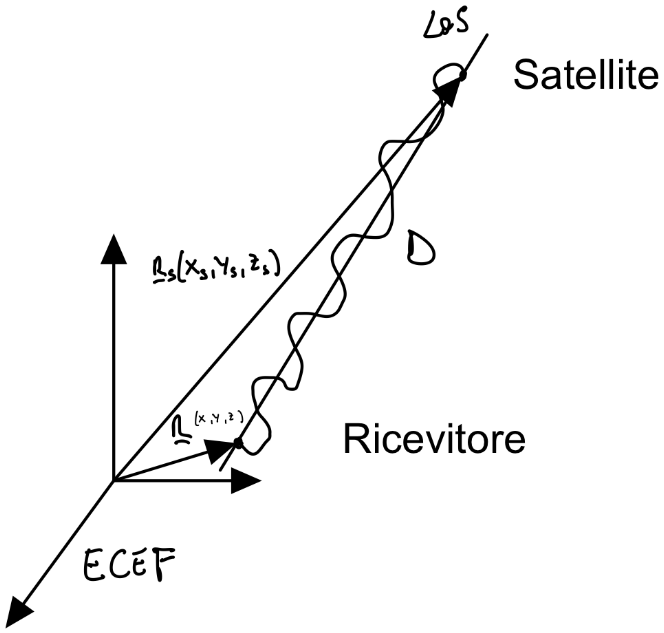
L’equazione di pseudorange

Il GPS (Global Positioning System) è un sistema di navigazione il cui principio di posizionamento è basato sull’intersezione di sfere di distanza centrate nei satelliti, di posizione nota grazie alle effemeridi. La distanza geometrica satellite-ricevitore *D* è una misura indiretta, ottenuta misurando il tempo di volo del segnale Δt (che viaggia dal satellite al ricevitore) e moltiplicandolo per la sua velocità di propagazione *c* (pari alla velocità della luce nel vuoto):



$$D = c\,\Delta t = c\,(t_R - t_E)$$

Dove:

- t_R è l’istante di ricezione del segnale;
- t_E è l’istante di emissione del segnale.

Considerato il sistema di riferimento (SdR) ECEF la distanza geometrica *D* tra ricevitore e satellite è dato dal modulo del vettore linea di vista (Line of Sight – LoS) le cui componenti sono la differenza delle componenti dei vettori posizione del ricevitore e del satellite, e cioè:

$$D = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2}$$

Dove:

(X_s, Y_s, Z_s) sono le componenti note del vettore posizione, $\underline{R_S}$ del satellite e

(X, Y, Z) sono le componenti incognite del vettore posizione, $\underline{R}$ del ricevitore satellitare.

Nel caso in cui il tempo di volo è misurato da un orologio, tale stima $\tilde{\Delta}t$ è data dalla somma del valore vero Δt e l'errore della misura stessa indicato con $\delta\Delta t$, quindi:

$$\tilde{\Delta}t = \Delta t + \delta\Delta t$$

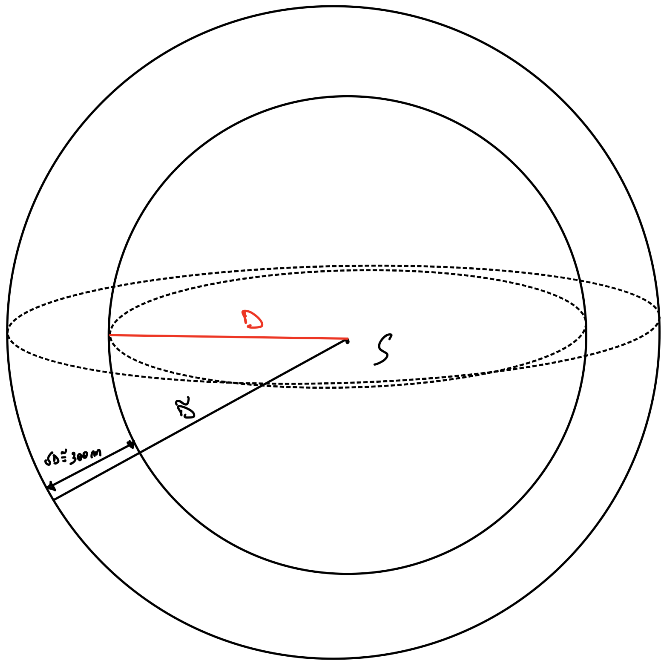
Se, per esempio, $\delta\Delta t = 10^{-6}s$, segue la stima di distanza $\widetilde{D}$ è:

$$\widetilde{D} = c\,\tilde{\Delta}t = c\,(\Delta t + \delta\Delta t) = c\,\Delta t + c\,\delta\Delta t = D + 3 \cdot 10^{6}\ {}^{km}/_{s} \cdot 10^{-6}\ s = D + 300m$$

Dove:

- $c\,\Delta t$ è la distanza vera D;
- $c\,\delta\Delta t$ è l'errore della stima di distanza.

Se si considera il luogo di posizione associato a tale misura di distanza (sfera di distanza centrata nella posizione del satellite e di raggio $\widetilde{D}$), esso differisce da quello relativo alla misura esatta di circa 300m. Ovviamente, si tratta di un errore non tollerabile.



Il tempo, come già visto, è una grandezza misurata con particolari sensori, detti orologi o cronometri. Si supponga che il sistema GPS disponga di un orologio privo di errore, detto **orologio di sistema** (o GPS), in grado di misurare il tempo (di sistema) in modo estremamente accurato.

Graficamente, una misura di tempo può essere associata ad un sistema di riferimento lineare la cui origine rappresenta l'istante di inizio della misurazione (per il GPS il 01/01/1980), mentre un punto su tale asse rappresenta un'epoca di misura qualsiasi.

Per convenzione, si indicano con agli apici i sistemi che misurano un istante considerato (t^{GPS} per l'orologio di sistema).

Con l'ipotesi che il tempo GPS sia privo di errore[1], è possibile affermare che la distanza *D* sarà:

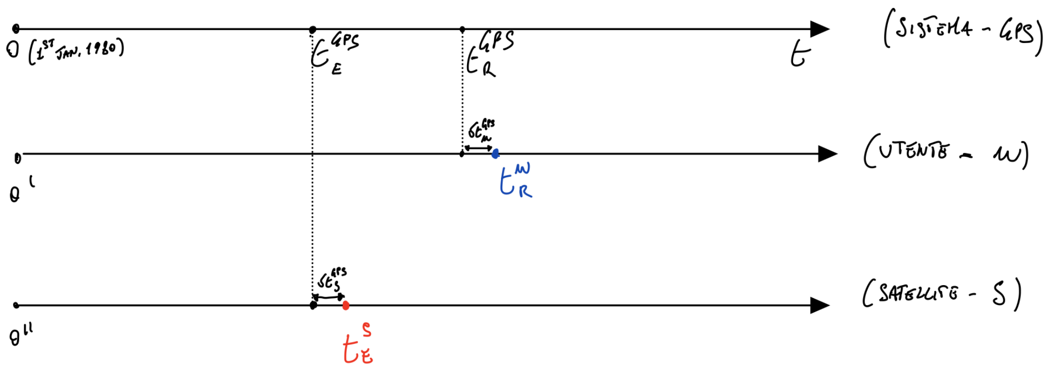
$$D = c\,(t_R^{GPS} - t_E^{GPS})$$

Dove:

- t_R^{GPS} è l'istante di ricezione misurato dall'orologio GPS;
- t_E^{GPS} è l'istante di emissione misurato dall'orologio GPS.

Tuttavia, l'istante di ricezione è misurato dall'orologio del ricevitore (t_R^u) che è scarsamente accurato rispetto all'orologio del satellite, che invece misura l'istante di emissione (t_E^s).

Rappresentiamo nella figura seguente le scale temporali; di sistema (GPS) del ricevitore/utente (*u*) e del satellite (*S*).



Come si nota dalla figura, è chiaro che le epoche di emissione e ricezione sono misurate da due orologi differenti.

[1] In realtà non è privo di errore, ma è costantemente corretto dalle stazioni del segmento di controllo e caratterizzato da un'accuratezza tale da poterlo considerare privo di errore.

L'istante di ricezione t_R^u può essere considerato come il suo valore corretto t_R^{GPS} e l'errore che lo caratterizza δt_u^{GPS}, che può, a sua volta, essere considerato come un bias tra le due scale temporali (del ricevitore e GPS). Lo stesso dicasi per t_E^s:

$$t_R^u = t_R^{GPS} + \delta t_u^{GPS} \tag{1}$$

$$t_E^s = t_E^{GPS} + \delta t_s^{GPS}$$

Pertanto, il tempo di volo del segnale misurato sarà:

$$\Delta t = t_R^u - t_E^s$$

Moltiplicando tale misura per la velocità di propagazione del segnale, che ricordiamo essere supposta pari alla velocità della luce nel vuoto c , si ottiene una stima della distanza ricevitore satellite definita *pseudorangei* o misura di codice ed indicata con PR o ρ, pertanto:

$$PR = \rho = c\,\Delta t = c\,(t_R^u - t_E^s) + \Delta PR$$

dove con ΔPR si indicano tutti gli errori che intervengono su tale stima e che saranno esplorati successivamente.

Pertanto:

$$PR = \rho = c\,\Delta t = c\,(t_R^u - t_E^s) + \Delta PR$$

Sostituendo le (1) si ha:

$$\rho = c\,(t_R^{GPS} + \delta t_u^{GPS} - t_E^{GPS} - \delta t_s^{GPS}) + \Delta PR =$$

$$= c\,[(t_R^{GPS} - t_E^{GPS}) + \delta t_u^{GPS} - \delta t_s^{GPS}] + \Delta PR =$$

$$= c\,(t_R^{GPS} - t_E^{GPS}) + c\,\delta t_u^{GPS} - c\,\delta t_s^{GPS} + \Delta PR =$$

Ponendo $c\,\delta t_u^{GPS} = b_u$ e considerato che $c\,(t_R^{GPS} - t_E^{GPS}) = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2}$ si ha:

$$\rho = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2} + b_u - c\,\delta t_s^{GPS} + \Delta PR$$

Il tempo di sistema è costantemente monitorato dal segmento di controllo al fine di elaborare termini correttivi che, attraverso il segnale GPS, vengono inviati ai ricevitori. Grazie a ciò, è possibile ottenere una stima degli errori, $\delta(c\,\delta t_s^{GPS})$, che affliggono le misure di tempo dei satelliti:

$$c\,\widetilde{\delta t_s^{GPS}} = c\,\delta t_s^{GPS} + \delta(c\,\delta t_s^{GPS})$$

da cui:

$$c\,\delta t_s^{GPS} = c\,\widetilde{\delta t_s^{GPS}} - \delta(c\,\delta t_s^{GPS})$$

Effettuando la precedente sostituzione, l'equazione di pseudorange diventa:

$$\rho = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2} + b_u - c\,\widetilde{\delta t_s^{GPS}} + \delta(c\,\delta t_s^{GPS}) + \Delta PR$$

Portando al primo membro $c\,\widetilde{\delta t_s^{GPS}}$ e quindi correggendo la stima ρ con tale termine si ha la pseudorange corretta ρ_c:

$$\rho + c\,\widetilde{\delta t_s^{GPS}} = \rho_c = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2} + b_u + \delta(c\,\delta t_s^{GPS}) + \Delta PR$$

Ponendo: $\delta(c\,\delta t_s^{GPS}) + \Delta PR = \varepsilon$ è possibile rappresentare, con un unico termine, gli errori residui che affliggono la pseudorange dopo le applicazioni di modelli che consentono la correzione degli errori di altre fonti così suddivisi in:

- Errori dovuti al **satellite**: errore d'orologio, errore sulla posizione, errori relativistici (;
- Errori dovuti al **propagamento del segnale in atmosfera**, suddivisa in ionosfera e troposfera. Le particelle di questi strati interagiscono con l'onda elettromagnetica, deviandone il percorso. Da ciò deriva che la distanza satellite-ricevitore sarà maggiorata, in quanto il segnale non effettuerà un percorso rettilineo a causa della rifrazione subita. Queste rifrazioni sono indicate con Δd_{iono} e Δd_{tropo} e sono modellate: per l'errore troposferico si sfrutta prevalentemente il modello Saastamoinen, mentre per l'errore ionosferico si sfrutta il modello Klobuchar;
- Errori **interni al ricevitore**: errori legati al funzionamento e/o legati al riscaldamento del ricevitore stesso. Essi implicano una certa rumorosità (*noise*) della misura.

  Un altro effetto locale (dipendente dalla posizione del ricevitore) è la riflessione del segnale da parte di edifici\superfici riflettenti attorno al ricevitore, la quale implica una distanza satellite-ricevitore maggiorata, proprio a causa di tale fenomeno noto con il nome di *multipath*.

L'equazione di pseudorange, che rappresenta il modello di misura sarà, in definitiva:

$$\rho_c = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2} + b_u + \varepsilon \qquad (2)$$

L'errore (*bias*) dell'orologio del ricevitore, b_u. non può essere corretto in quanto non è possibile monitorarlo, così come fatto per gli orologi dei satelliti. Per tale motivo, la sincronizzazione degli orologi non avverrà fisicamente, ma analiticamente, considerando b_u un'ulteriore incognita del problema.

Il vettore delle incognite, detto **stato**, sarà quindi:

$$\underline{x} = (X, Y, Z, b_u)$$

Questo spiega perché, ai fini del posizionamento, sono necessarie almeno quattro misure di distanza (satellite-ricevitore).

L'equazione (1) ha proprio l'espressione di un luogo di posizione, in quanto lega la misura L alle incognite del problema (posizione del ricevitore e bias del suo orologio).

Procediamo quindi a linearizzare tale equazione e per farlo bisogna conoscere una posizione iniziale (detta anche stimata) e il bias iniziale $0_0(X_0, Y_0, Z_0, b_{u_0})$ in base alla quale è possibile calcolare la "misura predetta" di pseudorange $\rho_0 = f(X_0, Y_0, Z_0, b_{u_0}) = L_0$.

Confrontando L con L_0 si ottiene:

$$L - L_0 = l = \rho - \rho_0 = h_1\, dx + h_2\, dy + h_3\, dy + h_4\, db_u$$

Dove:

- $h_1 = \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)_0 = -\frac{\Delta X_0}{D_0}$ ed è il primo coseno direttore della LoS satellite-ricevitore;
- $h_2 = \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)_0 = -\frac{\Delta Y_0}{D_0}$ ed è il secondo coseno direttore della LoS satellite-ricevitore;
- $h_3 = \left(\frac{\delta f}{\delta z}\right)_0 = -\frac{\Delta Z_0}{D_0}$ ed è il terzo coseno direttore della LoS satellite-ricevitore.

con $D_0 = \sqrt{(X_S - X_0)^2 + (Y_S - Y_0)^2 + (Z_S - Z_0)^2}$

Il termine h_4 è pari a $\left(\frac{\delta f}{\delta b_u}\right)_0 = 1$

Allora:

$$\rho - \rho_0 = \left(-\frac{\Delta X_0}{D_0}\right) dx + \left(-\frac{\Delta Y_0}{D_0}\right) dy + \left(-\frac{\Delta Z_0}{D_0}\right) dz + 1 db_u + \varepsilon$$

Le incognite saranno quindi le componenti del vettore $\underline{\Delta x} = (dx, dy, dz, db_u)$, stimate le quali è possibile aggiornare (se come punto iniziale si considera una posizione precedente del ricevitore) o correggere (se come punto iniziale si considera la posizione fornita da un sistema di navigazione ausiliario) la posizione stimata del ricevitore:

$$X = X_0 + dx$$

$$Y = Y_0 + dy$$

$$Z = Z_0 + dz$$

$$b_u = b_{u_0} + db_u$$

Per stimare tali grandezze sono necessarie <u>almeno</u> quattro equazioni, e dunque di un numero minimo di quattro satelliti in vista. Ovviamente, è necessario affidarsi ad un numero $m > 4$ per poter applicare di un metodo di stima per la presenza degli errori di misura ε.

Considerato, quindi, il caso di m misure simultanee di pseudorange queste si tradurranno in m equazioni:

$$\begin{cases} \rho_1 - \rho_{1_0} = \left(-\frac{\Delta X_{0_1}}{D_{0_1}}\right) dx + \left(-\frac{\Delta Y_{0_1}}{D_{0_1}}\right) dy + \left(-\frac{\Delta Z_{0_1}}{D_{0_1}}\right) dz + 1\, db_u + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \rho_m - \rho_{m_0} = \left(-\frac{\Delta X_{0_m}}{D_{0_m}}\right) dx + \left(-\frac{\Delta Y_{0_m}}{D_{0_m}}\right) dy + \left(-\frac{\Delta Z_{0_m}}{D_{0_m}}\right) dz + 1\, db_u + \varepsilon_m \end{cases}$$

Rinominando con h_{ij} ogni coefficiente della linearizzazione, con i pari al numero del satellite e j pari al numero del coefficiente, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \rho_1 - \rho_{1_0} = h_{11} dx + h_{12} dy + h_{13} dz + 1\, db_u + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \rho_m - \rho_{m_0} = h_{m1} dx + h_{m2} dy + h_{m3} dz + 1\, db_u + \varepsilon_m \end{cases} \tag{3}$$

Si noti che i primi tre coefficienti sono dati dalle componenti dei coseni direttori della LoS (per l'i-mo satellite $h_{ij} = h_j$).

Scrivendo in forma compatta il sistema di equazioni (3) si ha:

$$\underline{z} = H\underline{\Delta x} + \underline{\varepsilon}$$

dove

$\underline{z} = \begin{bmatrix} \rho_1 - \rho_{1_0} \\ \vdots \\ \rho_m - \rho_{m_0} \end{bmatrix}$ è detto **vettore delle misure**;

$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice di *m* righe (pari al numero di equazioni) e 4 colonne detta **matrice disegno** ("disegno" perché dipende solo dai dati geometrici della LOS);

$\underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ db_u \end{bmatrix}$ è il **vettore delle incognite o stato**;

$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$ è il vettore che contiene gli errori residui.

Questo modello di misura sovradeterminato, si risolve con il metodo dei minimi quadrati e cioè:

$$\underline{\Delta x_{LS}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{z}$$

Ottenuti gli incrementi sulla posizione stimata iniziale, la posizione finale sarà:

$$\underline{x_{LS}} = \begin{bmatrix} X_0 + \Delta x_{LS_0} \\ Y_0 + \Delta y_{LS_0} \\ Z_0 + \Delta z_{LS_0} \\ b_{u_0} + \Delta b_{u_{LS_0}} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$\underline{x_0} + \underline{\Delta x_{LS}} = \underline{x_{LS}}$$

La bontà della stima finale dipende dalla bontà delle misure effettuate e, per via della linearizzazione, dalla posizione iniziale stimata. Per quest'ultimo motivo il processo di stima deve essere iterativo. Ciò significa che la soluzione determinata, diverrà il nuovo valore di partenza per ripetere il processo, correggendo o aggiornando ogni volta la stima iniziale (detta stato a priori x_0).