Diluition of Precision (DoP)

Determinato il metodo che permette di stimare una grandezza, un indice della bontà di tale stima è rappresentato dalla sia varianza. Per il vettore stato $\underline{x}$ non è sufficiente parlare di varianza ma di **matrice di varianza-covarianza** definita da

$$VC(\underline{x}) = E\left[(\underline{x} - \hat{\underline{x}})(\underline{x} - \hat{\underline{x}})^T\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \sigma_y^2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \sigma_z^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{b_u}^2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Dove:

$E[.]$ è l'operatore media,

$\hat{\underline{x}}$ la stima della grandezza,

$\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$ e $\sigma_{b_u}^2$ le varianze delle componenti del vettore stato.

Gli elementi extra-diagonali consistono nelle covarianze, ma non saranno oggetto del presente studio.

Nel caso del posizionamento assoluto satellitare oggetto di stima è:

$$\underline{\Delta x_{LS}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{\Delta\rho}$$

e cioè la differenza tra il vettore stimato dello stato e il vettore noto a priori.

$$\begin{aligned} \underline{\Delta x_{LS}} &= \underline{x_{LS}} - \underline{x_0} \\ &= \underline{x} + d\underline{x_{LS}} - \underline{x_0} \\ &= \underline{x} - \underline{x_0} + d\underline{x_{LS}} \end{aligned}$$

Dove: $\underline{x_{LS}}$, stima ai minimi quadrati del vettore stato, può essere considerato pari alla somma della vera grandezza $\underline{x}$ e dell'errore di stima $d\underline{x_{LS}}$.
Pertanto:

$$\underline{\Delta x_{LS}} = \underline{\Delta x} + d\underline{x_{LS}} \quad (1)$$

$$\underline{\Delta x} + d\underline{x_{LS}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{\Delta\rho} \quad (3)$$

Analogamente $\underline{\Delta\rho}$, e cioè la differenza tra PR misurata $\underline{\tilde{\rho}}$ e sua misura predetta $\underline{\rho_0}$ è pari a

$$\underline{\Delta\rho} = \underline{\tilde{\rho}} - \underline{\rho_0}$$

$$= \underline{\rho} + \underline{d\rho} - \underline{\rho_0}$$

$$\underline{\Delta\rho} = \underline{\rho} - \underline{\rho_0} + \underline{d\rho}$$

Dove: $\underline{\rho}$ è la vera PR e $\underline{d\rho}$ l'errore di misura.

Sostituendo in (3):

$$\underline{\Delta x} + d\underline{x}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T \left[\left(\underline{\rho} - \underline{\rho_0}\right) + \underline{d\rho}\right]$$

$$\underline{\Delta x} + d\underline{x}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T \left(\underline{\rho} - \underline{\rho_0}\right) + (H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho} \qquad (4)$$

Considerato che:

$$\underline{\Delta x} = (H^T H)^{-1} H^T \left(\underline{\rho} - \underline{\rho_0}\right)$$

e cioè che se si hanno a disposizione le vere pseudorange, l'equazione appena scritta rappresenta le correzioni da apportare allo stato a priori per ottenere lo stato vero, sostituendo nella (4), si ha:

$$d\underline{x}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}$$

Si supponga che gli errori di misura $\underline{d\rho}$ siano indipendenti tra loro ed uguali e cioè che la varianza di ogni pseudorange sia pari a σ_{PR}^2 e quindi:

$$VC\left(\underline{d\rho}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{PR}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{PR}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{PR}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{PR}^2 \end{bmatrix} = \sigma_{PR}^2 I_m \qquad (5)$$

e cioè la relativa matrice di varianza-covarianza avrà gli stessi valori sulla diagonale e sarà una matrice quadrata di ordine m.

Applicando la definizione di matrice di varianza-covarianza per $d\underline{x}_{LS}$ si ha:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = E\left[\left(d\underline{x} - dx_{LS}\right)\left(d\underline{x} - dx_{LS}\right)^T\right] \qquad (5)$$

Dalla (2) possiamo scrivere che $\underline{\Delta x}_{LS}$:

$$\underline{\Delta x}_{LS} = \underline{x} - \underline{x_0} + d\underline{x}_{LS}$$

da cui:

$$d\underline{x}_{LS} = \Delta\underline{x}_{LS} - \Delta\underline{x}$$

Analogamente possiamo scrivere che:

$$d\underline{x} = \Delta\underline{x} - \Delta\underline{x} = 0$$

Sostituendo nella (5) si ha:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = E[dx_{LS}\,(dx_{LS})^T] \tag{6}$$

Sostituendo l'espressione $d\underline{x}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}$, l'equazione (6) diventa:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = E\left\{(H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}\ \left[(H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}\right]^T\right\}$$

Note le proprietà[1] dei prodotti tra matrici e delle matrici simmetriche, è possibile scrivere:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = E\left\{(H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}\ \ \underline{d\rho}^T [(H^T H)^{-1} H^T]^T\right\}$$

Il termine $H^T H$ è una matrice simmetrica, per cui:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = E\left\{(H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}\ \ \underline{d\rho}^T H (H^T H)^{-1}\right\}$$

I termini $(H^T H)^{-1} H^T$ e $H(H^T H)^{-1}$ sono delle costanti, in quanto si tratta di prodotti di matrici note. È per questo che possono essere portati all'esterno dell'operatore "media", rispettivamente a sinistra e a destra di quest'ultimo.

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = (H^T H)^{-1} H^T E\left\{\underline{d\rho}\ \ \underline{d\rho}^T\right\} H (H^T H)^{-1}$$

Il termine $E\left\{\underline{d\rho}\ \ \underline{d\rho}^T\right\} = VC\left(\underline{d\rho}\right) = \sigma_{PR}^2 I$.

Dunque:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = (H^T H)^{-1} H^T\ \sigma_{PR}^2 I\ \ H (H^T H)^{-1}$$

---

[1] Richiamo di algebra lineare sul prodotto trasposto di due matrici A e B:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Richiamo di algebra lineare su una proprietà di una matrice simmetrica N:

$$N^{-1} = N^T$$

Richiamo sulla linearità dell'operatore media. Data una costante α e una variabile $\underline{x}$:

$$E\left(\alpha\underline{x}\right) = \alpha E\left(\underline{x}\right)$$

Essendo, inoltre, $IH = H$ l'equazione diventa:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = \sigma_{PR}^2\ (H^T H)^{-1} H^T\ H (H^T H)^{-1}$$

Il prodotto: $(H^T H)^{-1} H^T\ H = I$ dunque:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = \sigma_{PR}^2\ (H^T H)^{-1}$$

Si ponga:

$$G = (H^T H)^{-1}$$

Analizzando i termini delle matrici in gioco:

$$size(H^T) = 4 \times m$$

$$size(H) = m \times 4$$

Dunque:

$$size(G) = 4 \times 4$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$$

Considerando la relazione (*) si ha:

$$VC\left(d\underline{x}_{LS}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \sigma_y^2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \sigma_z^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{b_u}^2 \end{bmatrix} = \sigma_{PR}^2 \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = G_{11}\sigma_{PR}^2 \\ \sigma_y^2 = G_{22}\sigma_{PR}^2 \\ \sigma_z^2 = G_{33}\sigma_{PR}^2 \\ \sigma_{b_u}^2 = G_{44}\sigma_{PR}^2 \end{cases} \tag{7}$$

Il rapporto tra l'incertezza di una variabile generica di stato σ_{x_i} e l'errore di misura σ_{PR} si definisce *Diluition Of Precision (DOP)*:

$$\frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_{PR}} = DOP$$

Se si considerano tutte e tre le componenti posizionali del vettore stato (x, y, z) si definisce il *Position DOP* (PDOP):

$$PDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33}}$$

Se si considerano tutti e quattro le componenti dello stato (x, y, z, b_u) si parla di *Geometric DOP* (GDOP):

$$GDOP = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_{b_u}^2}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33} + G_{44}}$$

Se si considera soltanto il bias dell'orologio del ricevitore b_u si parla di *Time DOP* (TDOP):

$$TDOP = \frac{\sqrt{\sigma_{b_u}^2}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{44}}$$