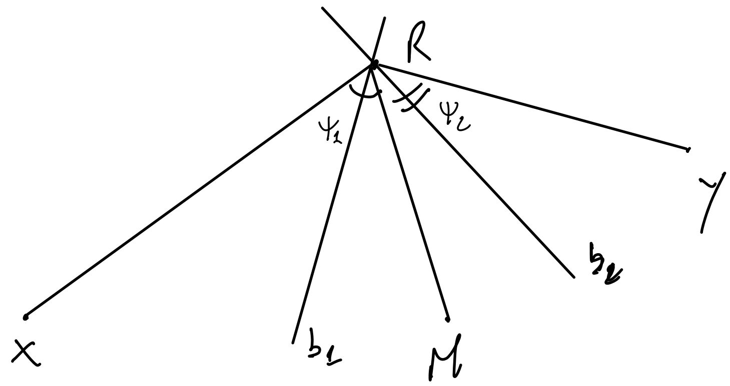
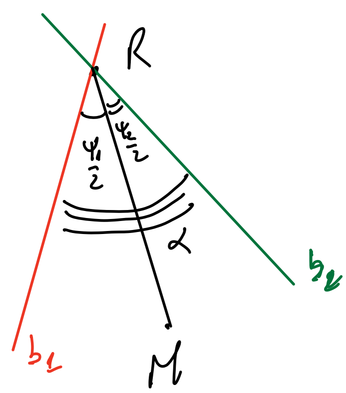
Si supponga che un ricevitore Loran posto in R riesca a misurare le differenze di distanza, Δd_i con $i=1,2$ da due coppie di stazione di una catena e cioè MX ed MY poste in tre posizioni (note) differenti della superficie terrestre, rispettivamente M, X e Y e con una differenza d'azimut, per ogni coppia, pari a ψ_1 e ψ_2.



La posizione del ricevitore sarà determinata dall'intersezione dei due rami di iperbole (associate alle due misure di differenza di distanza) o meglio delle rispettive linearizzazione e ciòè le bisettrici di distanza b_1 e b_2.

Sia α l' angolo tra tali bisettrici, geometricamente si ha:



$$\boxed{\alpha = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}}$$

Se le misure di differenza di distanza sono affette da errori allora l'incertezza sul luogo di posizione (e sulla sua linearizzazione) dalla teoria è data da:

$$\delta s_i = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\psi_i}{2} \, \delta \Delta d_i \qquad i = 1,2 \qquad (1)$$

Sappiamo che le stime di distanza sono ottenute indirettamente da misure dirette del tempo di volo di segnali elettromagnetici emesse dalle stazioni della catena Loran. Nell'ipotesi che il ricevitore commetta lo stesso errore x nella misura diretta dei tempi di volo dei segnali ricevuti, si ha:

$$\delta \Delta d_i = k x \qquad \text{con } k = 0{,}162$$

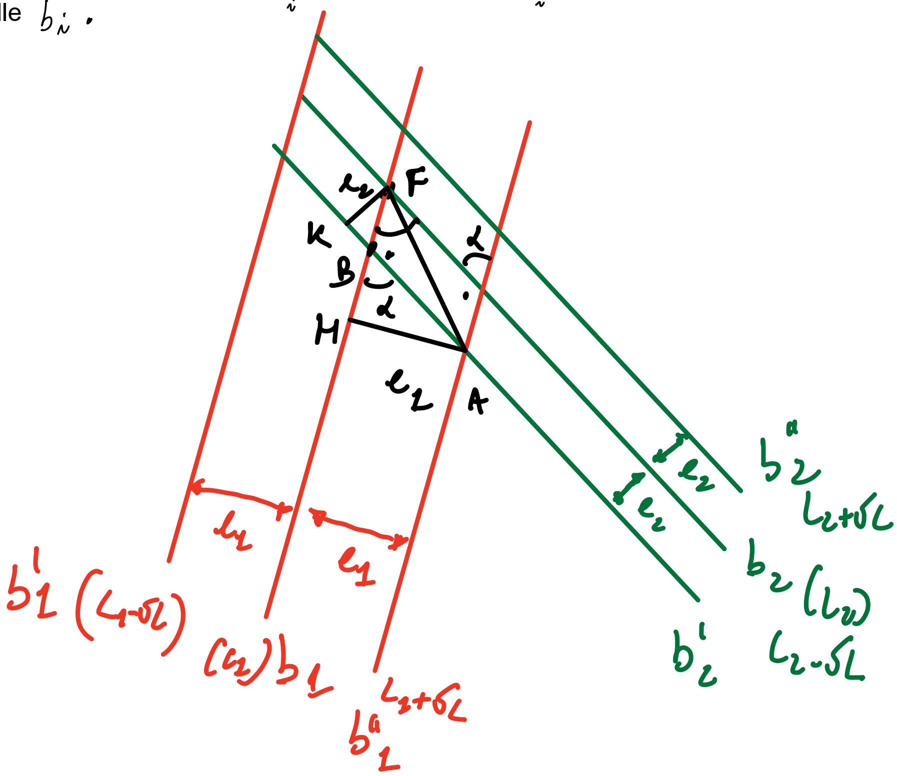
dove k è un fattore che traduce l'errore sul tempo in termini di distanza.
Pertanto dalla (1) si ha che le incertezze delle due bisettrici sono rispettivamente:

$$\delta s_1 = e_1 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\psi_1}{2} \cdot k \cdot x$$

$$\delta s_2 = e_2 = \pm \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\psi_2}{2} \cdot k \cdot x$$

incertezze che dipendono pertanto puramente da fattori geometrici e cioè dagli angoli ψ_1 e ψ_2

Per la presenza di tali incertezza sulle bisettrici non sarà possibile determinare il FIX (F in figura intersezione delle b_i) ma una zona (detta zona di incertezza) all' interno della quale esso si trova. Tale zona è delimitata dalle bisettrici b'_i e b''_i associate rispettivamente alle sottostime $L_i - \delta L$ e sottovrastime $L_i + \delta L$ delle misure di differenza di distanza $L_i = \Delta d_i$ e distanti l_i dalle b_i.



L'errore massimo sulla stima della posizione è rappresentato geometricamente dalla semidiagonale maggiore di tale parallelogramma FA.
Per calcolarlo applichiamo il teorema di Carnot al triangolo $A\hat{F}B$

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BF}\cos(A\hat{B}F) \qquad (2)$$

Dove:

$$\overline{AF} = l \qquad A\hat{B}F = \pi - \alpha$$

Applicando l'equazioni della trigonometria piana ai trangoli $B\hat{H}A$ e $F\hat{K}B$ si ha:

$$\overline{AB} = \frac{l_1}{\sin\alpha} \quad e \quad BF = \frac{l_2}{\sin\alpha}$$

Sostituendo nella (2) e considerato che $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ si ha:

$$l^2 = \frac{l_1^2}{\sin^2\alpha} + \frac{l_2^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{l_1 l_2}{\sin^2\alpha}\cos(\pi-\alpha) \Rightarrow l = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos\alpha}$$

Sostituendo la (1) e considerando $\alpha = \frac{\psi_1+\psi_2}{2}$ si ha:

$$l = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)}\sqrt{K^2x^2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\psi_1}{2}\right) + K^2x^2\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\psi_2}{2}\right) + 2K^2x^2\operatorname{cosec}\frac{\psi_1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\psi_2}{2}\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)}$$

e cioè:

$$\ell = \frac{K n}{2\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\psi_1}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\psi_2}{2}} + 2\frac{1}{\sin\frac{\psi_1}{2}\cdot\sin\frac{\psi_2}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)}$$

Avendo definito Diluition of Precision (DoP) di un sistema di navigazione il rapporto tra incertezza della posizione δ_{POS} ed incertezza di misura δ_{MIS} :

$$DoP = \frac{\delta_{POS}}{\delta_{MIS}}$$

si che che il DoP Loran è:

$$DoP = \frac{\ell}{K n} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\psi_1}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\psi_2}{2}} + 2\frac{\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)}{\sin\frac{\psi_1}{2}\cdot\sin\frac{\psi_2}{2}}}$$