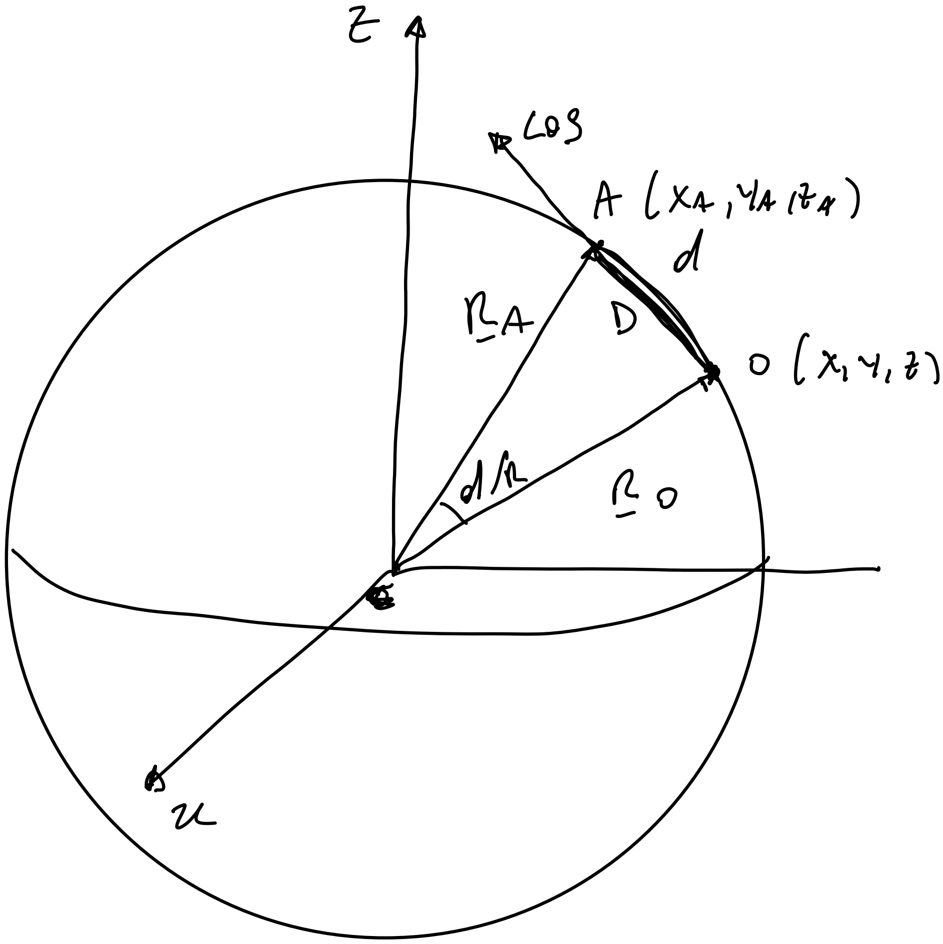
LoP associato ad una misura di Distanza nello spazio (Luogo Spaziale)

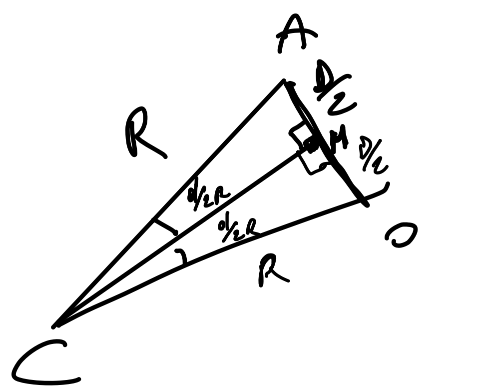
Si consideri il caso in cui un ricevitore (osservatore) O effettui una misura della sua distanza geometrica D da un punto A di coordinate cartesiane note, e cioè:



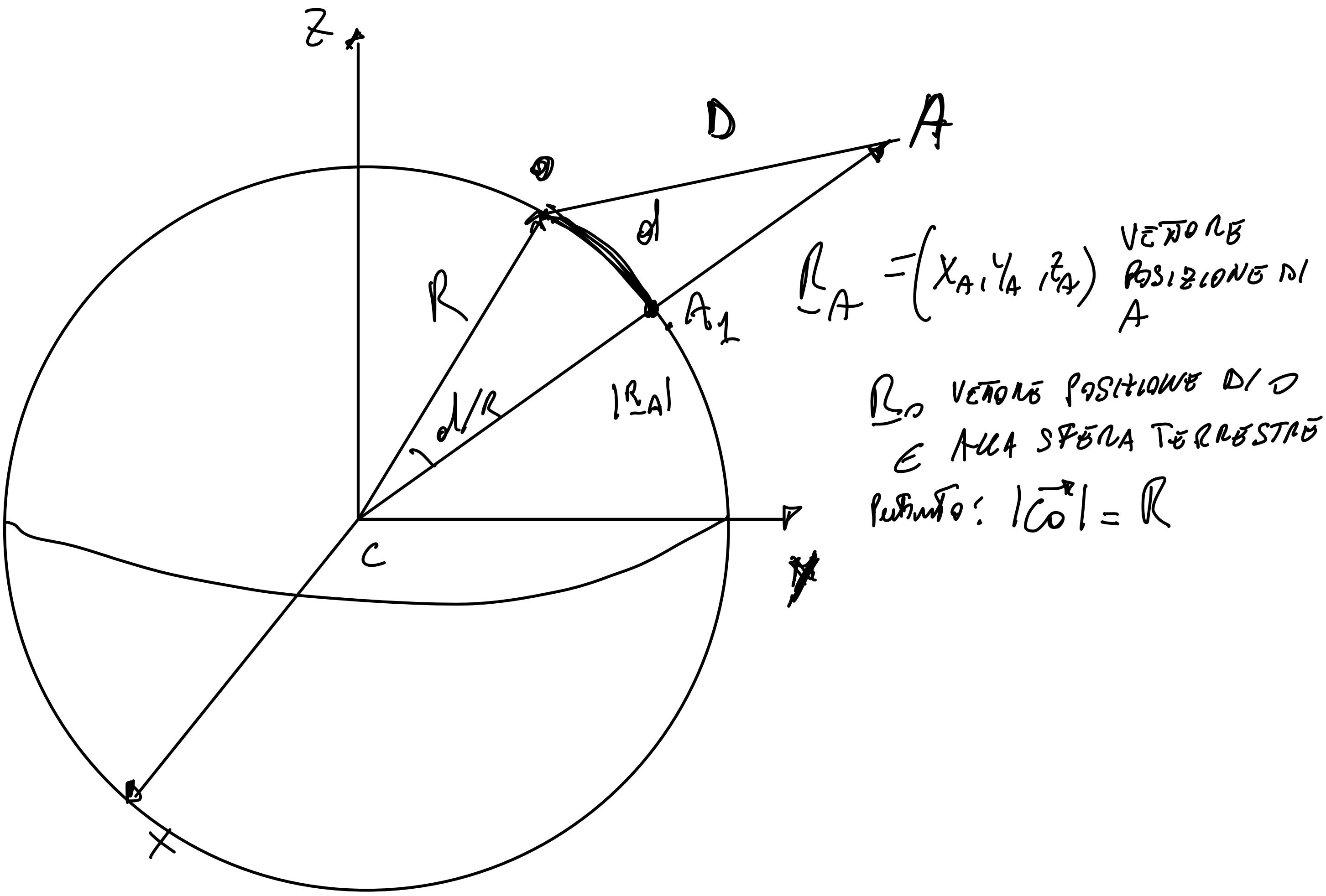
$$\overset{\frown}{AO} = d$$
$$A\hat{C}O = d/R$$
$$R = |R_A| = |R_O|$$
$$\overline{AO} = D$$

Tale distanza geometrica è il segmento della Linea di Vista (LoS - Line of Sight) aventi come estremi la posizione del ricevitore O e del punto rilevato A.
La distanza Geometrica D può essere oggetto di una misura diretta oppure ottenuta indirettamente a partire dalla distanza ortometrica d tra i due punti (arco di circonferenza massima tra i due punti). Infatti dal triangolo isoscele $C\hat{A}O$ conducendo la perpendicolare alla base AO si ha:

$$\overline{AM} = \overline{CA} \sin A\hat{C}M$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{D}{2} = R \sin\left(\frac{d}{2R}\right) \Rightarrow \boxed{D = 2R \sin\left(\frac{d}{2R}\right)}$$



Si consideri ora il caso in cui il punto rilevato A non appartiene alla superficie terrestre ma all'emisfero visibile del ricevitore O e supponiamo di conoscere le sue coordinate in un sistema di riferimento ECEF.



Dal Teorema di Carnot applicato al triangolo $C\hat{O}A$ si ha:

$$D^2 = R^2 + \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2\right) - 2R\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}\,\cos\left(\frac{d}{R}\right)$$

Equazione che, analogamente al caso precedente, permette il passaggio dalla misura diretta di distanza ortodromica tra O e A1, il punto subastrale di A, e quella geometrica D. Dopo semplici passaggi è possibile ricavare la formula che esprime il passaggio inverso, cioè:

$$d = R \cdot \cos^{-1}\left[\frac{R^2 + \left(x_A^2 + y_A^2 + z_A^2\right) - D^2}{2R\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}}\right]$$

a) Equazione della Sfera di Distanza

Determiniamo ora l'equazione di tale LoP in coordinate cartesiane e cioè: $L = g(x, y, z)$

A tal fine consideriamo che nel sistema di riferimento cartesiano ECEF la distanza D rappresenta il modulo del vettore differenza tra la posizione di O e la posizione di A e quindi:

$$D = \overline{AO} = |\underline{R}_A - \underline{R}_O| = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2}$$

$$(1) \quad \boxed{D = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2}}$$

EQUAZIONE DEL LoP SPAZIALE ASSOCIATO a D

Per capire quale superficie rappresenta la (1) eleviamo ambo i membri al quadrato ottenendo:

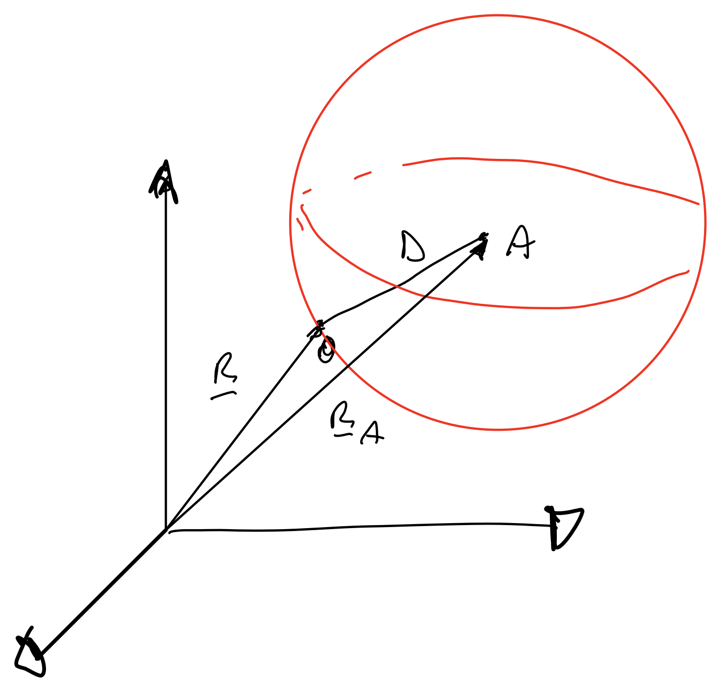
$$D^2 = (x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + (z_A - z)^2$$

Equazione di una Sfera di centro A e raggio D. Pertanto tale LoP si definisce <u>Sfera di Distanza</u> *(Superficie rossa in figura seguente)*

Si noti che anche in un sistema di riferimento ENU a tale misura di distanza si associa una equazione formalmente identica alla (1) ma come coordinate cartesiane si considerano le rispettive di O ed A in ENU e quindi:

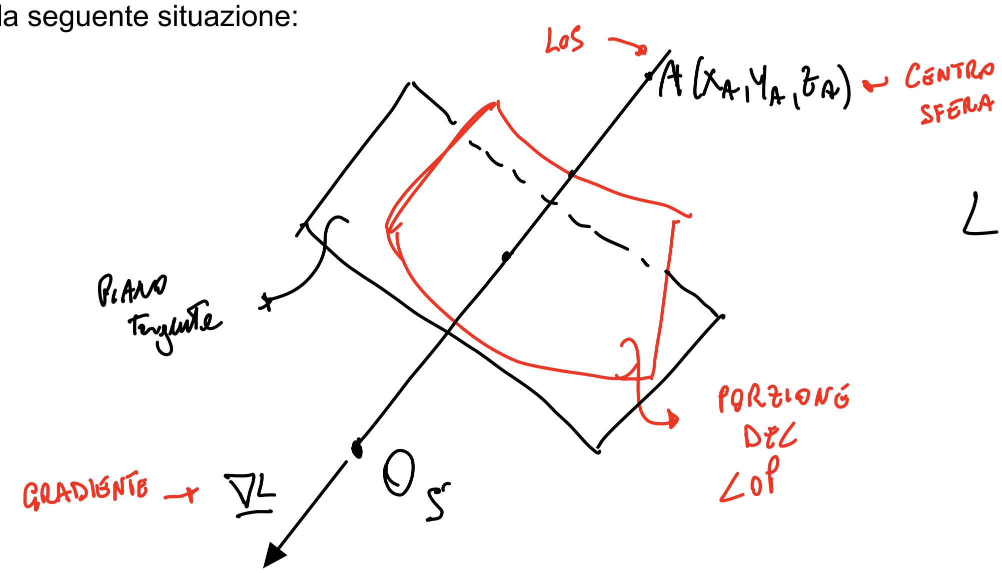
$$D = \sqrt{(E_A - E)^2 + (N_A - N)^2 + (U_A - U)^2}$$

Si noti inoltre che indipendentemente dal sistema di riferimento considerato la distanza geometrica tra A ed O <u>è sempre la stessa</u> (per tale motivo il primo membro delle ultime due relazione è sempre D)



b) Linearizzazione della Sfera di Distanza

Sia $O_S(x_S, y_S, z_S)$ la posizione stimata del nostro ricevitore (ottenuta da un sistema di navigazione diverso da quello utilizzato per misurare D ad esempio un sistema Dead Reckoning), linearizzare la sfera di distanza significa sostituire a tale superficie il <u>piano</u> tangente alla sfera nel punto più vicino ad Os (Punto Determinativo) e cioè graficamente si ha la seguente situazione:



$$L = g(x, y, z)$$

Si ricordi la formula di linearizzazione di un LoP in coordinate cartesiane e cioè:

$$(*) \quad \ell = h_1\, dx + h_2\, dy + h_3\, dz$$

Dove:

- $\ell = L - L_S$
- $h_1 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_S ; \quad h_2 = \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_S ; \quad h_3 = \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)_S .$

Nel caso della Sfera di Distanza si ha:

$$\ell = \underbrace{D}_{\text{MISURA}} - \underbrace{D_S}_{\text{MISURA PREDETTA (O RICOSTRUITA)}} = D - g(x_S, y_S, z_S)$$

Mentre i coefficienti della linearizzazione (componenti del vettore gradiente) hanno espressione formale identica (cambia soltanto il nome della variabile) che si ottiene dalla derivata parziale:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_S = h_i = \frac{\cancel{2}\,(x_{iA} - x_{iS})\,(-1)}{\cancel{2}\sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2 + (z_A - z_S)^2}} = -\frac{\Delta x_i}{D_S}$$

con $i = 1 - 3$

DOVE $x_1 = x$, $x_2 = y$ ed $x_3 = z$

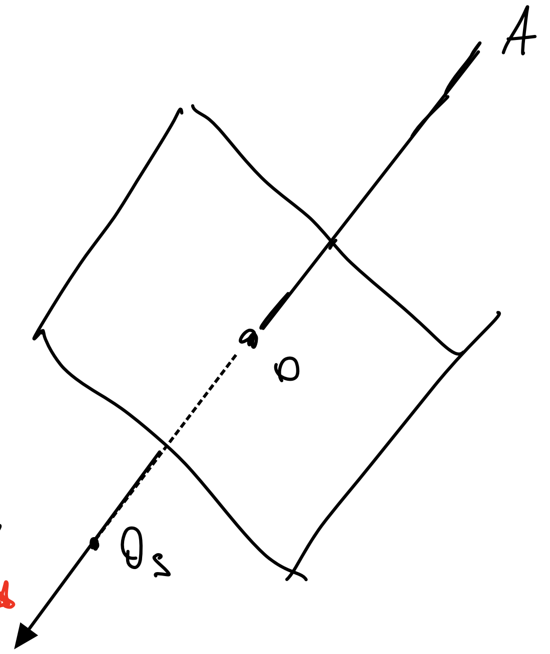
Per esteso:

$$h_1 = -\frac{\Delta x_S}{D_S}$$

$$h_2 = -\frac{\Delta y_S}{D_S}$$

$$h_3 = -\frac{\Delta z_S}{D_S}$$

$$\underline{h}(h_1, h_2, h_3) \equiv \nabla \underline{L}$$



N.B. h_i È IL COSENO DIRETTORE DELLA LINEA DI VISTA $\overrightarrow{O_S A}$

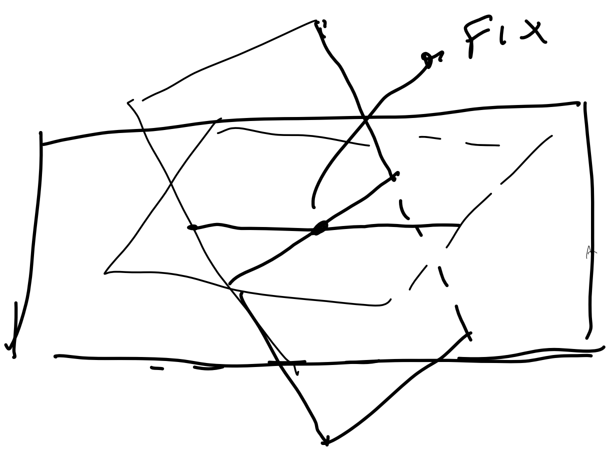
$$\underline{h} \equiv \nabla \underline{L}$$

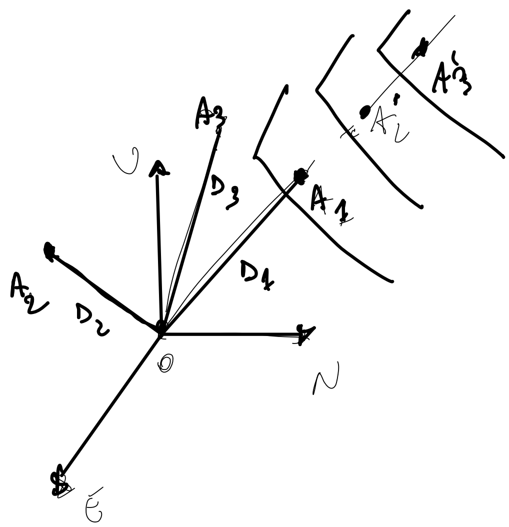
Sostituendo nell'equazione (*) si ha:

$$(2) \quad D - D_S = -\frac{\Delta x_S}{D_S}dx - \frac{\Delta y_S}{D_S}dy - \frac{\Delta z_S}{D_S}dz$$

Equazione di un piano detto <u>piano di posizione</u>.

La determinazione del Fix di navigazione sarà pertanto ottenuta dall'Intersezione geometrica di almeno 3 piani nello spazio, quindi bisogna misurare almeno la distanza da 3 punti dello spazio di coordinate note (non allineati).





I punti A_1, A_2' ed A_3' sono allineati e daranno luogo a piani paralleli (si dimostra facilmente analiticamente) che pertanto non si intersecano

Nel caso di misura D affetta da errore allora dovremo considerare un numero maggiori di equazioni (piani) del tipo (2) e risolvere tale sistema sovradeterminato con un metodo di stima (già introdotto nelle dispense sulla circonferenza di distanza) per ottenere una stima delle correzioni (aggiornamento se il punto stimato è coincidente con la posizione che il ricevitore aveva all'epoca predente a quella relativa alla misura D) da apportare alle coordinate stimate per avere il FIX e quindi:

$$FIX\,(x_F, y_F, z_F) \Rightarrow \begin{cases} x_F = x_S + \hat{d}x \\ y_F = y_S + \hat{d}y \\ z_F = z_S + \hat{d}z \end{cases}$$

$\hat{d}x\ (\hat{d}x, \hat{d}y, \hat{d}z)$ è il risultato del metodo di stima scelto.

c) Incertezza della sfera di distanza

Per determinare l'incertezza di tale LoP consideriamo l'equazione generica dell'incertezza di un LoP e sostituiamo i significati dei termini che compaiono, e cioé:

$$(**)\quad \delta s = \pm |\nabla \underline{L}|^{-1}\, \delta L \qquad \boxed{\text{INCERTEZZA DI UN LOP}}$$

DOVE

- $\nabla \underline{L}\ \left(\frac{\delta g}{\delta x}, \frac{\delta g}{\delta y}, \frac{\delta g}{\delta z}\right)$ è il gradiente della funzione $g(x, y, z)$
- δL È l'errore sulla misura

Per questo specifico LoP si ha:

$\delta L = \delta D$ ed,

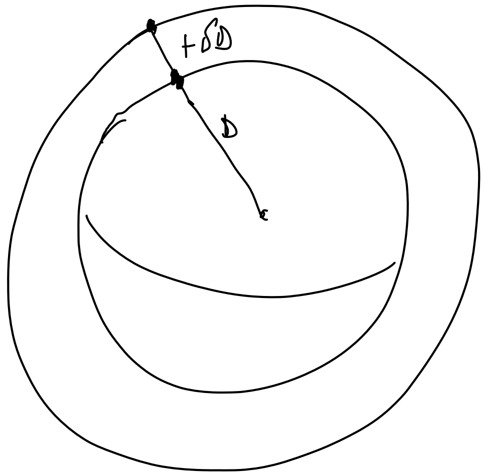
$$\nabla \underline{L}\ \left(-\frac{\Delta x}{D}, -\frac{\Delta y}{D}, -\frac{\Delta z}{D}\right) \Rightarrow |\nabla \underline{L}| = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{D^2} + \frac{\Delta y^2}{D^2} + \frac{\Delta z^2}{D^2}} = \sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{D^2}} = \sqrt{\frac{\cancel{D^2}}{\cancel{D^2}}} = 1$$

Sostituendo nella $(**)$ si ha:

$$\boxed{\delta s = \pm 1 \cdot \delta D}$$

L'errore sulla misura si proietta nel dominio della posizione senza nessuna amplificazione, stesso risultato lo potevamo ottenere anche da considerazioni geometriche disegnando le due sfere di distanza associate alle misure

D e $D + \delta D$.



La distanza tra le sfere, pari proprio a δD, rappresenta l'errore di tutti i possibili Fix di ricevitori che operano la medesima misura $D + \delta D$