

Le equazioni generatrici di tali errori sono pertanto le seguenti:

$$\begin{aligned} \delta \dot{v} &= -\frac{1}{T_v} \delta v + e_v \\ \delta \dot{R} &= -\frac{1}{T_R} \delta R + e_R \end{aligned} \quad (7.17)$$

con e_v ed e_R due rumori bianchi

Dalla (7.17) si evince che gli errori si compongono di una parte prevedibile e di una parte puramente aleatoria.

Tanto premesso, si passa ora alla formulazione dell'equazione di stato, espresso nel paragrafo precedente dalla (7.5), che qui si riporta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

Tenendo presente la (7.15) il vettore di stato è definito da:

$$\mathbf{x}(t) = (\delta \varphi \quad \delta \mu \quad \delta v \quad \delta R)^T$$

La matrice $\mathbf{F}(t)$, di dimensioni 4×4 , esprime la dinamica del sistema, è data per le (7.16) e le (7.17):

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos R_s & -v_s \sin R_s \\ 0 & 0 & \sin R_s & v_s \cos R_s \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix}$$

mentre i vettori $\mathbf{w}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ sono così definiti:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= (0 \quad 0 \quad e_v \quad e_R)^T \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\delta \dot{\varphi} \quad \delta \dot{\mu} \quad \delta \dot{v} \quad \delta \dot{R})^T \end{aligned}$$

per cui l'equazione di stato risulta:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\varphi} \\ \delta \dot{\mu} \\ \delta \dot{v} \\ \delta \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos R_s & -v_s \operatorname{sen} R_s \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} R_s & v_s \cos R_s \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \mu \\ \delta v \\ \delta R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_v \\ e_R \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Con la (7.18), come ben si nota, si ottengono le variazioni degli scarti dei quattro parametri che definiscono lo stato, due di posizione e due di moto; occorre, ora, calcolare proprio tali parametri, iniziando a comporre la matrice di transizione data dalla (7.9):

$$\Phi(t_0 + \Delta t, t_0) = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{F}(t_0)$$

Si ottiene:

$$\Phi(t_0 + \Delta t, t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos R_s \Delta t & -v_s \operatorname{sen} R_s \Delta t \\ 0 & 1 & \operatorname{sen} R_s \Delta t & v_s \cos R_s \Delta t \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{T_v} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{T_R} \Delta t \end{bmatrix}$$

per cui la (7.11) risulta, considerando $\mathbf{w}(t) = 0$:

$$\begin{bmatrix} \delta \varphi \\ \delta \mu \\ \delta v \\ \delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos R_s \Delta t & -v_s \operatorname{sen} R_s \Delta t \\ 0 & 1 & \operatorname{sen} R_s \Delta t & v_s \cos R_s \Delta t \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{T_v} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{T_R} \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varphi_0 \\ \delta \mu_0 \\ \delta v_0 \\ \delta R_0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi &= \delta \varphi_0 + \cos R_s \Delta t \delta v_0 - v_s \operatorname{sen} R_s \Delta t \delta R_0 \\
 \delta \mu &= \delta \mu_0 + \operatorname{sen} R_s \Delta t \delta v_0 + v_s \operatorname{sen} R_s \Delta t \delta R_0 \\
 \delta v &= \left(1 - \frac{1}{T_v} \Delta t\right) \delta v_0 \\
 \delta R &= \left(1 - \frac{1}{T_R} \Delta t\right) \delta R_0
 \end{aligned} \tag{7.19'}$$

7.5 - FILTRAGGIO STATISTICO - FILTRO DI KALMAN

Note le caratteristiche statistiche sia delle variabili di disturbo che degli errori di misura è possibile, come già precedentemente accennato, ottenere con speciali algoritmi una stima ottimale degli elementi del vettore di stato: in ciò consiste il *filtraggio statistico*.

In un dato istante, con le informazioni a disposizione, il filtraggio, oltre a permettere di ottenere la stima ottimale del vettore di stato, può essere utilizzato per una previsione ottimale futura o per una ridefinizione a posteriori, sempre ottimale, del vettore.

In ogni caso si definisce stima ottimale del vettore \mathbf{x} , indicata con $\hat{\mathbf{x}}$, quella che minimizza la somma degli elementi della diagonale (traccia) della matrice di covarianza degli errori di stima $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, data da:

$$\mathbf{Q} = E [(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T] \tag{7.20}$$

Si supponga di conoscere all'istante t_k la stima ottimale del vettore di stato ottenuta col contributo di misure di posizionamento effettuate proprio nel detto istante; tale stima viene indicata col simbolo $\hat{\mathbf{x}}_k^+$.

Una stima a priori dello stato \mathbf{x} per l'istante t_{k+1} è data dalla (7.12) considerando in questa $\mathbf{w}_k = 0$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \hat{\mathbf{x}}_k^+ \tag{7.21}$$

stima che tiene evidentemente conto delle misure effettuate fino all'istante t_k e per questo il vettore di stato è munito dell'apice meno (-).

Per tale stato stimato ($\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$) è possibile ora definire una stima del vettore misura che alla luce della (7.13) con $\mathbf{e}_k = 0$ è data da:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- \tag{7.22}$$

Orbene, se nell'istante t_{k+1} si dispone di un effettivo vettore misura (\mathbf{y}_{k+1}), la stima $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$ verrà migliorata con l'apportare a quest'ultima una correzione lineare così espressa:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}) \quad (7.23)$$

dove \mathbf{K} è una matrice da calcolare indipendentemente dai risultati della misura; essa deve essere tale da rendere minima la traccia della matrice di covarianza degli errori di stima data dalla (7.20). Tale matrice, che può essere considerata il «peso» da assegnare alla differenza $\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ per ottenere la correzione della stima fatta a priori ($\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$), è nota quale *matrice dei guadagni di Kalman*.

Si dimostra che la matrice \mathbf{K} per l'istante t_{k+1} , basata, come dianzi detto, sulla minimizzazione della traccia della matrice di covarianza \mathbf{Q}_{k+1} , è data da:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1} \quad (7.24)$$

essendo:

$$\mathbf{Q}_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \mathbf{Q}_k^+ \Phi_{k+1,k}^T + \mathbf{P}_k \quad (7.25)$$

con \mathbf{P} ed \mathbf{R} rispettivamente le matrici di covarianza degli ingressi di disturbo e degli errori di misura.

La (7.25) fornisce la matrice di covarianza degli errori di stima per l'istante t_{k+1} , prima di effettuare misure, nota quella relativa all'istante t_k e ricca del contributo delle misure effettuate nello stesso istante. La matrice di covarianza degli errori di stima che tiene poi conto delle misure effettuate nell'istante t_{k+1} è dato da:

$$\mathbf{Q}_{k+1}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{Q}_{k+1}^- \quad (7.26)$$

Le operazioni per la risoluzione dell'algoritmo relativo alle formule (7.21) e seguenti sono così organizzate:

1) istante t_0 - Sono noti:

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ \quad \mathbf{Q}_0^+ \quad \mathbf{P}_0 \quad \mathbf{R}_0$$

2) istante t_1^- (assenza di misure) - Calcolo di:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_1^- &= \Phi_{1,0} \hat{\mathbf{x}}_0^+ \\ \mathbf{Q}_1^- &= \Phi_{1,0} \mathbf{Q}_0^+ \Phi_{1,0}^T + \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{K}_1 &= \mathbf{Q}_1^- \mathbf{H}_1^T [\mathbf{H}_1 \mathbf{Q}_1^- \mathbf{H}_1^T + \mathbf{R}_1]^{-1} \\ \hat{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}}_1^- \end{aligned}$$

3) istante t_1^+ (effettuate misure \mathbf{y}_1) - Calcolo di:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_1^+ &= \hat{\mathbf{x}}_1^- + \mathbf{K}_1 (\mathbf{y}_1 - \hat{\mathbf{y}}_1) \\ \mathbf{Q}_1^+ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1) \mathbf{Q}_1^-\end{aligned}$$

4) istante t_2^- - si ritorna al punto 2)

5) istante t_2^+ - si ritorna al punto 3) e così via.

Come ben si nota, nel processo di stima ottimale il filtro tiene conto sia delle statistiche degli errori di misura che di quelle degli ingressi di disturbo; e l'algoritmo iterativo che lo implementa, tenendo conto soltanto della stima precedente e della misura corrente, ben si adatta ad un calcolatore digitale di modeste dimensioni.

BIBLIOGRAFIA

CAPITOLO PRIMO

- GIUSEPPE SIMEON, *Dispense del corso di Navigazione*. Istituto Universitario Navale, Napoli.
- VINCENZO NASTRO, ANIELLO RUSSO, *Utilizzazione ottimale dei dati per la determinazione della posizione*. Annali I.U.N., Vol. XLV-XLVI, Napoli, 1976-77.
- ANIELLO RUSSO, *Linearizzazione in navigazione di un luogo di posizione*. Laboratorio per la didattica della Navigazione, I.U.N., Napoli, 1984.

CAPITOLO SECONDO

- M. YVON VILLARCEAU, *Nouvelle navigation astronomique*. Gautier-Villars, Paris, 1877.
- GIUSEPPE SIMEON, *Dispense di Astronomia nautica*. Istituto Universitario Navale, Napoli.
- GIANCARLO LUCARELLI, *Circonferenze d'altezza*. Monografie della cattedra di Astronomia Nautica, I.U.N., Napoli, 1977.

CAPITOLO TERZO

- VINCENZO RUSSO, ANIELLO RUSSO, ANTONINO SPOSITO, *Sistemi di radionavigazione a medio e lungo raggio*. Editore Luca Torre, Napoli, 1983.
- ANIELLO RUSSO, *Incertezza di un luogo di posizione*. Atti dell'Accademia Pontaniana, Vol. XXXIII, Napoli, 1984.
- VINCENZO NASTRO, ANIELLO RUSSO, *Determinazione delle coordinate geografiche con misure di differenze di distanze*. Annali I.U.N., Vol. XXXVII, Napoli, 1968.

CAPITOLO QUARTO

- MASSIMO VANNI, *Navigazione sferica*. Atti dell'Accademia dei Lincei, Serie VI, Vol. VI, fasc. XI, Roma, 1937.
- ANTONINO SPOSITO, *Complementi di radionavigazione*. Appunti dalle lezioni dell'anno accademico 1984-85. Istituto di Astronomia Nautica e Navigazione, I.U.N., Napoli, 1985.
- E.C. MODENA, *Navigazione piana*. Accademia Navale, Livorno, 1941.
- GIUSEPPE SIMEON, *Dispense del corso di Navigazione*. Istituto Universitario Navale, Napoli.

CAPITOLO QUINTO

- GIUSEPPE SIMEON, *Dispense del corso di Navigazione*. Istituto Universitario Navale, Napoli.
- IDEALE CAPASSO, SERGIO FEDE, *Navigazione*. Vol. 1, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1971.
- GIANCARLO LUCARELLI, *Il problema del punto più probabile in Astronomia Nautica*. Monografie della Cattedra di Astronomia Nautica. I.U.N., Napoli, 1978.
- Enciclopedia delle matematiche elementari*. Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1937.
- Manuale dell'ufficiale di rotta*. Istituto Idrografico della Marina, Genova.

CAPITOLO SESTO

- D.F. MORRISON, *Metodi di analisi statistica multivariata*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1976.
- M. ÉMIL BOREL, *Principes et formules classiques du calcul des probabilités*. Gauthier, Villars, Paris, 1958.
- GUIDO CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, Vol. I, Zanichelli, Bologna, 1971.
- PAUL FOMBONNE, *Radionavigation - Radiolocalisation*. Masson, 1983.
- PAUL FOMBONNE, *La dégradation géométrique de la précision*, Navigation Nr. 131, juillet 1985.
- PAUL S. JORGENSEN, *La configuration a 18 satellites du Navistar - GPS*; Navigation Nr. 115, juillet 1981.

CAPITOLO SETTIMO

- N.S. CHRISTOPHER, *Marine integrated navigation system*. Navigation (USA), Vol. 16, n. 4, 1969.
- R.G. BROWN, *Integrated navigation system and Kalman filtering: a prospective*. Navigation (USA), Vol. 19, n. 4, 1972.
- K. RAMSAYER, *Integrated navigation by least square adjustment*. Institute für Flugnavigation der Universität, Stuttgart, 1970.
- VINCENZO NASTRO, ANIELLO RUSSO, *Filtro di Kalman nei sistemi di navigazione autonoma assistita*. Annali I.U.N., Vol. XXXIX, Napoli, 1970.
- VINCENZO NASTRO, *Il filtro di Kalman e le sue applicazioni in navigazione*. Seminario di Navigazione, I.U.N., Napoli, 1975.
- ANTONINO ESPOSITO, *Metodi della navigazione integrata*. Tesi di laurea in Navigazione, Relatore Prof. Vincenzo Nastro, I.U.N., a.a. 1973-74.
- CARLO COPPOLA, *Teoria ed applicazione del filtro di Kalman ai sistemi integrati di navigazione*. Tesi di laurea in Navigazione, Relatore Prof. Vincenzo Nastro, I.U.N., a.a. 1974-75.

INDICE

<i>Presentazione</i>	pag.	7
<i>Introduzione</i>	»	9
1 - LUOGO DI POSIZIONE	»	11
1.1 Generalità	»	11
1.2 Equazione generale di un luogo di posizione	»	12
1.3 Linearizzazione	»	12
1.4 Incertezza di un luogo di posizione	»	17
1.5 Rappresentazione di un luogo di posizione sulle carte di navigazione	»	18
1.6 Considerazioni varie	»	20
2 - MISURE DI DISTANZE	»	23
2.1 Luogo di posizione	»	23
2.2 Distanze con misure di altezze di astri	»	28
2.3 Equazione della circonferenza di distanza	»	30
2.4 Circonferenza di distanza sulla carta di Mercatore	»	33
2.5 Linearizzazione dell'equazione della circonferenza di distanza	»	42
2.6 Retta d'altezza	»	45
2.7 Misure di piccole distanze	»	47
2.8 Distanza da satelliti artificiali - Luogo di posizione	»	50
2.9 Linearizzazione dell'equazione della sfera	»	53
2.10 Incertezza	»	53
2.11 Punto stimato sul meridiano o sull'antimeridiano del centro della circonferenza di distanza	»	54
2.12 Misure di variazioni di distanze - Luogo di posizione	»	57
3 - MISURE DI DIFFERENZE E SOMME DI DUE DISTANZE	»	61
3.1 Luoghi di posizione	»	61
3.2 Equazioni dell'iperbole e dell'ellisse sferiche	»	63
3.3 Linearizzazione delle equazioni dell'iperbole e dell'ellisse sferiche	»	67
3.4 Bisettrice di distanza	»	68
3.5 Differenza e somma delle distanze da due satelliti artificiali - Luoghi di posizione	»	71
3.6 Incertezze	»	73

4 - MISURE DI ANGOLI	pag. 77
4.1 Generalità	» 77
4.2 Luogo di posizione quando si rileva da un punto non noto (da un mobile, in generale)	» 80
4.3 Equazione della curva d'azimut	» 82
4.4 Linearizzazione dell'equazione della curva d'azimut	» 83
4.5 Semiretta di rilevamento	» 85
4.6 Incertezza della curva d'azimut e della semiretta di rilevamento	» 87
4.7 Luogo di posizione quando si rileva da un punto noto - Equazione	» 89
4.8 Linearizzazione dell'equazione della circonferenza massima	» 90
4.9 Incertezza della curva ortodromica e della semiretta di rilevamento	» 91
4.10 Correzione di Givry	» 92
4.11 Luogo di posizione per angoli sottesi a due punti noti - Equazione e sua linearizzazione	» 94
4.12 Curva di uguale differenza d'azimut per piccole distanze	» 97
4.13 Incertezza	» 100
4.14 Misura dell'angolo tra le direzioni ai centri dei due astri - Luoghi di posizione ed equazioni	» 106
4.15 Linearizzazioni ed incertezze	» 111
5 - DETERMINAZIONE DELLA POSIZIONE	» 113
5.1 Risoluzione analitica e grafica	» 113
5.2 Variazione dei parametri di posizione dovuta al moto del mobile	» 114
5.3 Trasporto di una retta di posizione	» 118
5.4 Tecnica di Gauss dei minimi quadrati	» 121
5.5 Punto più probabile (<i>PPP</i>) nel caso di una sola misura	» 124
5.6 Determinazione della posizione in vicinanze di coste	» 127
5.7 Determinazione della posizione in casi particolari	» 133
5.8 Determinazione della posizione con Terra ellissoidica	» 134
6 - INCERTEZZA DELLA POSIZIONE	» 135
6.1 Generalità	» 135
6.2 Valutazione deterministica dell'incertezza della posizione	» 135
6.2.1 Caso piano	» 135
6.2.2 Caso spaziale	» 140
6.3 Valutazione statistica dell'incertezza della posizione	» 141
6.3.1 Volume e zona di certezza (o d'incertezza) statistica	» 141
6.3.2 Caso piano	» 147
6.3.3 Ancora sui semiassi dell'ellissoide e dell'ellisse di probabilità	» 153
6.4 Errore radiale e diluizione geometrica della precisione	» 155
6.5 Alcuni esempi	» 161

7 - PRINCIPI DI NAVIGAZIONE INTEGRATA	pag. 167
7.1 Introduzione	» 167
7.2 Schema di un sistema di navigazione integrata	» 168
7.3 Navigazione quale «sistema»	» 170
7.4 Equazione di stato in navigazione lossodromica	» 173
7.5 Filtraggio statistico - Filtro di Kalman	» 176
<i>Bibliografia</i>	» 179