Per l’equazione della circonferenza di distanza e tutte le considerazioni fatte sulle tipologie di circonferenza si vedano i paragrafi 2.1, 2.2 e 2.3 del testo: “Determinazione della posizione in Navigazione” di A. Russo

Si consideri l'equazione della circonferenza di distanza, il luogo geometrico (LoP) dei punti equidistanti da un punto di coordinate note $A(\varphi_A, \lambda_A)$ della superficie terrestre, e cioé:

$$L = f(\varphi, \lambda) \iff d = \cos^{-1}\left[\sin\varphi \sin\varphi_A + \cos\varphi \cos\varphi_A \cos\Delta\lambda\right] \quad (1)$$

Per linearizzare tale LoP abbiamo bisogno di considerare una posizione stimata del ricevitore $O_S(\varphi_S, \lambda_S)$ e di calcolare la misura predetta o ricostruita $L_S = f(\varphi_S, \lambda_S) \Rightarrow d_S = \cos^{-1}\left[\sin\varphi_S \sin\varphi_A + \cos\varphi_S \cos\varphi_A \cos\Delta\lambda_S\right]$

Ricordiamo l'equazione generica della linearizzazione di un LoP (retta di posizione), e cioè:

$$r) \quad \boxed{l = h_1 \, d\lambda + h_2 \, d\varphi} \quad (2)$$

Dove:

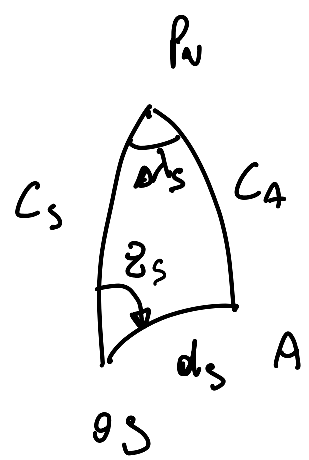
$$l = L - L_S \quad ; \quad h_1 = \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right)_S \quad ; \quad h_2 = \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)_S$$

Per la linearizzazione della circonferenza di distanza, definita retta di distanza, dobbiamo quindi calcolare i coefficienti dell'equazione (2), calcolando le derivate parziali della (1) e il termine noto $l = d - d_S$

Calcoliamo h_1

$$h_1 = \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right)_S = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 d_S}} \cdot \left[0 + \cos\varphi_S \cos\varphi_A (-)\sin(\lambda_A - \lambda_S)(-1)\right] = -\frac{1}{\sin d_S} \cdot \cos\varphi_S \cos\varphi_A \sin\Delta\lambda_S$$

Applichiamo il Teorema dei seni al triangolo sferico di figura, aventi come lati l'arco di meridiano passante per Os, l'arco di meridiano passante per A e l'arco di circonferenza massima $\overset{\frown}{O_S A}$, ottenendo:



$$\frac{\sin d_S}{\sin \Delta\lambda_S} = \frac{\sin C_A}{\sin z_S} \Rightarrow \sin d_S \sin z_S = \cos\varphi_A \sin\Delta\lambda_S$$

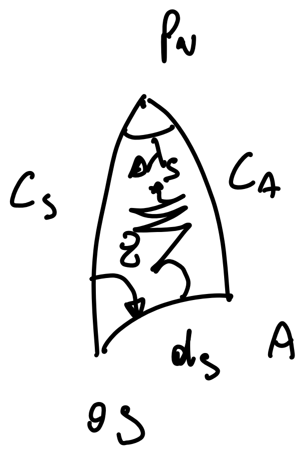
Sostituendo in h_1 :

$$h_1 = -\frac{1}{\sin d_S} \cdot \cos\varphi_S \cancel{\sin d_S} \sin z_S \Rightarrow \boxed{h_1 = -\cos\varphi_S \sin z_S}$$

Analogamente per il calcolo di h_2 , dalla derivata parziale rispetto alla latitudine si ha:

$$h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_S = -\frac{1}{\sin d_S} \cdot \left[\sin\varphi_A \cos\varphi_S - \sin\varphi_S \cos\varphi_A \cos(\Delta\lambda_S)\right]$$

Applichiamo il Teorama delle Proiezioni allo stesso triangolo sferico introdotto in precedenza.



Teo. Proiezioni

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{se co} = \text{co se} - \text{se co co}}$$

Da tale teorema si ha:

$$\sin d_S \cdot \cos z_S = \cos C_A \sin C_S - \sin C_A \cos C_S \cos \Delta\lambda_S$$

$$\sin d_S \cos z_S = \sin\varphi_A \cos\varphi_S - \cos\varphi_A \sin\varphi_S \cos \Delta\lambda_S$$

Sostituendo l'ultima relazione in h_2 si ha:

$$h_2 = -\frac{1}{\cancel{\sin d_S}} \cdot \cancel{\sin d_S} \cos z_S \Rightarrow \boxed{h_2 = -\cos z_S}$$

Sostituendo i coefficienti determinati ed il termine noto nella relazione (2) si ottiene l'equazione della retta di distanza e cioè:

$$n)\quad d - d_S = -\sin z_S \overbrace{d\lambda \cos\varphi_S}^{d\mu} - \cos z_S \, d\varphi$$

$$\boxed{d - d_S = -\sin z_S \, d\mu - \cos z_S \, d\varphi} \qquad [3]$$

Quindi per tracciarla nel piano nautico le cui relazioni di corrispondenza sono

$$\begin{cases} x = d\mu \\ y = d\varphi \end{cases} \Rightarrow (3) \Rightarrow \qquad \sin Z_s\, x + \cos Z_s\, y + \Delta d = 0$$

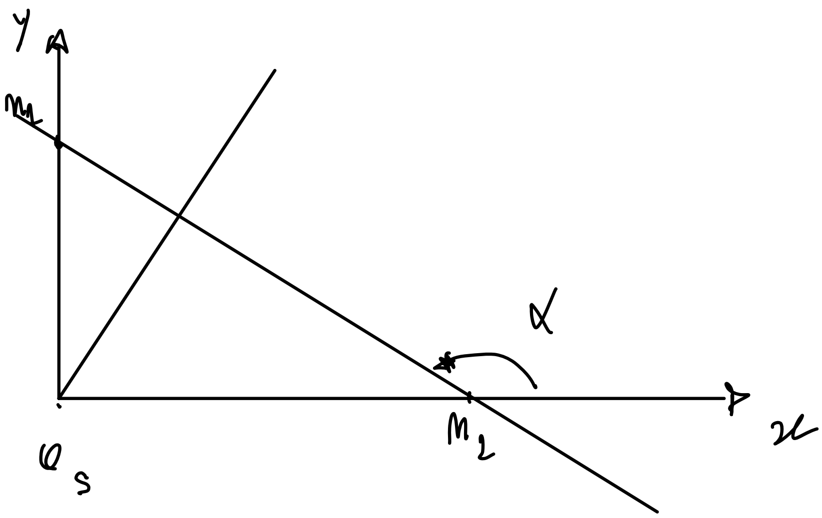
La (3) rappresenta pertanto l’equazione della rette di coefficiente angolare

$$tg\,\alpha = -\frac{a}{b} = -\,tg\,Z_s$$

E di intercette sugli assi coordinati dati da:

$$m_1 = \frac{\Delta d'}{\cos Z_s}\;; \qquad m_2 = \frac{\Delta d'}{\sin Z_s} \qquad \text{con} \qquad \Delta d' = d_s - d$$

Quindi per il tracciamento si può procedere con l’unire le intercette con gli assi coordinati



Una procedura semplificata per il tracciamento della retta d’altezza verrà introdotta dopo aver trattato l’incertezza della circonferenza di distanza

INCERTEZZA DELLA CIRCONFERENZA DI DISTANZA

Si ricorda di seguita la formula generica dell'incertezza di un luogo di posizione e cioè:

$$\delta s = \pm \left| \nabla L \right|^{-1/2} \delta L = \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{-1/2} \delta L$$

Dove nel caso specifico della circonferenza di distanza:

$$\delta L = \delta d$$

E ricordando che nella linearizzazione di tale LoP abbiamo già calcolato le derivate parziali che compaiono della relazione precedente, infatti;

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = h_2 \quad e \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_s} = \frac{h_1}{\cos \varphi_s}$$

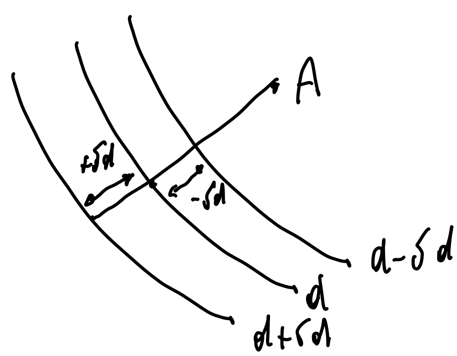
Dove:

$$h_2 = -\cos z_s \quad ed \quad h_1 = -\sin z_s \cos \varphi_s$$

Quindi sostituendo nell'equazione dell'incertezza:

$$\delta s = [\underbrace{\sin^2 z_s + \cos^2 z_s}_{=1}]^{-1/2} \delta d \Rightarrow \boxed{\delta s = \pm \delta d}$$

E cioè <u>l'errore sulla misura rappresenta anche l'errore sulla posizione</u>, cosa che si poteva anche intuire geometricamente



Alla luce dell'osservazione precedente il tracciamento della retta di distanza può essere effettuato in modo molto semplificato su una qualsiasi carta.
Infatti si può procedere come segue:

a) a partire dalla posizione del punto stimanto Os si traccia la direzione del gradiente, tale direzione forma con l'asse delle ascisse (l' angolo β) ottenuto algebricamente come:

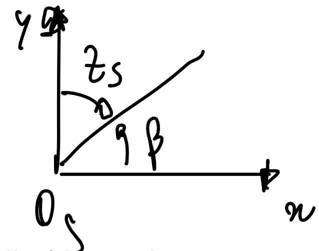
$$\begin{cases} |\nabla\xi|\cdot\hat{n} = \left(\dfrac{\delta f}{\delta\lambda\cos\varphi_s}\right) = |\nabla\xi|\cos\beta \\ |\nabla\xi|\cdot\hat{j} = \left(\dfrac{\delta f}{\delta\varphi}\right) = |\nabla\xi|\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \beta = tg^{-1}\left[\left(\frac{\delta f}{\delta\varphi}\right)\left(\frac{\delta f}{\delta\lambda\cos\varphi}\right)^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow \beta = tg^{-1}\left[h_2\cdot\left(\frac{h_1}{\cos\varphi_s}\right)^{-1}\right] = tg^{-1}\left[\frac{+\cos Z_z}{+\sin Z_z}\right] = tg^{-1}\left[cotg\, Z_s\right]$$

$$= tg^{-1}\left[tg\,(90^\circ - Z_s)\right] \Rightarrow \boxed{\beta = 90^\circ - Z_s}$$

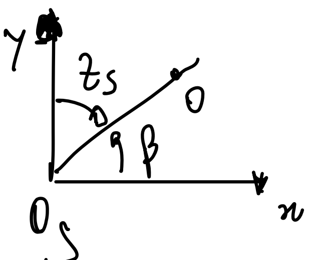
Quindi tracciamo una retta inclinata dell'azimut stimato del centro della circonferenza rispetto all'asse delle ordinate:

a)



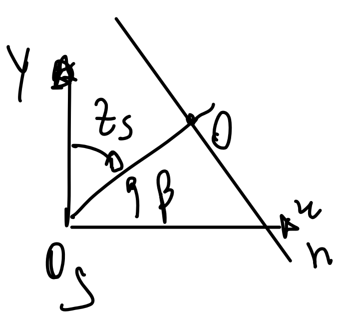
b) su tale direzione si stacca un segmento pari proprio alla differenza tra distanza misura e distanza stimata, in quanto per questo LoP la distanza tra punto determinativo e punto stimato è pari proprio alle differenze di stime di distanza che si fanno in questi due punti (importante considerazione già fatta nello studio dell'incertezza della circonferenza di distanza.

b)



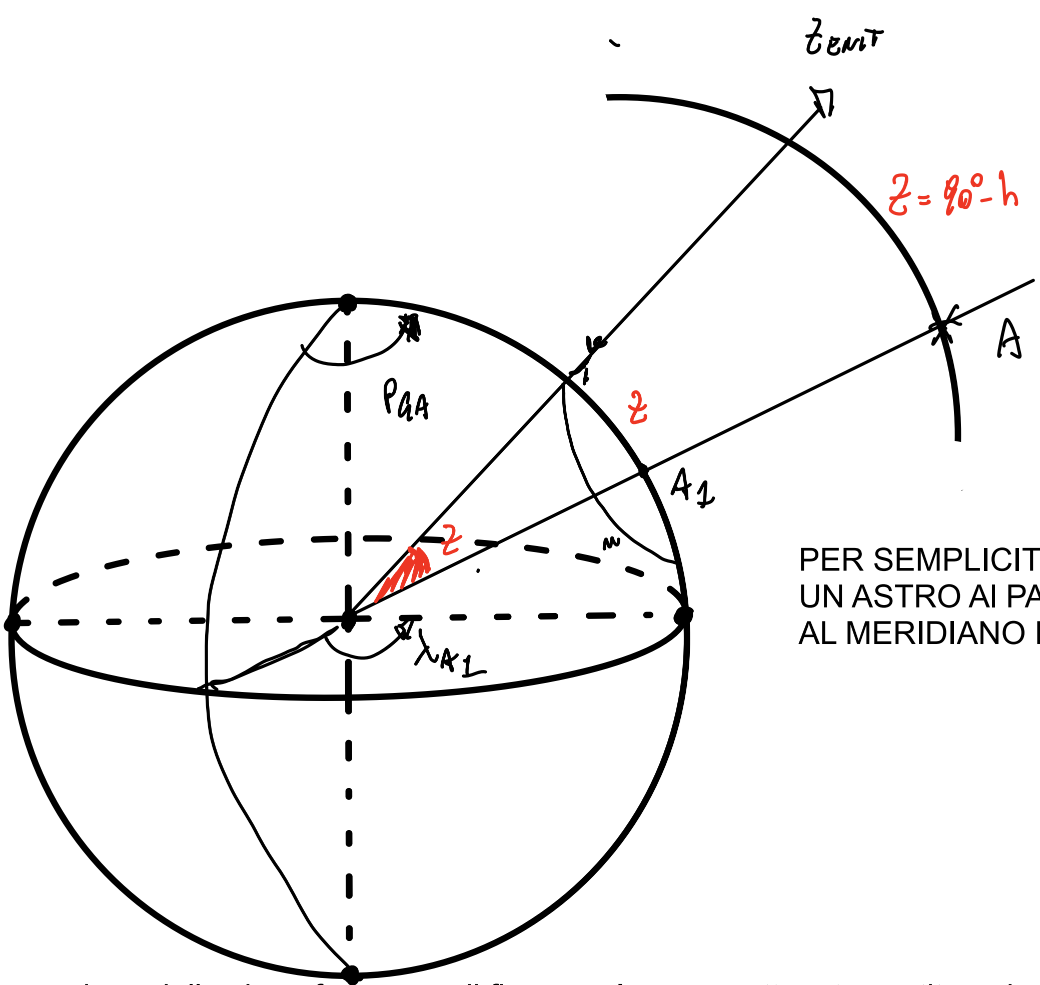
$\overline{OO_s} = \Delta d$

c) in O si traccia la perpendicolare alla direzione del gradiente ottenendo la retta di distanza



<u>CIRCONFERENZA DI ALTEZZA</u>

Nel caso in cui misuriamo l'altezza h di un astro A, allora tale misura può essere ricondotta ad una misura di distanza sulla superficie terrestre (distanza ortodromica) tra l' osservatore ed il così detto <u>punto subastrale</u> A_1



PER SEMPLICITÀ CONSIDERIAMO
UN ASTRO AI PASSAGGIO
AL MERIDIANO DELL'OSSERVATORE

Quindi l'equazione della circonferenza u di figura può essere ottenuta sostituendo, nell'equazione di una circonferenza di distanza, a d la distanza zenitale z e cioè 90°- h e considerando le coordinate geografiche del punto subastrale per ottenere le quali si osserva:

1) che la latitudine di A1 altro non è che la declinazione dell'astro A (inclinazione dell'astro sull'equatore celeste

$$\varphi_{A_1} = \delta_A$$

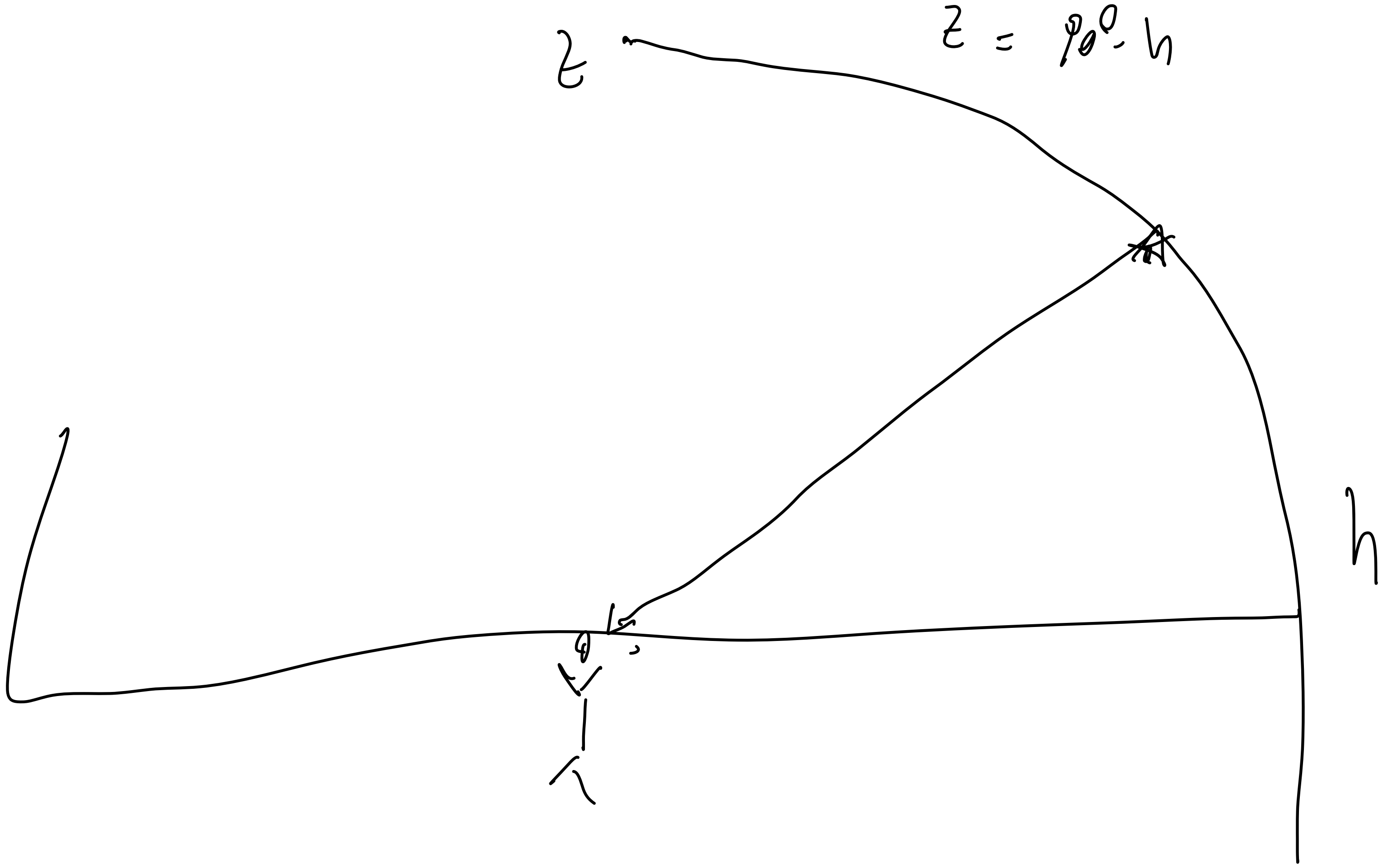
2) che la longitudine del punto A1 altro non è che l'angolo al Polo (rispetto a Greenwich) dell'astro A infatti considerando il meridiano passante per Greenwich.

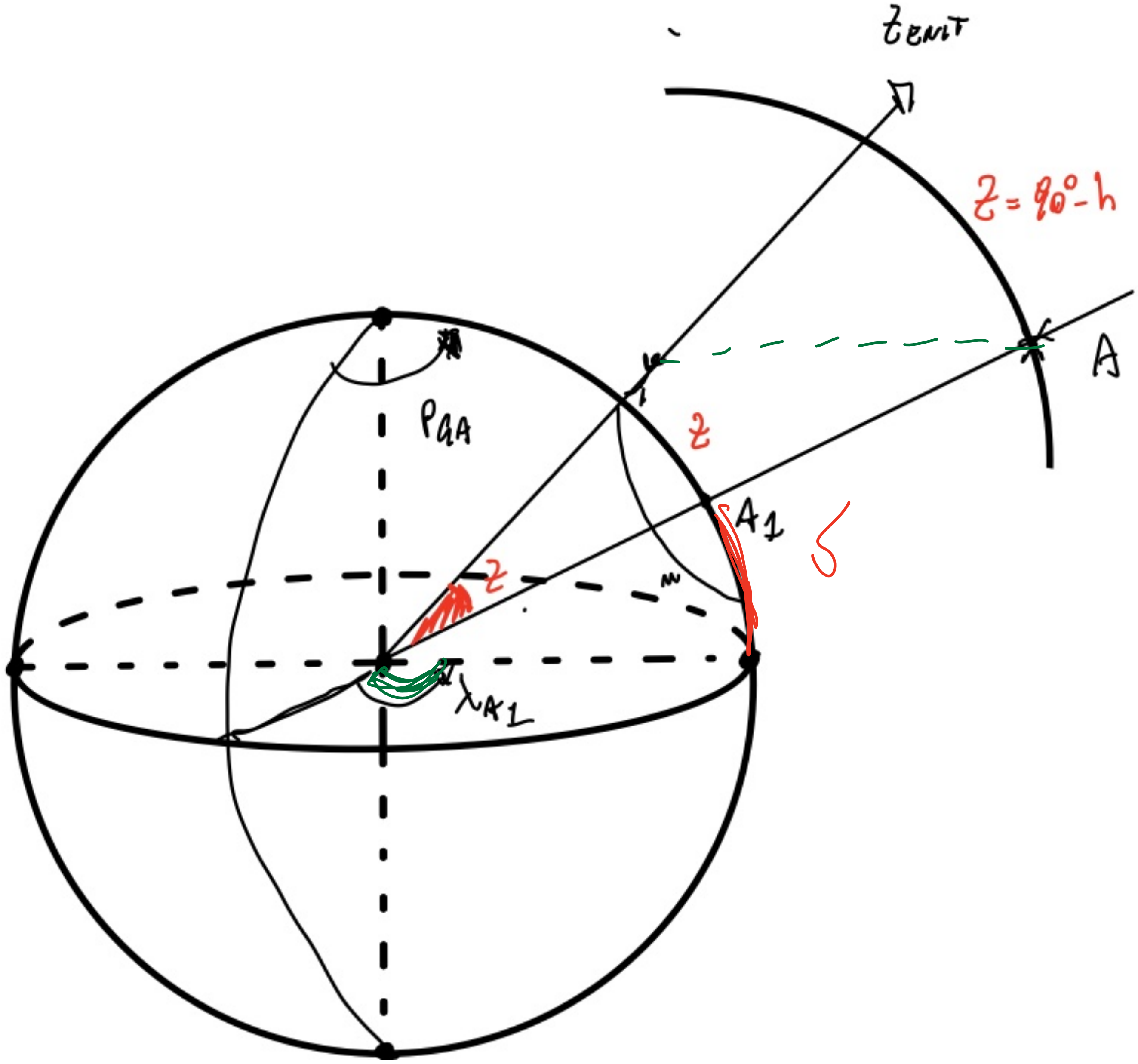
$$\lambda_{A_1} = \hat{P}_{GA}$$

Quindi l'equazione dati tale LoP diventa:

$$\cos d = \sin\varphi \sin\varphi_A + \cos\varphi \cos\varphi_A \cos\Delta\lambda \Rightarrow \boxed{h = \sin^{-1}\left[\sin\varphi \sin\delta_A + \cos\varphi \cos\delta_A \cos(\lambda - \hat{P}_{GA})\right]}$$

FORMULA DEL SEN h


z
z = 90° - h
h



Zenit
$z = 90° - h$
A
P_{QA}
z
A_1
φ
z
λ_{A1}