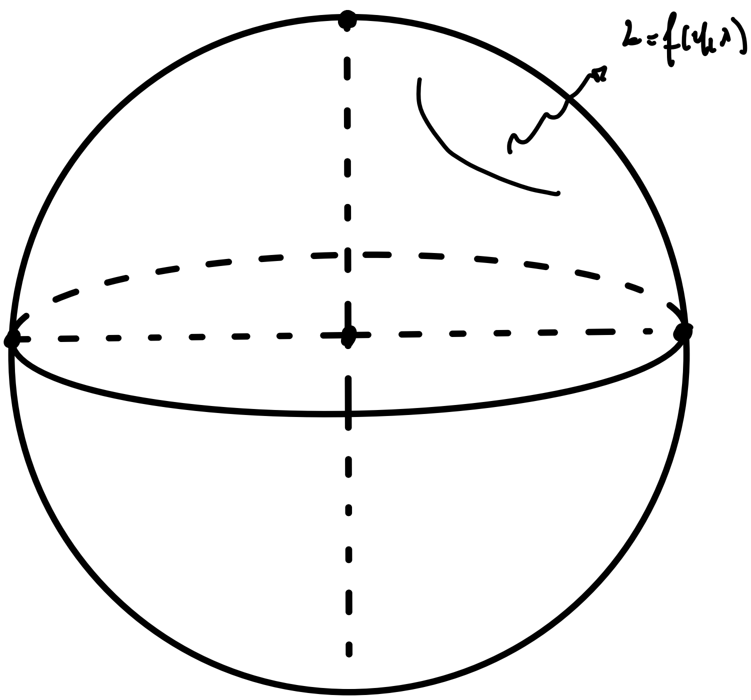
Sia L una misura $(d, \alpha, \Delta d, \Delta\alpha)$ priva di errore

l'insieme geometrico dei punti dal quale si effettua la stessa misura L è un luogo geometrico (LoP - Line of Position) descritto dall'equazione:

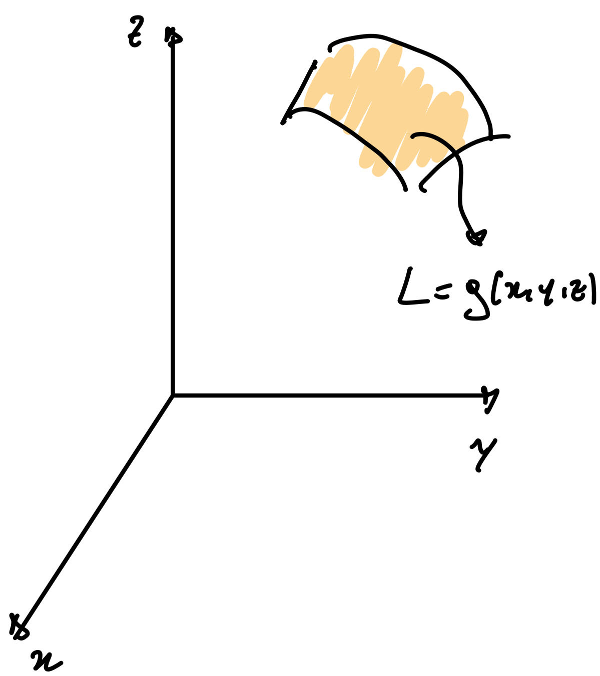
(1) $L = f(\varphi, \lambda)$ Equazione del LoP in coordinate geografiche

(2) $L = (x, y, z)$ Equazione del LoP in coordinate cartesiane (es.ECEF o ENU)

La rappresentazione della (1) è una curva sulla sfera terrestre mentre la rappresentazione della (2) è una superficie.



Caso (1)



Caso (2)

a) Linearizzazione di un LoP

Si consideri l'equazione di un LoP in coordinate geografiche $L = f(\varphi, \lambda)$ equazione di un funziona scalare f di variabile vettoriale (φ, λ) si consideri la sua rappresentazione sulla superficie terrestre u ed il piano π tangente a tale curva in un suo punto qualsiasi. Si consideri inoltre il meridiano passante per questo punto ed il suo parallelo. Nel piano π si consideri un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto O ed assi di riferimento coincidenti rispettivamente con l'arco di parallelo (detto appartamento) $dm = d\lambda \cos\varphi$ ed arco di meridiano $d\varphi$ (vedi figura 2)

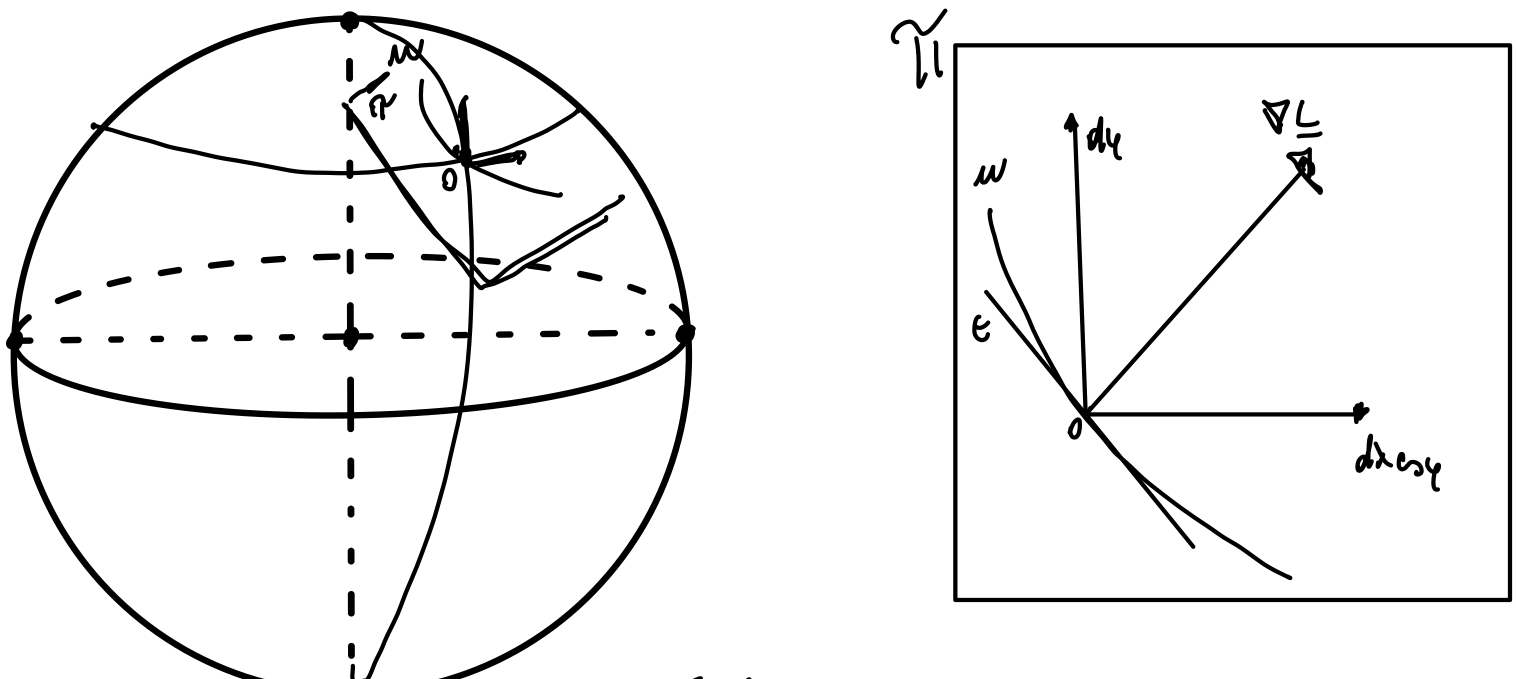
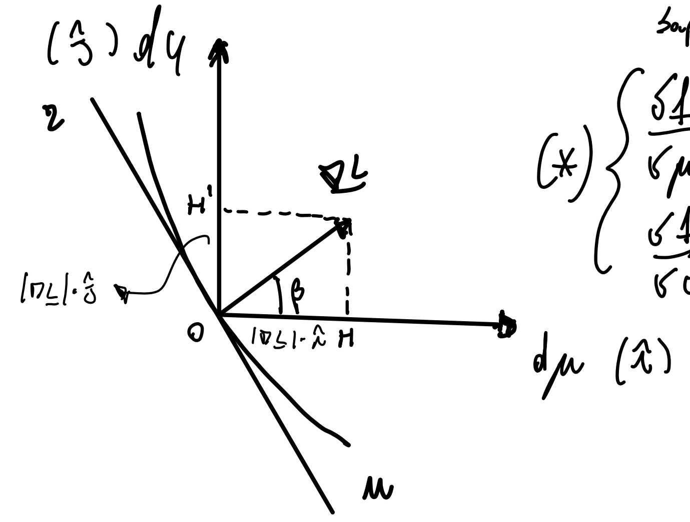


FIG. 2

si ricorda di seguito il concetto di <u>gradiente</u>.
Il gradiente della funzione (1), rappresentato nel sistema di riferimento cartesiano introdotto e che si indica con $\underline{\nabla L}$, è un vettore le cui componenti sono:

$$\underline{\nabla L} = \left(\frac{\delta f}{\delta x} , \frac{\delta f}{\delta y} \right)$$

Come ogni vettore ne analizziamo direzione verso e modulo.
<u>Direzione</u> = la normale al punto rispetto al quale si calcola il gradiente. Si ricorda che per tracciare la normale ad una curva si deve prima considerare la retta tangente - t - alla curva stessa. La direzione è nota se conosciamo i sue <u>coseni direttori</u> e cioè:



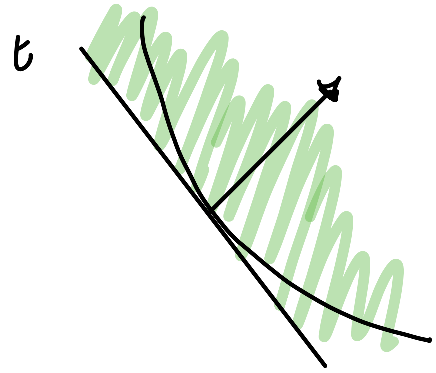
sapendo che:

cos. direttori

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\delta f}{\delta x} = \underline{\nabla L} \cdot \hat{i} = |\underline{\nabla L}| \cos\beta \\[2ex] \dfrac{\delta f}{\delta y} = \underline{\nabla L} \cdot \hat{j} = |\underline{\nabla L}| \sin\beta = |\underline{\nabla L}| \cos(90° - \beta) \end{cases}$$

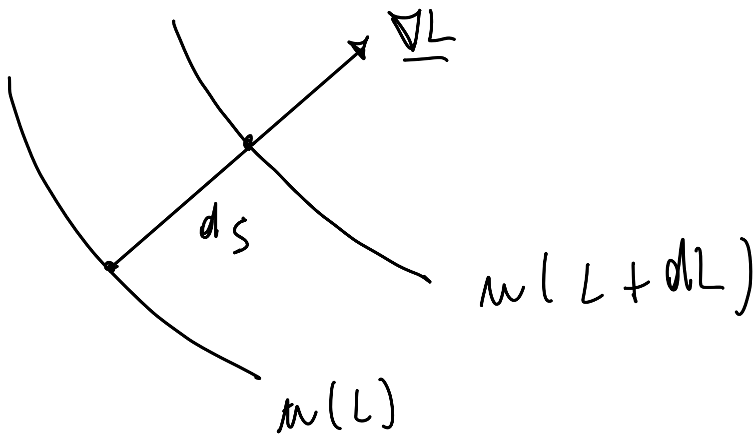
prodotto scalare

Verso = verso del semipiano (colorato in verde nella figura sottostante che ha come confine la retta tangente t) caratterizzato da valori maggiori di L (nel caso in cui L è una misura è il semipiano in cui abbiamo punti rispetto al quale la misura L aumenta)



Modulo = rappresenta il rapporto tra la variazione di misura L rispetto alla *distanza* tra i due luoghi di posizione rappresentazione delle due misure che differiscono di dL

$$|\nabla L| = \frac{dL}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right)^2}$$



a.1) Determinazione geometrica dell'equazione della linearizzazione di un LoP - retta di posizione

Linearizzare una curva u in un suo punto (φ, λ) significa determinare l'equazione della retta tangente alla curva nello stessa nel punto considerato detta retta di posizione.
In navigazione tale sostituizione è effettuata perchè è più semplice tracciare una retta su una carta di navigazione (invece che una curva) e quindi per ottenere il Fix di navigazione come intersezioni di rette di posizioni e non di LoP.

Per capire in quale punto della curva u si deve considerare la retta tangente allora è necessario delle coordinate stimante del ricevitore (o osservatore che compie la misura L) e cioè:

$$O_s = (\varphi_s , \lambda_s)$$

Si consideri il sistema di coordinate sopra introdotto centrato in Os,

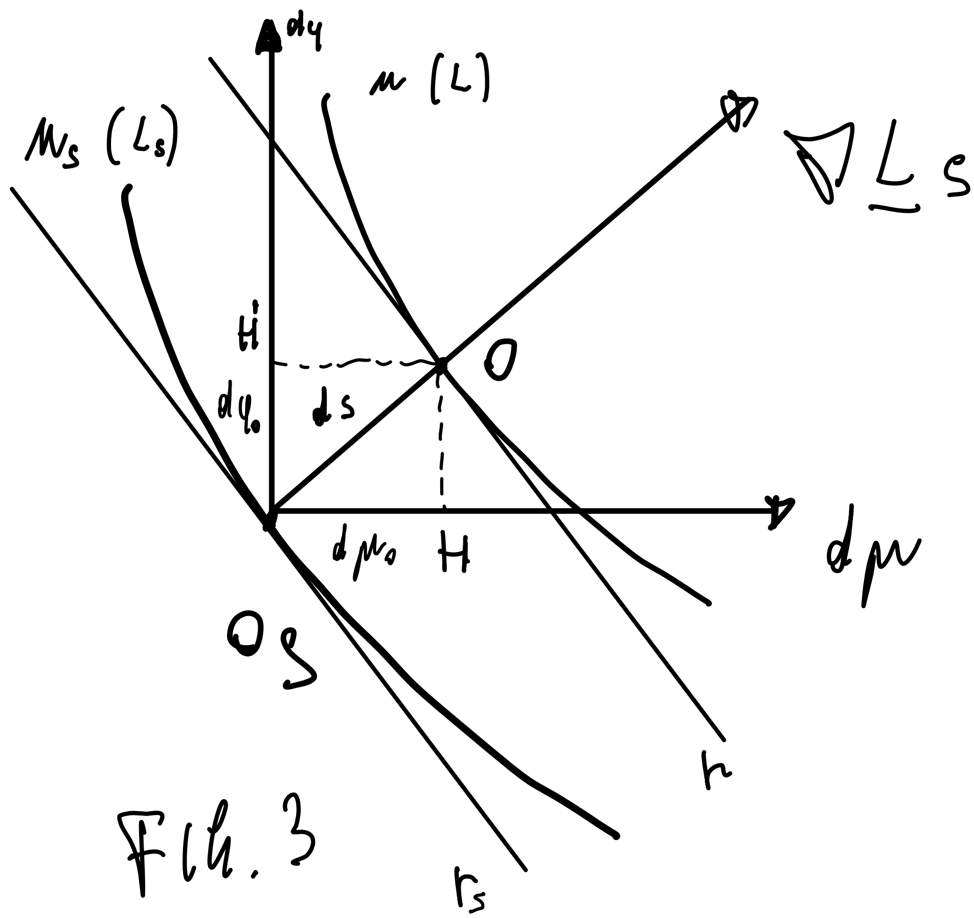


Fig. 3

La retta r che linearizza la curva u sarà quella tangente alla curva u stessa nel punto <u>più vicino</u> al punto Os (detto punto determinativo O).
Per individuare tale punto O si:

1. costruisce la curva u_s relativa alla misura ricostruita (o predetta) $L_s = f(q_s, \lambda_s)$
2. Si linearizza tale curva ottenendo r_s
3. Si consideri il gradiente a tale curva (che ne rappresenta la normale) e si consideri l'intersezione di tale gradiente con u.

Quindi per scrivere l'equazione di r basta considerare l'equazione di una retta che passi per il punto O e che abbia stesso coefficiente angolare di r_s e cioè:

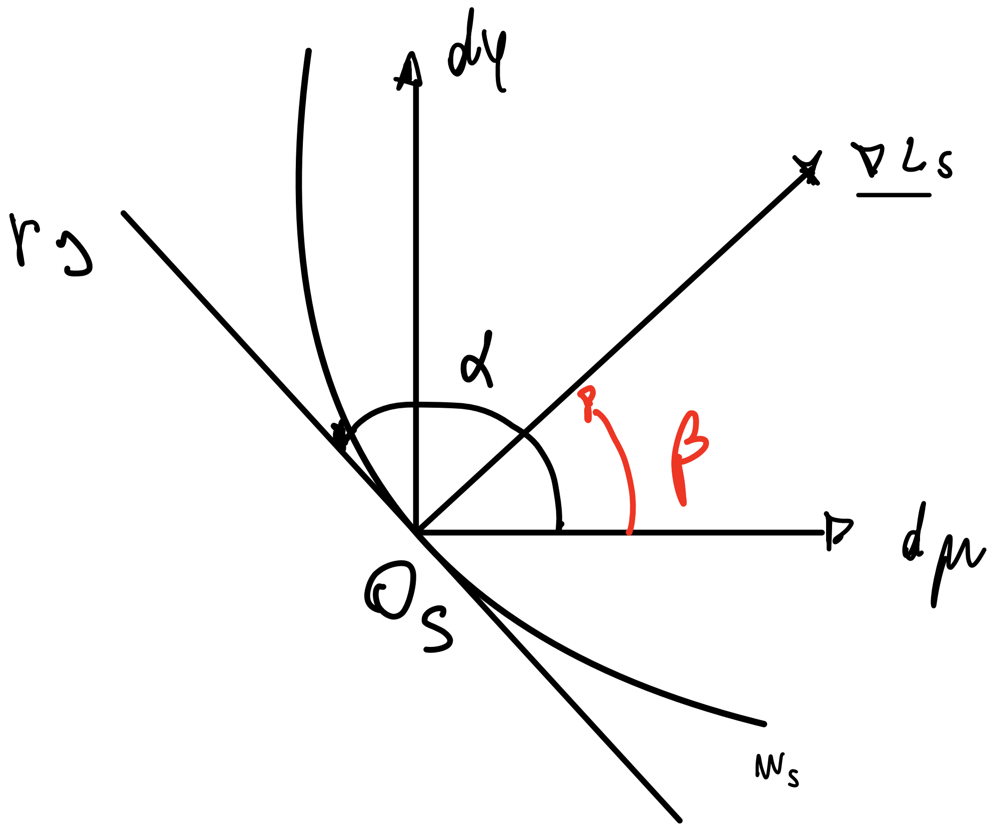
$$dy - dy_0 = m_r (d\mu - d\mu_0) \qquad (3)$$

Dove:

$O(d\mu_0, dy_0)$ ed $m_r = m_{r_s}$

Calcoliamo prima il coefficiente angolare di r_s e cioè m_{r_s}.

A tal fine si consideri la figura seguente da cui si evince la relazione tra la direzione del gradiente $\underline{\nabla L_s}$ e l'inclinazione della retta r_s



e cioè:

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$$

da cui:

$$\boxed{tg\,\alpha = tg\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\,cotg\,\beta}$$

Pertanto:

$$m_{r_s} = m_r = -\cot g\,\beta \qquad (4)$$

Calcoliamo adesso le coordinate del Punto Determinativo O.
Dal triangolo $O\hat{H}O_s$ (vedi FIG.3) si ha:

$$(5)\begin{cases} d\mu_O = \overline{OO_s}\cos\beta = ds\cos\beta \\ d\varphi_O = \overline{OO_s}\sin\beta = ds\sin\beta \end{cases}$$

con

ds distanza tra μ ed μ_s

Sostituendo la (4) e la (5) nella (3) si ha

$$r: \quad d\varphi - ds\sin\beta = -\cot g\,\beta\,(d\mu - ds\cos\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$d\varphi - ds\sin\beta = -\cot g\,\beta\, d\mu + \cot g\,\beta\cos\beta\, ds$$

$$\Downarrow$$

$$d\varphi + \cot g\,\beta\, d\mu = ds\left(\sin\beta + \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta}\right) = ds\,\frac{\overbrace{(\sin^2\beta + \cos^2\beta)}^{1}}{\sin\beta}$$

DA CUI:

$$d\varphi \sin\beta + \cot\beta \sin\beta \, d\mu = ds$$

$$ds = d\varphi \sin\beta + d\mu \cos\beta$$

Ricordiamo adesso il significato del modulo del gradiente in Os, e cioè:

$$|\underline{\nabla L}_s| = \frac{dL}{ds} \longrightarrow ds = \frac{dL}{|\nabla L_s|}$$

Se ds rappresenta la distanza tra M ed M_s allora $dL = L - L_s$

Quindi:

$$ds = \frac{L - L_s}{|\underline{\nabla L}_s|} = d\varphi \sin\beta + d\mu \cos\beta \,;$$

$$L - L_s = d\varphi \, \underset{(*)}{|\underline{\nabla L}_s|} \sin\beta + d\mu \, \underset{(*)}{|\underline{\nabla L}_s|} \cos\beta = d\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s + d\mu \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_s$$

Da cui:

$$L - L_s = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s d\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_s d\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_s d\varphi + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda \cos\varphi}\right)_s d\lambda \cos\varphi_s$$

Posto:
$$\begin{cases} l = L - L_s \\ h_1 = \left(\dfrac{\delta f}{\delta \lambda}\right)_s \\ h_2 = \left(\dfrac{\delta f}{\delta \varphi}\right)_s \end{cases} \Rightarrow \boxed{l = h_1 d\lambda + h_2 d\varphi} \quad (5)$$

Linearizzazione LoP -
Equazione retta di posizione

L'equazione (5) rappresenta pertanto la linearizzazione del nostro LoP in coordinate geografiche e cioè la così detta retta di posizione - r.

a.2 Caso di Coordinate Cartesiane

Se esprimiamo il nostro LoP in coordinate cartesiane, e cioè:

$$(2) \quad L = g(x, y, z)$$

Abbiamo che tale equazione esprime una superficie nello spazio.
Estrapolando la dimostrazione analitica fatta per la linearizzazione di una curva di posizione si avrà:

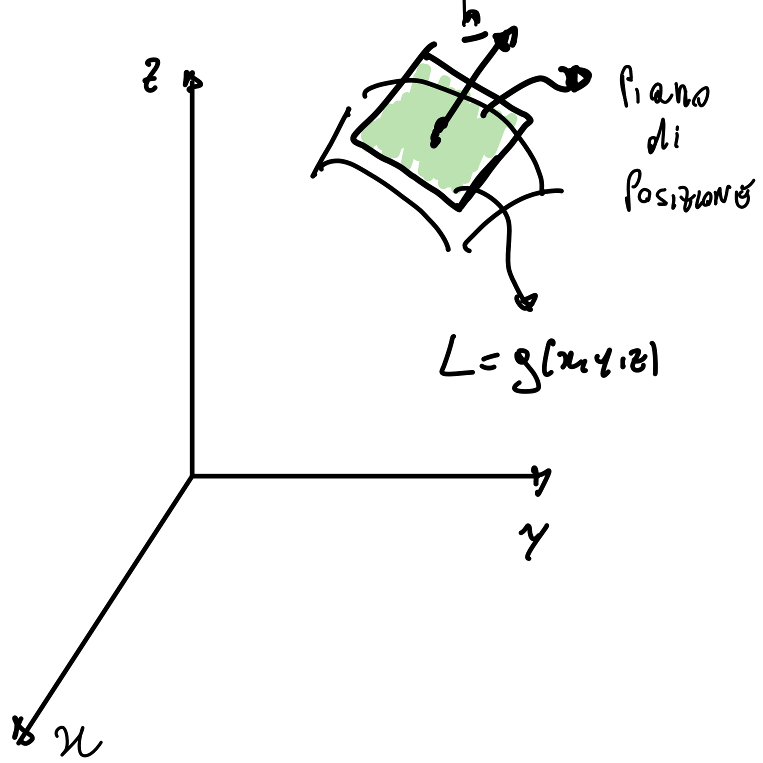
$$l = h_1 dx + h_2 dy + h_3 dz \qquad (6)$$

Con;

$$l = L - L_s \;; \quad h_1 = \left(\frac{\delta g}{\delta x}\right)_s, \quad h_2 = \left(\frac{\delta g}{\delta y}\right)_s \text{ ed } \quad h_3 = \left(\frac{\delta g}{\delta z}\right)_s$$

La (6) è l'equazione di un piano, detto piano di posizione, che meglio approssima la superficie stessa nel punto determinativo e che avrà come normale al piano il vettore:

$$\underset{\sim}{h} = (h_1, h_2, h_3) = \nabla \underline{L}$$



b. Caso di misura errata

Se della grandezza L ne effettuiamo una misura (o stima) affetta da un errore δL e cioè:

$$\tilde{L} = L + \delta L \Rightarrow L = \tilde{L} - \delta L$$

Riscriviamo la (5) e sostituiamo in essa la relazione precedente:

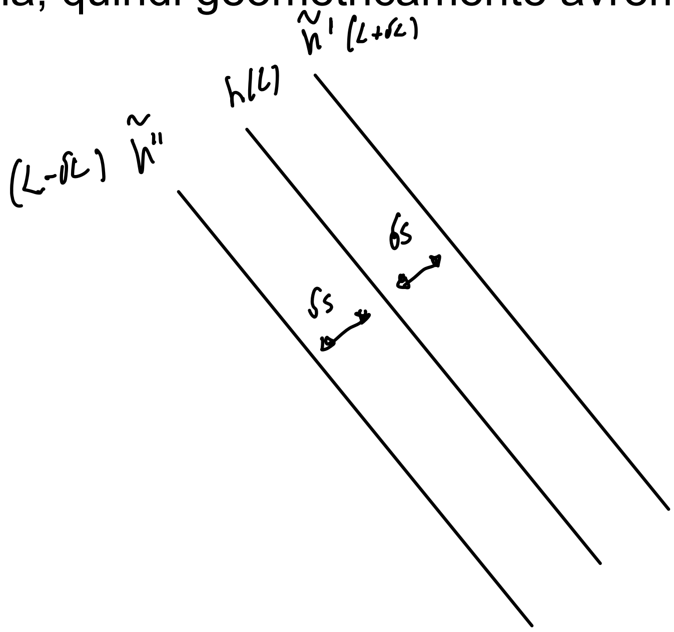
$$l = h_1 \, d\lambda + h_2 \, d\varphi \Rightarrow \underset{\tilde{L} - \delta L}{L} - L_s = h_1 \, d\lambda + h_2 \, d\varphi$$

$$\tilde{L} - L_s = h_1 \, d\lambda + h_2 \, d\varphi + \delta L$$

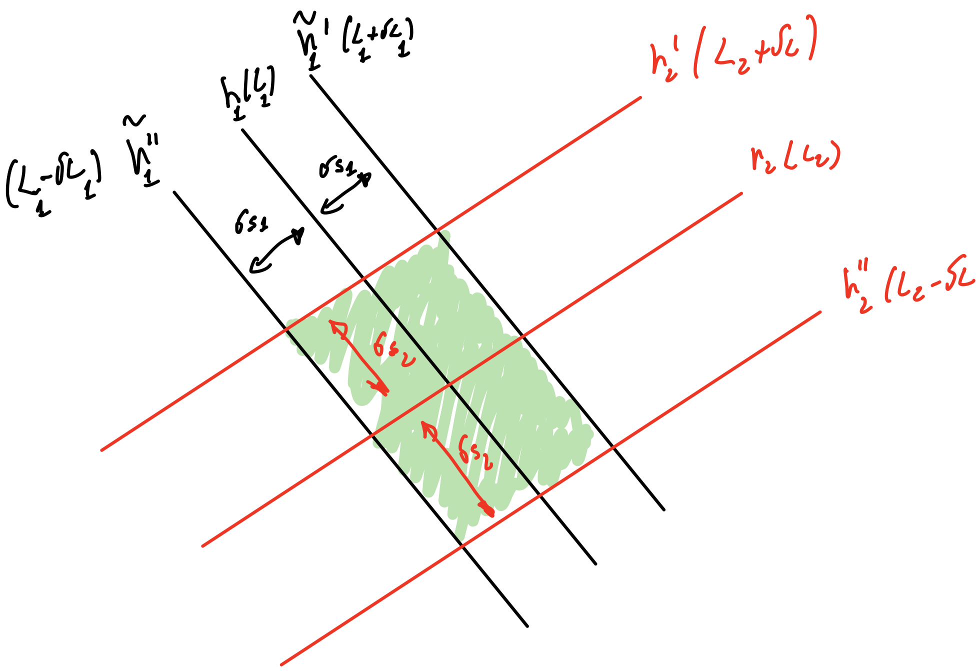
Posto $\tilde{l} = \tilde{L} - L_s$, si ha:

$$\tilde{l} = h_1 \, d\lambda + h_2 \, d\varphi + \delta L$$

Si noti che l’errore di misura può portare ad una sovrastima di L o anche ad una sottostima, quindi geometricamente avremo la seguente situazione.



Pertanto se intersechiamo due retta di posizione ottenute da due misure affette da errore non individueremo un Fix (singolo punto) ma una zona (colorata in verde nella figura seguente) in cui si trova il nostro ricevitore (o osservatore) detta <u>zona di incertezza</u>



In questo caso non abbiamo la possibilità di risolvere il problema in modo deterministico ma si effettua uno studio probabilistico.
Per minimizzare gli errori legati alla presenza di stime errate allora si ha la necessità di effettuare non il numero di misure strettemente necessario (in

questo caso 2) ma di considerarne m-misure simultanee (avvenute alla stessa epoca di misura - in cui il ricevitore aveva approssimativamente la stessa posizione) e scrivere le m-equazioni delle linearizzazione dei m-luoghi di posizione associati ad ogni misura:

$$\tilde{L}_i = L_i + \delta L_i \quad \text{con } i = 1 \text{ — } m$$

Ottenendo:

$$\begin{array}{l} \tilde{r}_1: \\ \tilde{r}_2: \\ \vdots \\ \tilde{r}_m: \end{array} \begin{cases} \tilde{l}_1 = \tilde{L}_1 - L_{S1} = h_{11}\, d\lambda + h_{12}\, d\varphi + \delta L_1 \\ \tilde{l}_2 = \tilde{L}_2 - L_{S2} = h_{21}\, d\lambda + h_{22}\, d\varphi + \delta L_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \tilde{l}_m = \tilde{L}_m - L_{Sm} = h_{m1}\, d\lambda + h_{m2}\, d\varphi + \delta L_m \end{cases} \qquad (7)$$

Come Fix di Navigazione si considererà quel punto la cui differenza di coordinate rispetto al punto stimato $(d\lambda, d\varphi)$ risolve il sistema di equazioni precedenti che è un sistema sovradeterminato; per tale motivo ci si deve affidare ad un <u>Metodo di Stima</u> e cioè un metodo che risolva il sistema precedente adottando un criterio. In navigazione (così come in Geomatica) il metodo più utilizzato è quello dei Minimi Quadrati (Least Squares - LS) che ha come criterio la minimizzazione di una forma quadratica dei residui (differenza tra misure e misure ricostruite nella soluzione fornita dal metodo) di cui si ricorda di seguito la formula.
Scrivendo il sistema (7) in forma matriciale, e cioè posto:

$$\underbrace{z}_{\text{VETTORE DELLE MISURE}} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 \\ \vdots \\ \tilde{l}_m \end{bmatrix} ; \quad \underbrace{H}_{\text{MATRICE DISEGNO}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \vdots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} \end{bmatrix} ; \quad \underbrace{\underline{x}}_{\text{VETTORE DELLE INCOGNITE}} = \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{bmatrix} ; \quad \underbrace{\underline{\varepsilon}}_{\text{VETTORE DEGLI ERRORI DI MISURA}} = \begin{bmatrix} \delta L_1 \\ \vdots \\ \delta L_m \end{bmatrix}$$

.
Si ha:

$$(7) \Leftrightarrow \boxed{\underset{\sim}{z} = H \underline{x} + \underline{\varepsilon}}$$

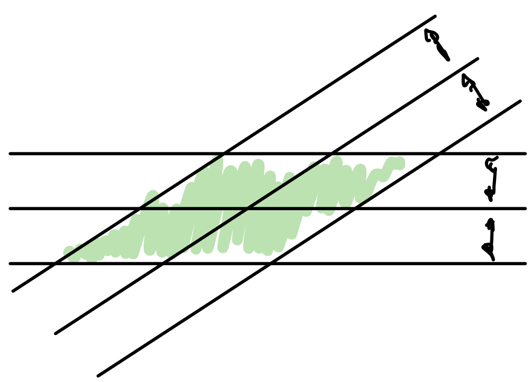
MODELLO DI MISURA (M.M.)

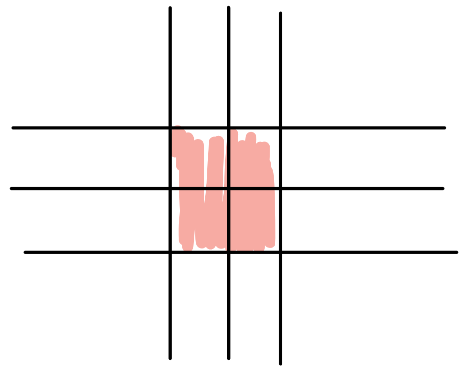
Il LS fornisce una *stima* delle vettore delle incognite, indicata con $\hat{x}_{LS}$,data dalla seguente formula:

$$\hat{x}_{LS} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \underline{z}$$

N.B.1 La matrice H ha come elementi i singoli coefficienti delle singole rette di altezza che, come abbiamo visto in precedenza, rappresentano i coseni direttori dei grandienti (o alternativamente le inclinazioni delle rette). Pertanto la matrice H dipende dalla cosiddetta <u>geometria del sistema</u> e cioè dalla configurazione delle rette nello spazio (dalla loro inclinazione reciproca).

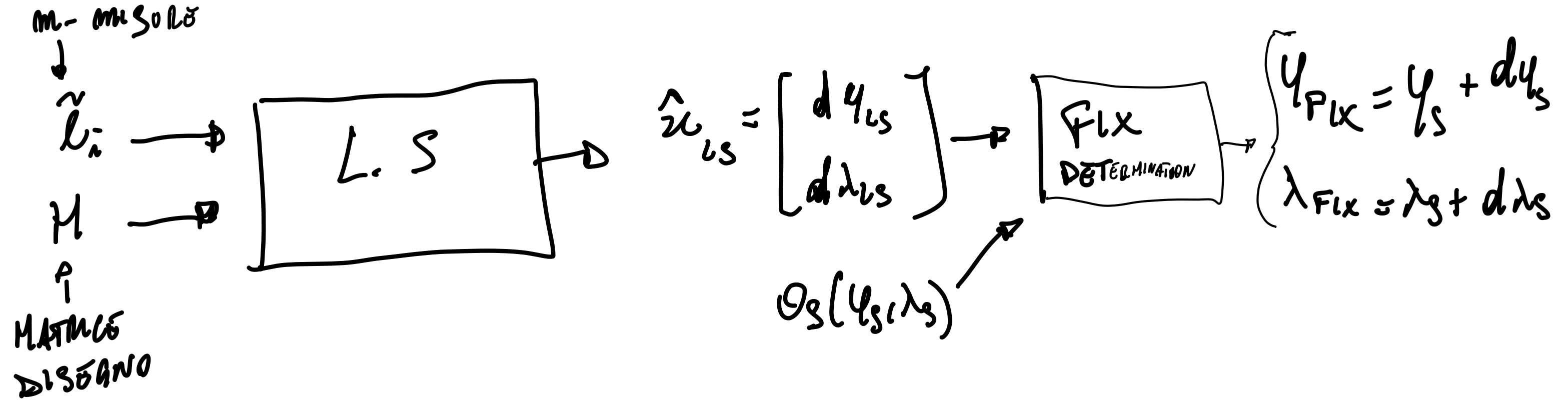
N.B.2 La soluzione a minimi quadrati dipende esclusivamente da H e da $\underline{z}$ quindi la sua accuratezza dipenderà dalla bontà delle misure (cosa che è intuitiva) ma anche dalla geometria del sistema. Per capire questo asserto anche geometricamente consideriamo il caso di solo due rette affette da uno stesso errore di misura e consideriamo due configurazioni geometriche differenti (caso in cui le rette si incontrano formando un angolo qualsiasi e caso in cui sono perpendicolari)





Anche da una sola analisi qualitativa si evince che l'area verde è diversa da quella rossa, e cioè che a parità di incertezza sulle misure che hanno portato a determinare due rette di posizione, l'incertezza sulla posizione (area delle zone evidenziate) dipenda da come sono reciprocamente disposte.

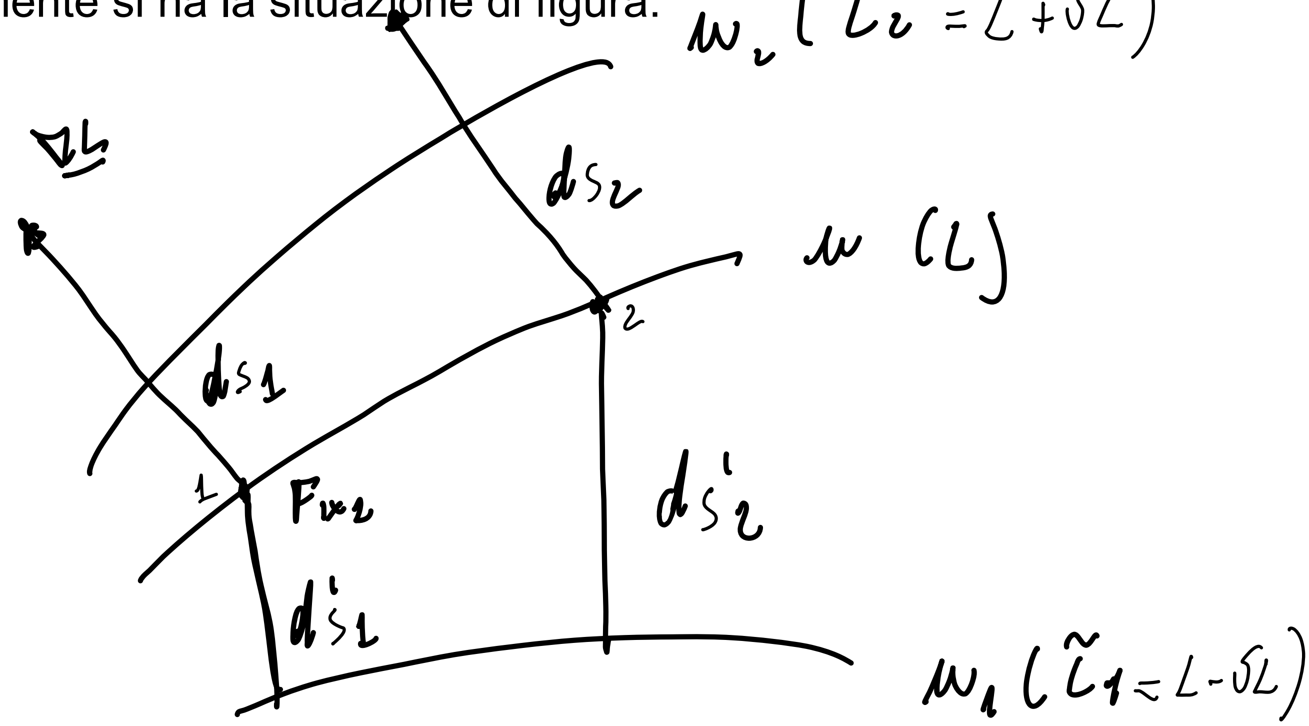
Lo schermo di un algoritmo di Navigazione che risolve il problema fin’ora espresso sarà quindi:



C. Incertezza di un Luogo di Posizione

Si supponga che di una grandezza L si effettua una sottostima $\tilde{L}_1 = L - \delta L$ ed δL una sovrastima $\tilde{L}_2 = L + \delta L$ commettendo sempre lo stesso errore di misura

Graficamente si ha la situazione di figura:



Anche soltanto da un analisi qualitativa della situazione grafica di figura si evince che l'incertezza sulla posizione (espressa dalla distanza tra la curva u e le due curve associate alle misure errate) dipende dalla posizione in cui si trova il ricevitore a parità di errore di misura δL.
In 1 ad esempio si avrà una incertezza ds_1 o ds'_1 diversa da quella che si ha in 2 e cioè ds_2 ed ds'_2.
Per avere una relazione che ci permetta di esprimere quantitativamente tale incertezza si ricordi il significato del modulo di un gradiente, e cioè:

$$|\nabla L| = \frac{dL}{ds} = \sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta \mu}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)^2} = \left[\left(\frac{\delta f}{\delta \mu}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)^2\right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{ds = \frac{dL}{|\nabla L|}} \quad (*)$$

supponendo che la relazione tra gli elementi della relazione (*) sia valida non solo quando si ha a che fare con gli incrementi infinitesimi (d) delle grandezze ma con le relative incertezza (δ) allora la stessa equazione ci permetterà di determinare l'equazione dell'incertezza di un LoP, e cioè:

$$\boxed{\delta s = \frac{\delta L}{|\nabla z|} = \left[\left(\frac{\delta h}{\delta \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{\delta \lambda \cos\varphi}\right)^2\right]^{-1/2} \delta L} \qquad (8)$$

Coefficiente che dipende
dalla posizione del ricevitore (φ, λ)
che effettua la misura L

d. Tracciamento di una retta di posizione su una carta di navigazione

Per determinare il Fix di navigazione mediante un'operazione geometrica (intersecando cioè graficamente le rette di posizione) allora bisogna rappresentarle su una carta di navigazione.
Vediamo di seguito come fare:

d.1. *Caso del Piano Nautico*

Ricordiamo le relazioni di corrispondenza del Piano Nautico e cioè

$$\begin{cases} x = d\lambda \cos\varphi_s \\ y = d\varphi \end{cases} \iff \begin{cases} d\lambda = x \sec\varphi_s \\ d\varphi = y \end{cases}$$

Sostituendo nella relazione (5) si ha:

$$\boxed{l = h_1 \sec\varphi_s \, x + h_2 \, y} \qquad (9)$$

Equazione in forma esplicita della retta di posizione sulla Piano Nautico.
Che non è altro che l'equazione di una retta in forma esplicita, se poniamo:

$a = h_1 \sec\varphi_s$, $b = h_2$ e $c = -l$ si ha:

$$(9) \iff \boxed{ax + by + c = 0}$$

d.2. *Caso della Carta di Mercatore*

Ricordiamo ora le relazioni di corrispondenza della carta di Mercatore:

$$\begin{cases} x = d\lambda \\ y = d\underset{\substack{\uparrow}}{v} = d\varphi \sec\varphi_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\lambda = x \\ d\varphi = y \cos\varphi_s \end{cases}$$

LATITUDINE
CRESCENTE

Sostituendo nella relazione (5) si ha:

$$\boxed{l = h_1 x + h_2 y \cos\varphi_s} \qquad (10)$$

Equazione in forma esplicita della retta di posizione sulla Carta di Mercatore.
Che non è altro che l'equazione di una retta in forma esplicita, se poniamo:

$a = h_1$, $b = h_2 \cos\varphi_s$ e $c = -l$ si ha:

$$(10) \Leftrightarrow \boxed{ax + by + c = 0}$$

APPENDICE

Si introduce di seguito un procedimento puramente analitico per determinare l'equazione della retta di posizione.
Supponiamo di conoscere l'equazione del luogo di posizione:

$$L = f(\varphi, \lambda)$$

e le coordinate di un punto stimato $\quad O_S(\varphi_S, \lambda_S)$

Le coordinate dei punti del LoP sono pertanto

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_S + d\varphi \\ \lambda = \lambda_S + d\lambda \end{cases}$$

Nell'ipotesi che il punto stimato è prossimo al nostro LoP e che: $L = L_S + l$
si può scrivere:

$$L_S + l = f(\varphi, \lambda) = f(\varphi_S + d\varphi, \lambda_S + d\lambda)$$

Sviluppando in serie di Taylor di punto iniziale. $(d\varphi = 0, d\lambda = 0)$ ed arrestando i ai termini del primo ordine per avere la linearizzazione del LoP e cioè l'equazione della <u>retta di posizione</u>, si ha:

$$\cancel{L_S} + l = \cancel{f(\varphi_S, \lambda_S)} + \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)_S d\varphi + \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right)_S d\lambda$$

$$\boxed{l = h_1 d\lambda + h_2 d\varphi}$$

Dove: $h_1 = \left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\right)_S$; $h_2 = \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi}\right)_S$

Equazione della retta di posizione (5)