

Introduzione al Sistema GPS

Obbiettivo:

**Definire e descrivere il sistema GPS,
l'architettura,
il principio di funzionamento,
le prestazioni,
le applicazioni**

Navigazione Satellitare

Le origini

Il nome completo del sistema GPS è:

NAVSTAR GPS

NAVigation System with Timing And Ranging Global Positioning System

Il GPS nasce come sistema militare per consentire posizionamento di soldati o mezzi militari:

- **real-time**
- **accuratezza 10-20 metri**
- **passivo (non trasmittente)**
- **grande numero di utenti a basso costo**
- **copertura globale e continua**

Navigazione Satellitare

Un po' di storia

'60	US Navy	-	Transit
	US Air Force	-	Timation
1973			621B
	DoD -> USAF		DNSS=Timation+621B DNSS -> NAVSTAR GPS
1973-79	NAVSTAR GPS – Fase I		Concept Validation
1978	Lancio 1° SV (Block I)		
1979-85	NAVSTAR GPS – Fase II		Full-scale Development & Test (9 SV lanciati in 6 anni)
1985-presente	NAVSTAR GPS – Fase III		Production & Deployment
1993	Fase IOC (Initial Operating Capability)		24 SV tra prototipi (Block I) e di produzione (Block II)
1995	Fase FOC (Full Operational Capability)		24 SV Block II

Navigazione Satellitare

Il GPS e i sistemi di radionavigazione

Il GPS è un sistema di radio-navigazione

Sistema	Frequenza	Lunghezza d'onda	Errori 2D	Copertura	Infrastrut.	Propagaz.
Omega	10-13 kHz	26 km	3-6 km	globale	terrestre	non LOS
Loran	100 kHz	2.5 km	500 m	parziale	terrestre	non LOS
VOR/ DME	108-118 MHz 960-1200 MHz	~2.5 m 31-25 cm	60-80 m	locale	terrestre	LOS
ILS	330 MHz	~1 m	5-10 m	locale	terrestre	LOS
Transit	150-400 MHz	2 m - 73 cm	500 m	globale	spaziale	LOS
GPS/ GNSS	1.2-1.6 GHz	25-19 cm	10 m	globale	spaziale	LOS

Caratteristiche del sistema GPS

- **Sistema di navigazione satellitare**
- **Copertura globale**
- **Posizionamento 3D**
- **Servizio continuo**
- **Accuratezza**
- **Funziona in ogni condizione meteo**
- **Velocità**
- **Sincronizzazione tempo UTC**

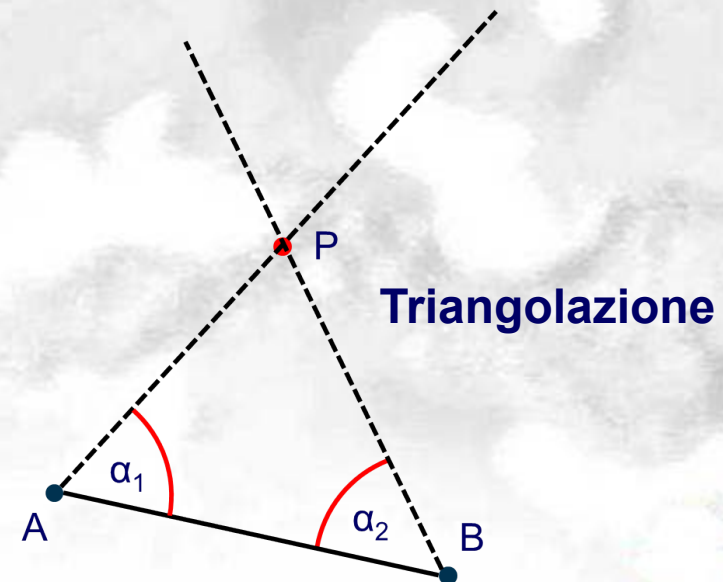
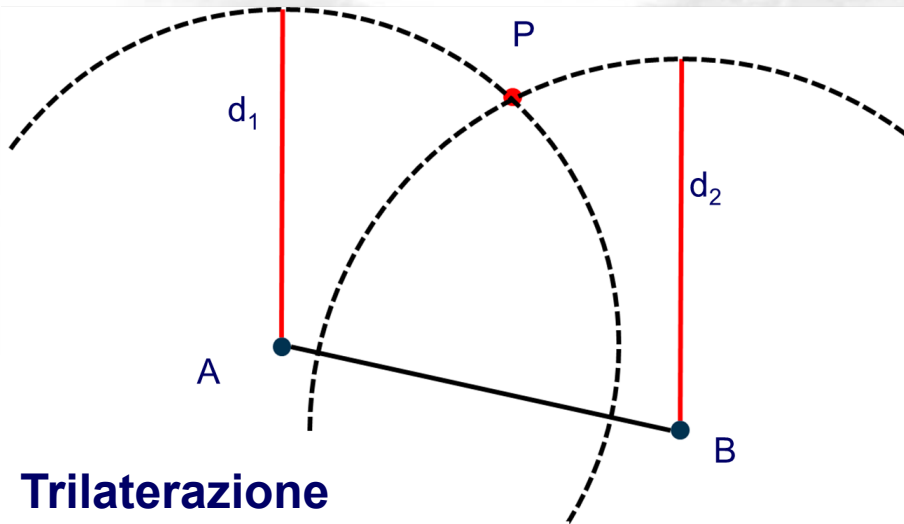
Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento

La determinazione della posizione mediante il sistema GPS si basa su misure di distanza (in particolare distanze ricevitore-satelliti) e sulla tecnica della trilaterazione.

- **Trilaterazione**

Determinazione delle coordinate di un punto misurando le lunghezze dei lati di un triangolo tra il punto di coordinate incognite e due punti di coordinate note.



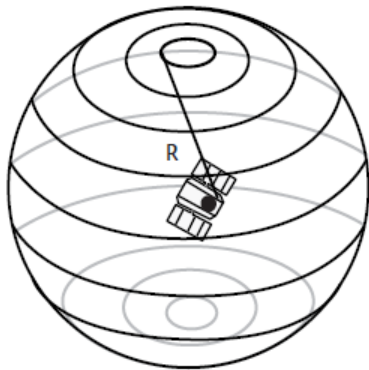
Principio di funzionamento

La trilaterazione nel posizionamento GPS:

- ✓ Le posizioni dei satelliti sono considerate note
- ✓ La distanza (misurata) ricevitore-satellite definisce un luogo di posizione sferico, centrato nella posizione del satellite (nota) e di raggio pari alla distanza misurata
- ✓ La posizione (incognita) del ricevitore è determinata dalla intersezione di luoghi di posizione sferici.

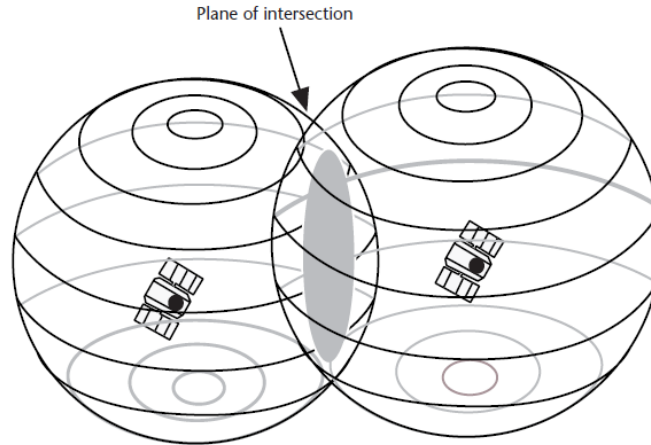
Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento



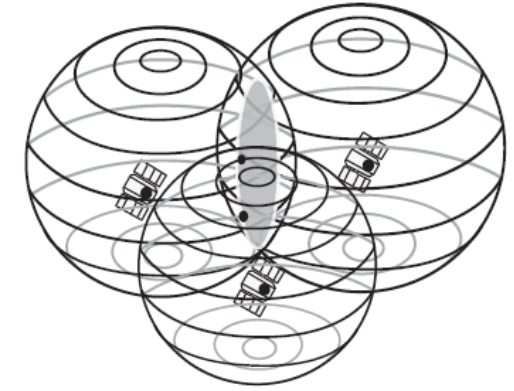
1 misura di distanza

il ricevitore può trovarsi in un qualunque punto della sfera di posizione



2 misure di distanza

il ricevitore si trova in un qualunque punto della circonferenza intersezione delle 2 sfere di posizione



3 misure di distanza

il ricevitore si trova in uno dei 2 punti, intersezioni delle 3 sfere di posizione

Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento

misura di distanza ricevitore-satellite:

- ✓ ogni SV GPS trasmette un radio-segnale codificato (diverso da SV a SV)
- ✓ il ricevitore riceve il segnale e misura il tempo impiegato dal segnale a propagarsi dal SV al ricevitore
- ✓ La distanza ricevitore-satellite è ottenuta moltiplicando il tempo di propagazione del segnale per la sua velocità (pari alla velocità della luce)

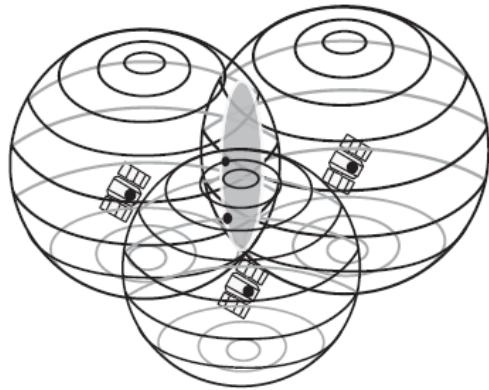
$$d = c \cdot \Delta t$$

Il tipo di misura di distanza (*ranging*) effettuato dal GPS è detto «one-way ranging», in contrasto con il «two-way ranging» che caratterizza SONAR, RADAR, distanziometro ad onde

Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento

Con 3 misure contemporanee di distanza (SV-ricevitore), IN TEORIA, si può evincere che il ricevitore si trova in uno dei 2 punti, intersezioni delle 3 sfere di posizione.



Tale ambiguità sarebbe facilmente risolvibile avendo a disposizione una informazione a priori sulla posizione approssimata del ricevitore (anche errata di qualche centinaio di km).

Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento

In realtà per una accurata stima della posizione del ricevitore, sono necessarie 4 misure contemporanee di distanza, in quanto alle tre coordinate incognite va aggiunta una quarta incognita che rappresenta l'asincronia tra l'orologio del ricevitore ed il tempo di sistema.

4 incognite = 3 coordinate + 1 offset clock del ricevitore

Il motivo della quarta incognita è che la distanza ricevitore-satellite viene ottenuta dalla misura del tempo di propagazione del segnale dal SV al ricevitore, per calcolare la quale è necessario che i rispettivi clock siano sincronizzati (non è possibile!!)

Navigazione Satellitare

Principio di funzionamento

I clock di satellite e ricevitore NON sono sincronizzati

- ✓ I satelliti sono equipaggiati con orologi atomici ad elevate prestazioni
(~100 kg, ~200 000 \$)
- ✓ I ricevitori sono equipaggiati con molto più economici e inaccurati orologi al quarzo di precisione

Per capire l'importanza dell'asincronia tra clock di satellite e ricevitore...

Un errore di 1 / 1 000 000 di sec nella misura del tempo di propagazione, causa un errore nella misura della distanza ricevitore-satellite di 300 metri;

$$d' = c \cdot \Delta t' = c \cdot (\Delta t + \delta t) = c \cdot (\Delta t + 10^{-6} \text{sec}) = d + 300 \text{ m}$$

ne risulta luogo di posizione sferico molto incerto e grandi errori nella posizione!

GNSS (Global Navigation Satellite System)

- **GPS**
- **GLONASS**
 - Sistema Russo (pienamente operativo)
- **Galileo**
 - Sistema Europeo (in fase di implementazione)
- **BeiDou**
 - Sistema Cinese

Augmentation del GPS (GNSS)

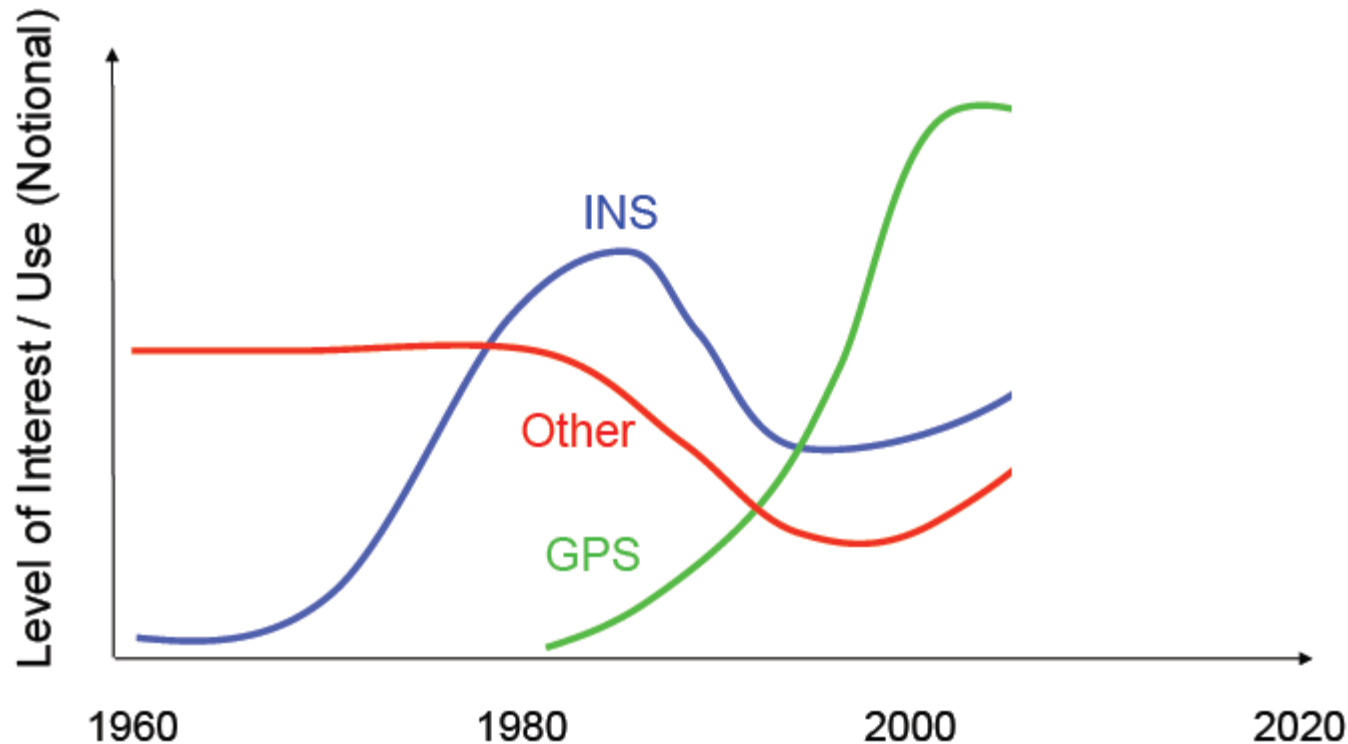
Si tratta di sistemi/metodi per potenziare le prestazioni del GPS (o del GNSS) in termini di integrità, continuità, disponibilità, accuratezza mediante l'uso di informazioni esterne al ricevitore.

- ✓ SBAS (Satellite Based Augmentation System)
- ✓ GBAS (Ground Based Augmentation System)
- ✓ DGPS (Differential GPS)
- ✓ RTK (Real Time Kinematic)
- ✓ PPP (Precise Point Positioning)

Navigazione Satellitare

Applicazioni

Il sistema GPS, nato per scopi militari negli anni 80' per la navigazione in tempo reale, si è rapidamente diffuso divenendo il sistema di navigazione dominante...



Da Raquet J., Practical Ubiquitous Navigation – The Need for Self-Building World Model, UPINLBS 2012

Navigazione Satellitare

...e le sue applicazioni si sono moltiplicate...

✓ Terrestri

- ✓ Posizionamento veicolare in tempo reale (Navigatori da auto, Gestione flotte di veicoli)
- ✓ Posizionamento pedonale (hiking, LBS)
- ✓ Posizionamento in casi di emergenza (911)
- ✓ Rilievo topografico
- ✓ Monitoraggio deformazioni
- ✓ Agricoltura di precisione

✓ Aeree

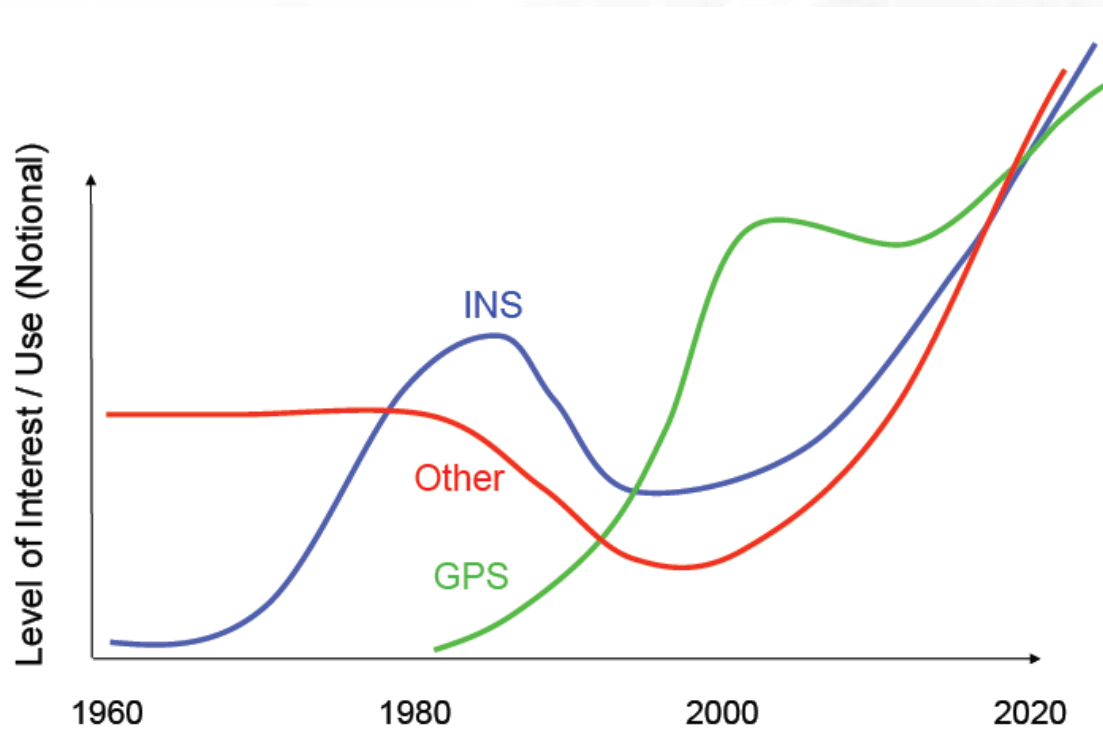
- ✓ Posizionamento di velivoli in tempo reale
- ✓ Operazioni ATM
- ✓ Aerofotogrammetria

✓ Marine

- ✓ Posizionamento strutture off-shore
- ✓ Rilievo batimetrico
- ✓ Navigazione marittima

Navigazione Satellitare

...ma nel futuro della navigazione non c'è solo il GPS...



Da Raquet J., Practical Ubiquitous Navigation – The Nedd for Self-Building World Model, UPINLBS 2012

ARCHITETTURA DEL SISTEMA

Architettura del Sistema GPS

- **Segmento spaziale**
 - Costellazione 24 satelliti (SV), 6 piani orbitali, orbite circolari...
- **Segmento di controllo**
 - Rete di stazioni a terra per monitorare posizione e stato dei SV e inviarle ai SV
- **Segmento di utenza**
 - Illimitato numero di utenti equipaggiati con ricevitore GPS

Navigazione Satellitare

Space Segment (SS) o Segmento Spaziale:

- **Consiste di una costellazione di satelliti artificiali**
- **I satelliti trasmettono «ranging signal» (o codici) e «messaggio di navigazione» (info necessarie per posizionamento!)**
- **Sistemi a bordo:**
 - **Navigation payload (generazione codici e msg di navigazione, comunicazione con il segmento di controllo)**
 - **Sistema di controllo del veicolo (assetto del SV, orientamento dei pannelli solari)**
 - **Payload NUDET (NUclear DETection), sistema per l'individuazione di fenomeni radioattivi sulla Terra**

Navigazione Satellitare

Costellazione GPS: parametri nominali

- ✓ 24 satelliti
- ✓ 6 piani orbitali (4 SV per piano)
- ✓ Periodo orbitale $\frac{1}{2}$ giorno sidereo (12 ore sideree = 11 ore e 58 minuti)
- ✓ Orbite circolari (eccentricità nulla)
- ✓ Nodi ascendenti equispaziati (a 60° l'uno dall'altro)
- ✓ Inclinazione 55°
- ✓ Raggio dell'orbita 26600 Km

La costellazione «reale» è caratterizzata da parametri perturbati rispetto ai valori nominali

Navigazione Satellitare

Periodo orbitale (12 ore sideree = 11 ore e 58 minuti) e Raggio dell'orbita (26600 Km) sono legati dalla **terza legge di Keplero**

$$\frac{T^2}{a^3} = k$$

k costante che dipende dal corpo intorno a cui avviene la rivoluzione

a semiasse maggiore

T periodo orbitale

Navigazione Satellitare

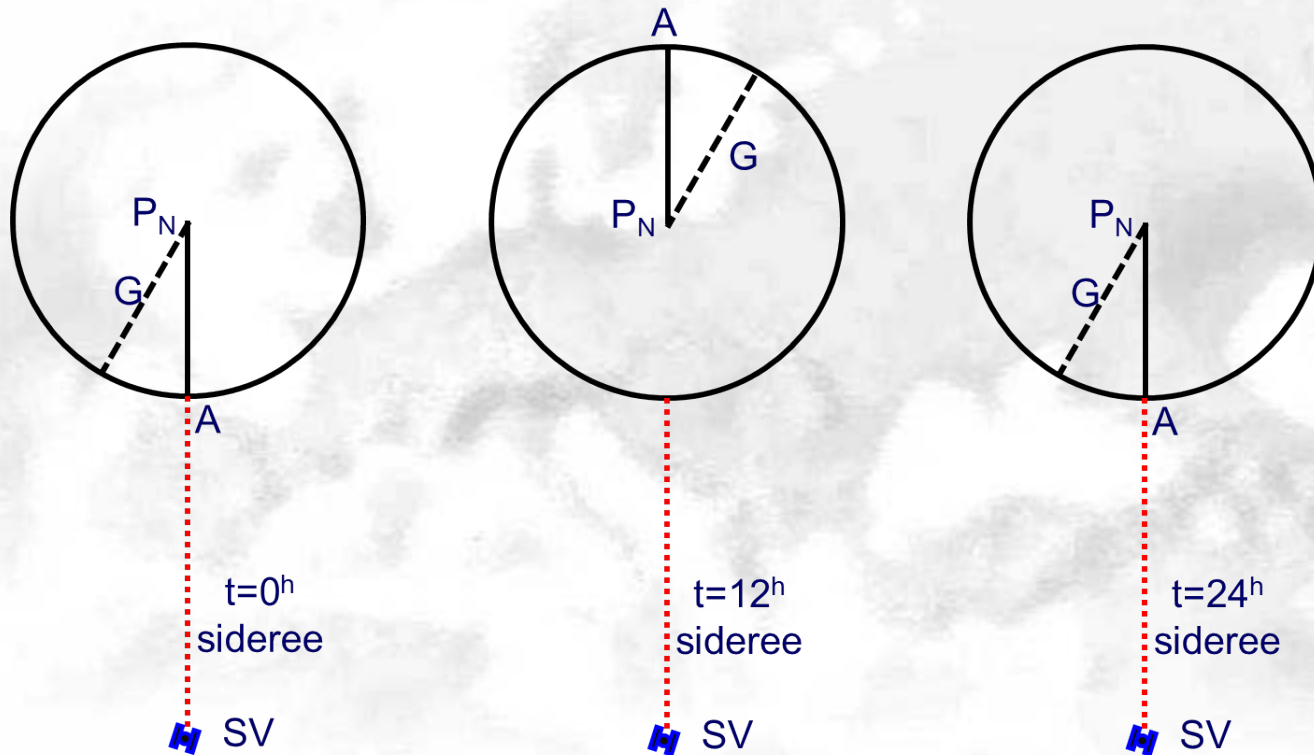
Il **giorno sidereo** è l'intervallo di tempo compreso fra due passaggi consecutivi di una stella sullo stesso meridiano o equivalentemente il tempo impiegato dalla Terra per compiere un'intera rotazione

1 giorno sidereo = 24 ore sideree = 23 ore e 56 minuti

Il **giorno solare** è l'intervallo di tempo compreso fra due passaggi consecutivi del sole sullo stesso meridiano ed è circa 4 minuti più lungo del giorno sidereo (a causa della rivoluzione terrestre)

Navigazione Satellitare

Il periodo orbitale dei SV GPS (12 ore sideree) è tale che i SV sorvolano la stessa località ogni 24 ore sideree



Navigazione Satellitare

I satelliti GPS hanno subito una progressiva evoluzione con il passare degli anni, per cui si sono susseguite diverse generazioni di satelliti (dette *Block*)

- **Block I**
- **Block II / IIA / IIR / IIR-M / IIF**
- **Block III**

**SV sono lanciati come rimpiazzo di SV da dismettere
Tutti i SV lanciati si sono dimostrati più «longevi» del previsto**

Navigazione Satellitare

Control Segment (CS) o Segmento di Controllo o Segmento Terrestre:

- Comprende tutte le infrastrutture terrestri necessarie al supporto della costellazione GPS
- monitora e gestisce la costellazione GPS

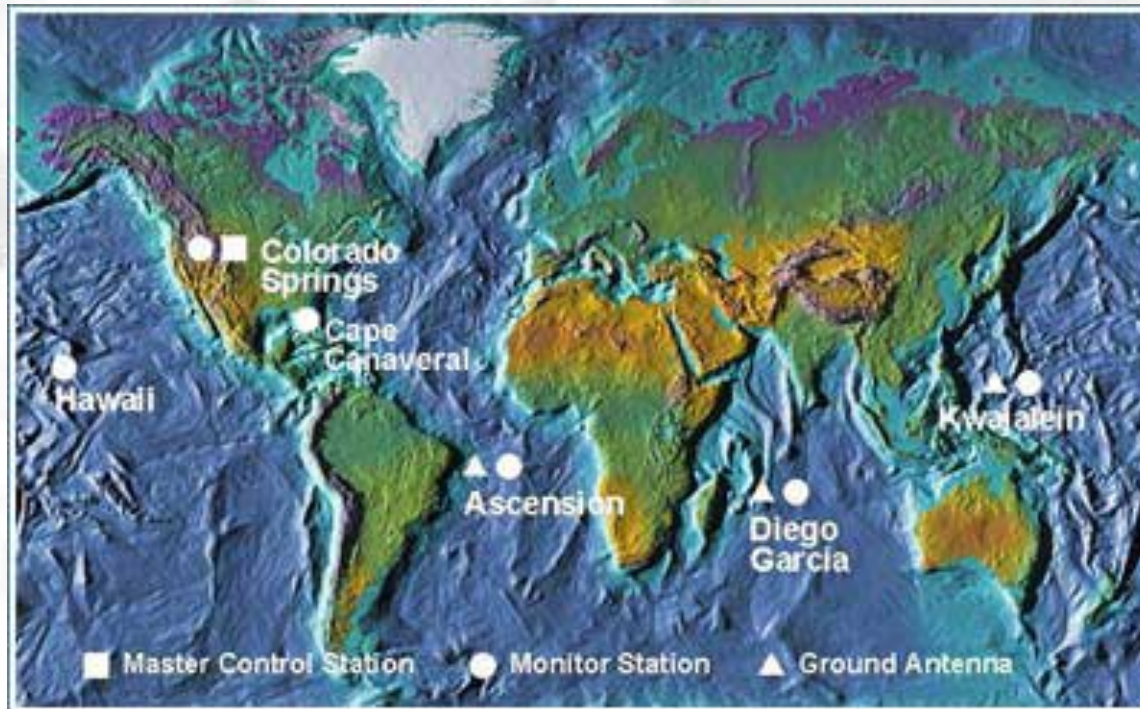
Funzioni primarie del CS:

- ◆ Riceve ed elabora il segnale GPS in banda L (lo stesso ricevuto dagli utenti)
- ◆ Genera il messaggio di navigazione
- ◆ Monitora il funzionamento dei satelliti (health)
- ◆ Gestisce le manovre dei satelliti e il ricarico delle batterie (Comanda il payload)
- ◆ Trasmette le info da includere nel messaggio di navigazione in banda S

Navigazione Satellitare

Principali componenti del CS

- ◆ Master Control Station (MCS)
- ◆ Monitor Station (MS) (banda L)
- ◆ Ground Antenna (GA) (banda S)



Navigazione Satellitare

Master Control Station (MCS)

- si trova a Colorado Springs (Colorado) ed è la base di controllo della missione
- una MCS di backup è a Vandenberg (California)
- controlla in remoto MS e GA (*unmanned*)

Principali funzioni della MCS

- ◆ Monitoraggio e mantenimento SV Health
- ◆ Monitoraggio orbite SV
- ◆ Stima e predizione dei parametri dei clock (offset/drift) e delle effemeridi dei SV
- ◆ Generazione messaggio di navigazione
- ◆ Mantenere il tempo di sistema e tenerlo sincronizzato all'UTC
- ◆ Sincronizzazione clock SV
- ◆ Valutazione stato e prestazione del sistema GPS
- ◆ Gestione manovre dei SV

Navigazione Satellitare

Monitor Station (MS)

- 6 MS distribuite sul globo (quasi) uniformemente
- È prevista l'aggiunta di ulteriori 14 MS (per continuo monitoraggio dei SV, attualmente con 6 MS possono esservi interruzioni fino a 2 ore)
- Collezionano ranging data, meteo data, SV status data
- Forniscono i dati raccolti alla MCS

Equipaggiamento MS:

- Ricevitore doppia frequenza (L1/L2)
- 2 oscillatori atomici al cesio
- Sensori meteo (pressione, temperatura e punto di rugiada superficiali per modellare errore troposferico)
- Equipaggiamento per la comunicazione (con la MCS)
- Workstation

Navigazione Satellitare

Ground Antenna (GA)

- Fungono da interfaccia tra il CS e il segmento spaziale
- Sono equipaggiate per trasmettere ai satelliti
 - Comandi (manovre, ricarica batterie)
 - Dati di navigazione
- Ricevono dai satelliti dati di telemetria
- Le GA trasmettono e ricevono in banda S (2-4 GHz)



Navigazione Satellitare

User Segment o Segmento di Utenza:

**Comprende tutte gli utenti equipaggiati da ricevitore GPS, costituito da
Antenna, ricevitore, processore, I/O unità, alimentazione**

Esistono molti tipi di ricevitori, caratterizzati da peso, ingombro, prezzo, prestazioni molto diverse, adatti alle più svariate applicazioni ed esigenze: militari, civili, geodetici, per navigazione, per alte dinamiche,...

POSIZIONAMENTO ASSOLUTO (SINGLE POINT POSITIONING – SPP)

*per approfondimenti si consideri la dispensa 31_C03_A06_4_Eq_PR

Navigazione Satellitare

Modalità di posizionamento

- ✓ Assoluto (o Single Point Positioning – Precise Point Positioning)
- ✓ Relativo
- ✓ Differenziale

I posizionamenti relativo e differenziale si basano sull'uso di due ricevitori, di cui uno in posizione nota

- ✓ Statico
- ✓ Cinematico

- ✓ In real-time
- ✓ Post-processing

- ✓ Codici
- ✓ Fase

Sistemi di Navigazione Radioelettrici



Trasmittente

distanza



Ricevente

Misure di Tempo

Misure di fase

Misure di Tempo

$$d = c(t_r - t_e)$$



Trasmittente



Satellite Clock
Orologio Atomico



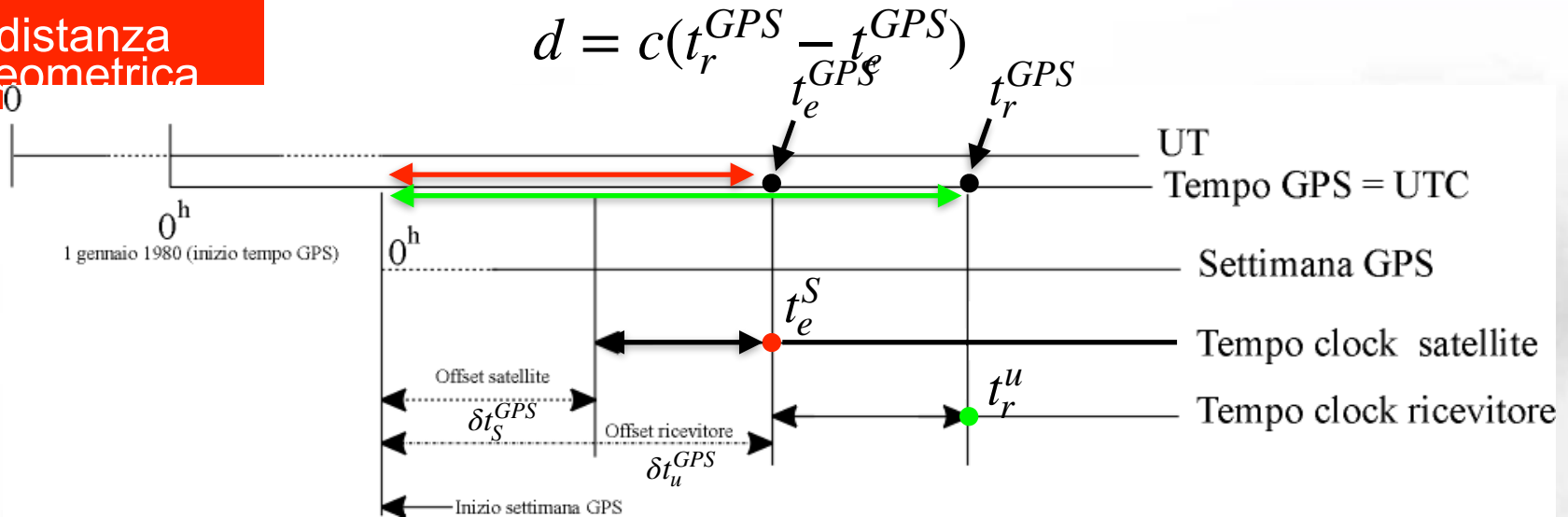
Receiver (User) Clock
Orologio Quarzo



Ricevente

Problema Scale Temporali

distanza
geometrica



Misura del ricevitore

$$PR = c(t_r^u - t_e^S) + \delta PR$$

Sincronizzazione Analitica (non possibile quella fisica):

Posto: $t_r^u = t_r^{GPS} + \delta t_u^{GPS}$ e $t_e^S = t_e^{GPS} + \delta t_S^{GPS}$ e cioè per entrambi gli orologi consideriamo la rispettiva stima data dalla vera grandezza (coincidente con il tempo di sistema - GPS) più il relativo errore (bias del clock)

$$PR = c(t_r^{GPS} + \delta t_u^{GPS} - t_e^{GPS} - \delta t_S^{GPS}) + \delta PR = c [(t_r^{GPS} - t_e^{GPS}) - \delta t_S^{GPS} + \delta t_u^{GPS}] + \delta PR$$

$$PR = c(t_r^{GPS} - t_e^{GPS}) - c\delta t_S^{GPS} + c\delta t_u^{GPS} + \delta PR = d + c\delta t_u^{GPS} - c\delta t_S^{GPS} + \delta PR$$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

equazione di misura, detta di pseudo-range (PR)
comprensiva di tutte le possibili fonti di errore è:

$$PR = d + c\delta t_u^{GPS} - c\delta t_S^{GPS} + \Delta d_{iono} + \Delta d_{tropo} + \Delta d_{rel} + \Delta d_{mp} + \Delta d_{noise}$$

Correggendo la misura (laddove è possibile), si ottiene:

$$PR_c = d + c\delta t_u^{GPS} + \epsilon$$

4 incognite:

3 coordinate del ricevitore («nascoste» in d)

+

1 offset del clock del ricevitore rispetto al tempo GPS

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Nel sistema di riferimento ECEF

$$d = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2}$$

$(x_s \ y_s \ z_s)$ **coordinate del satellite**

$(x_u \ y_u \ z_u)$ **coordinate del ricevitore**

$$PR_c = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2} + c\delta t_u^{GPS} + \epsilon$$

Semplificazione della notazione:

$$\rho = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2} + b_u + \epsilon$$

Equazione non lineare nelle incognite:

- Soluzione in forma chiusa
- Linearizzazione

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Linearizzazione dell'equazione di misura di PR (necessaria stima a priori dello stato)

$$\rho = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2} + b_u + \epsilon = f(x_u, y_u, z_u, b_u)$$

Sviluppo in serie di Taylor al primo ordine

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{(funzione di singola variabile)}$$

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \quad \text{(funzione di due variabili)}$$

$$\text{Vettore stato:} \quad \underline{x} = [x_u \quad y_u \quad z_u \quad b_u]^T$$

$$\text{Vettore stato «a priori»:} \quad \underline{x}_0 = [x_{u0} \quad y_{u0} \quad z_{u0} \quad b_{u0}]^T$$

$$\rho = f(\underline{x}) \cong f(\underline{x}_0) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_u} \cdot (x_u - x_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial y_u} \cdot (y_u - y_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial z_u} \cdot (z_u - z_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial b_u} \cdot (b_u - b_{u0})$$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Linearizzazione dell'equazione di misura di PR

$$\rho = f(\underline{x}) = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2} + b_u + \epsilon$$

$$\rho = f(\underline{x}) \cong f(\underline{x}_0) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_u} \cdot (x_u - x_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial y_u} \cdot (y_u - y_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial z_u} \cdot (z_u - z_{u0}) + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial b_u} \cdot (b_u - b_{u0})$$

Calcolo coefficienti

$$f(\underline{x}_0) = \sqrt{(x_s - x_{u0})^2 + (y_s - y_{u0})^2 + (z_s - z_{u0})^2} + b_{u0} = d_0 + b_{u0} = \rho_0$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_u} = -\frac{x_s - x_{u0}}{\sqrt{(x_s - x_{u0})^2 + (y_s - y_{u0})^2 + (z_s - z_{u0})^2}} = -\frac{x_s - x_{u0}}{d_0}$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial y_u} = -\frac{y_s - y_{u0}}{\sqrt{(x_s - x_{u0})^2 + (y_s - y_{u0})^2 + (z_s - z_{u0})^2}} = -\frac{y_s - y_{u0}}{d_0}$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial z_u} = -\frac{z_s - z_{u0}}{\sqrt{(x_s - x_{u0})^2 + (y_s - y_{u0})^2 + (z_s - z_{u0})^2}} = -\frac{z_s - z_{u0}}{d_0}$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial b_u} = 1$$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Equazione di misura di PR linearizzata

$$\rho = \rho_0 - \frac{x_s - x_u}{d_0}(x_u - x_{u0}) - \frac{y_s - y_u}{d_0}(y_u - y_{u0}) - \frac{z_s - z_u}{d_0}(z_u - z_{u0}) + (b_u - b_{u0})$$

Si ponga

$$h_1 = -\frac{\Delta x}{d_0}$$

$$\Delta x = x_u - x_{u0}$$

$$\Delta \rho = \rho - \rho_0$$

$$h_2 = -\frac{\Delta y}{d_0}$$

$$\Delta y = y_u - y_{u0}$$

$$h_3 = -\frac{\Delta z}{d_0}$$

$$\Delta z = z_u - z_{u0}$$

$$\Delta b = b_u - b_{u0}$$

misure
nuove o
linearizzate

coseni direttori
della direzione
ricevitore-SV

incognite
nuove o linearizzate

Si ottiene

$$\Delta \rho = h_1 \Delta x + h_2 \Delta y + h_3 \Delta z + \Delta b$$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

In caso di 4 misure simultanee (ϵ trascurabile) di PR

$$\begin{cases} \Delta\rho_1 = h_{11}\Delta x + h_{12}\Delta y + h_{13}\Delta z + \Delta b \\ \Delta\rho_2 = h_{21}\Delta x + h_{22}\Delta y + h_{23}\Delta z + \Delta b \\ \Delta\rho_3 = h_{31}\Delta x + h_{32}\Delta y + h_{33}\Delta z + \Delta b \\ \Delta\rho_4 = h_{41}\Delta x + h_{42}\Delta y + h_{43}\Delta z + \Delta b \end{cases}$$

In forma matriciale

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \Delta\rho_3 \\ \Delta\rho_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 1 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 1 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & 1 \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta b \end{bmatrix} = \underline{H} \cdot \underline{\Delta x}$$

Matrice Disegno
o
Matrice Geometrica

Il vettore delle incognite (nuove o linearizzate) si ottiene da $\underline{\Delta x} = H^{-1} \cdot \underline{z}$

Il vettore stato si ottiene $\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x}$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Se numero di misure $m > 4$, il sistema è sovradeterminato (non risolvibile in maniera deterministica)

$$\begin{cases} \Delta\rho_1 = h_{11}\Delta x + h_{12}\Delta y + h_{13}\Delta z + \Delta b \\ \vdots \\ \Delta\rho_m = h_{m1}\Delta x + h_{m2}\Delta y + h_{m3}\Delta z + \Delta b \end{cases}$$

In forma matriciale

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \vdots \\ \Delta\rho_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & h_{m3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta b \end{bmatrix} = H \cdot \underline{\Delta x}$$

Il vettore delle incognite (nuove o linearizzate) si ottiene con il metodo dei minimi quadrati

$$\underline{\Delta x}_{LS} = (H^{-T} \cdot H)^{-1} H^{-T} \cdot \underline{z}$$

Il vettore stato si ottiene:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x}_{LS}$$

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

- Il processo di linearizzazione è tanto più valido quanto più \underline{x}_0 è vicino al vero
- La stima di $\underline{\Delta x}$ viene ripetuta più volte aggiornando lo stato a priori in modo iterativo e cioè:

$$\begin{array}{c} \underline{x}_0 \\ \downarrow \\ \underline{\Delta x}_{LS} = (H^{-T} \cdot H)^{-1} H^{-T} \cdot \underline{z} \\ \downarrow \\ \underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x}_{LS} \\ \downarrow \\ \underline{\Delta x}_{LS} = (H^{-T} \cdot H)^{-1} H^{-T} \cdot \underline{z} \\ \downarrow \\ \underline{x}_2 = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x}_{LS} \\ \vdots \end{array}$$

in funzione di questo punto iniziale si calcolano H e \underline{z}

Criterio di arresto

Il processo iterativo viene arrestato quando le correzioni allo stato a priori diventano sufficientemente piccole da poter essere considerate trascurabili

Si può confrontare il modulo di $\underline{\Delta x}$ con una soglia

Navigazione Satellitare

Posizionamento assoluto con misure di pseudorange

Scelta della stima a priori dello stato \underline{x}_0

- ✓ \underline{x}_0 può essere posto uguale all'ultima uscita valida del ricevitore
- ✓ In caso di assenza di tale informazione, si può usare come coordinate approssimate della posizione del ricevitore le medie di latitudine e longitudine dei satelliti visibili, ponendo quota a priori zero e offset del clock del ricevitore nullo

Invece dei minimi quadrati, per la stima di $\underline{\Delta x}$, possono essere usati i minimi quadrati pesati

$$\underline{\Delta x} = (H^T W H)^{-1} H^T W \underline{z}$$

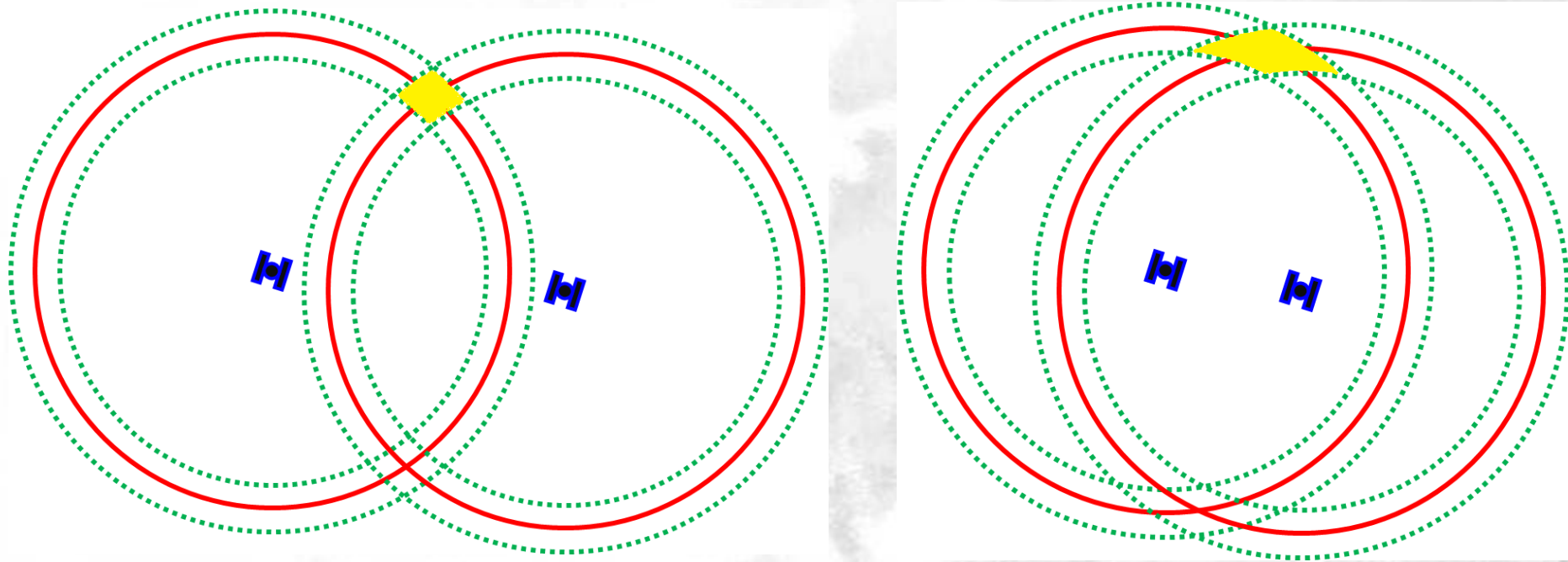
La matrice dei pesi W è scelta considerando le diverse accuratèzze delle misure
Con i minimi quadrati pesati è possibile un piccolo miglioramento dell'accuratèzza della soluzione

Dilution Of Precision (DOPs)

*per approfondimenti si consideri la dispensa 31_C03_A06_5_DoP

Navigazione Satellitare

La geometria di osservazione (ricevitore – satelliti) influenza l'accuratezza del posizionamento



A parità di incertezza sulle misure, una buona geometria consente errori nella soluzione inferiori ad una cattiva geometria

Navigazione Satellitare

Modello (linearizzato) di misura di pseudorange

$$\underline{\Delta \rho} = H \cdot \underline{\Delta x}$$

Soluzione ai minimi quadrati $\underline{\Delta x}_{LS} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{\Delta \rho}$

$$\underline{\Delta \rho} = \underline{\rho} - \underline{\rho}_0 = \underline{\rho}_v - \underline{\rho}_0 + \underline{d\rho}$$

Pseudorange error-free \uparrow Pseudorange a priori \uparrow Errori nella pseudorange \uparrow

$$\underline{\Delta x}_{LS} = \underline{x}_{LS} - \underline{x}_0 = \underline{x}_v - \underline{x}_0 + \underline{dx} \quad (*)$$

Stato error-free \uparrow Stato a priori \uparrow Errori nello stato \uparrow

➔ $\underline{x}_v - \underline{x}_0 + \underline{dx} = (H^T H)^{-1} H^T (\underline{\rho}_v - \underline{\rho}_0 + \underline{d\rho})$

Navigazione Satellitare

$$\underline{x}_v - \underline{x}_0 + \underline{dx} = (H^T H)^{-1} H^T (\underline{\rho}_v - \underline{\rho}_0 + \underline{d\rho})$$

poiché

$$\underline{x}_v - \underline{x}_0 = (H^T H)^{-1} H^T (\underline{\rho}_v - \underline{\rho}_0) \quad \longrightarrow \quad \underline{dx} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}$$

Relazione funzionale tra errori delle pseudorange ed errori (indotti) dello stato che dipende esclusivamente dalla geometria

$d\rho$ può essere considerata una variabile casuale e di conseguenza anche dx

Si assume che le componenti di $d\rho$ abbiano distribuzione Gaussiana e a media nulla

di conseguenza anche le componenti di dx hanno le stesse caratteristiche

Navigazione Satellitare

- ✓ Il valore atteso di una variabile casuale indica il valore medio di un fenomeno aleatorio

$$\bar{x} = E\{x\}$$

- ✓ Varianza di una variabile casuale indica quanto i vari valori assunti dalla variabile siano concentrati o dispersi intorno al valore atteso

$$\sigma^2(x) = E\{(x - \bar{x})^2\}$$

- ✓ Covarianza di due variabili casuali indica la reciproca dipendenza

$$\sigma(x, y) = E\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\}$$

- ✓ Matrice di varianza-covarianza di un vettore di variabili casuali

$$\underline{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$$

$$\Sigma = VC(\underline{x}) = E\{(\underline{x} - \underline{\bar{x}})(\underline{x} - \underline{\bar{x}})^T\}$$

$$\text{Elemento extra-diagonale } \Sigma_{ij} = E\left\{ (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right\} = \sigma(x_i, x_j)$$

$$\text{Elemento diagonale } \Sigma_{ii} = E\left\{ (x_i - \bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i) \right\} = \sigma(x_i, x_i) = \sigma^2(x_i)$$

Navigazione Satellitare

Matrice di varianza-covarianza del vettore degli errori dello stato \underline{dx}

$$VC(\underline{dx}) = E \left[(\underline{dx} - \underline{d\hat{x}}) (\underline{dx} - \underline{d\hat{x}})^T \right]$$

Poiché dalla relazione (*) : $\underline{dx} = \underline{\Delta x}_{LS} - \underline{\Delta x}$, si ha $\underline{d\hat{x}} = \underline{\Delta x}_{LS} - \underline{\Delta x}_{LS} = 0$, e quindi:

$$VC(\underline{dx}) = E\{(\underline{dx})(\underline{dx})^T\}$$

Sostituendo l'espressione $\underline{dx} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho}$

$$VC(\underline{dx}) = E \left\{ \left((H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho} \right) \left((H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho} \right)^T \right\} =$$

$$= E \left\{ \left((H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho} \right) \left(\underline{d\rho}^T H \left((H^T H)^{-1} \right)^T \right) \right\} =$$

$$= E \left\{ \left((H^T H)^{-1} H^T \underline{d\rho} \right) \left(\underline{d\rho}^T H (H^T H)^{-1} \right) \right\} =$$

$$= (H^T H)^{-1} H^T \cdot E \left\{ \left(\underline{d\rho} \right) \left(\underline{d\rho}^T \right) \right\} \cdot H (H^T H)^{-1} =$$

$$= (H^T H)^{-1} H^T \cdot VC(\underline{d\rho}) \cdot H (H^T H)^{-1}$$

Ricordando che

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Se N è una matrice quadrata e simmetrica

$$N^T = N$$

data la linearità dell'operatore media E()

Navigazione Satellitare

$$VC(\underline{dx}) = (H^T H)^{-1} H^T \cdot VC(\underline{d\rho}) \cdot H (H^T H)^{-1}$$

Espressione generale della matrice di varianza-covarianza di $\underline{d\rho}$

$$VC(\underline{d\rho}) = \begin{bmatrix} \sigma^2(d\rho_1) & \cdots & \sigma(d\rho_1, d\rho_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma(d\rho_1, d\rho_m) & \cdots & \sigma^2(d\rho_m) \end{bmatrix}$$

Si assuma che le componenti di $\underline{d\rho}$ siano indipendenti e di pari varianza σ^2_{PR}

$$VC(\underline{d\rho}) = I_m \cdot \sigma^2_{PR}$$

$$VC(\underline{dx}) = (H^T H)^{-1} H^T H (H^T H)^{-1} \cdot \sigma^2_{PR} = (H^T H)^{-1} \cdot \sigma^2_{PR}$$

Navigazione Satellitare

Matrice di varianza-covarianza di \underline{dx}

$$VC(\underline{dx}) = \begin{bmatrix} \sigma^2(x) & \sigma(x, y) & \sigma(x, z) & \sigma(x, b) \\ \sigma(x, y) & \sigma^2(y) & \sigma(y, z) & \sigma(y, b) \\ \sigma(x, z) & \sigma(y, z) & \sigma^2(z) & \sigma(z, b) \\ \sigma(x, b) & \sigma(y, b) & \sigma(z, b) & \sigma^2(b) \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} \cdot \sigma^2_{PR} = G \cdot \sigma^2_{PR}$$

$$\sigma^2(x) = G_{11} \cdot \sigma^2_{PR}$$

$$\sigma^2(y) = G_{22} \cdot \sigma^2_{PR}$$

$$\sigma^2(z) = G_{33} \cdot \sigma^2_{PR}$$

$$\sigma^2(b) = G_{44} \cdot \sigma^2_{PR}$$

- ✓ Il parametro DOP (Dilution Of Precision) è definito come rapporto tra l'incertezza in una componente dello stato (o in una combinazione di componenti) e l'incertezza nelle misure
- ✓ gli elementi diagonali di $VC(\underline{dx})$ (sotto radice quadrata) rappresentano l'incertezza nelle componenti dello stato
- ✓ σ_{PR} rappresenta l'incertezza nelle misure

Navigazione Satellitare

Il parametro GDOP (Geometric DOP) considera tutte le componenti dello stato

$$GDOP = \frac{\sqrt{\sigma^2(x) + \sigma^2(y) + \sigma^2(z) + \sigma^2(b)}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33} + G_{44}}$$

Il PDOP (Position DOP) considera solo le componenti posizionali (x, y, z)

$$PDOP = \frac{\sqrt{\sigma^2(x) + \sigma^2(y) + \sigma^2(z)}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{11} + G_{22} + G_{33}}$$

Il TDOP (Time DOP) considera solo la componente temporale (b)

$$TDOP = \frac{\sqrt{\sigma^2(b)}}{\sigma_{PR}} = \sqrt{G_{44}}$$

Il concetto è estendibile anche alle singole coordinate ($XDOP, YDOP, ZDOP$)

- ✓ Il DOP (tutti i tipi) dipende solo dalla geometria di osservazione
- ✓ Quantifica quanto l'incertezza sulle misure viene amplificata nella soluzione a causa della geometria

Navigazione Satellitare

I parametri DOP possono essere adoperati per stimare gli errori nella soluzione

$$\sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + \sigma^2(Z) + \sigma^2(b_u)} = GDOP \cdot \sigma_{PR}$$

Il valore di σ_{PR} può essere ottenuto considerando il budget d'errore nella condizione operativa

Fonte	Errore (m)
Errore Orbitale	0.8
Errore Clock SV (residuo)	1.1
Errore Ionosferico (residuo)	0.1
Errore Troposferico (residuo)	0.2
Errore Multipath	0.5
Errore interno al Ricevitore	0.1
	1.5