Si considerino due mobili M1 ed M2 (detto anche Bersaglio) con Moti Assoluti (MA) rispettivamente V1 e V2.. Le direzioni dei due vettori velocità, indicate in figura rispettivamente con r1 ed r2, rappresentano le traiettorie reali dei due mobili. Si consideri il caso in cui le due traiettorie si incontrino in un punto I. I due mobili possono arrivarci simultaneamente oppure prima il mobile M1 e dopo il mobile M2 o viceversa.
Si costruisca in A (posizione al tempo t0 del mobile M1 il triangolo delle velocità, ottenendo così la velocità relativa Vr la cui direzione è indicata con DMR.

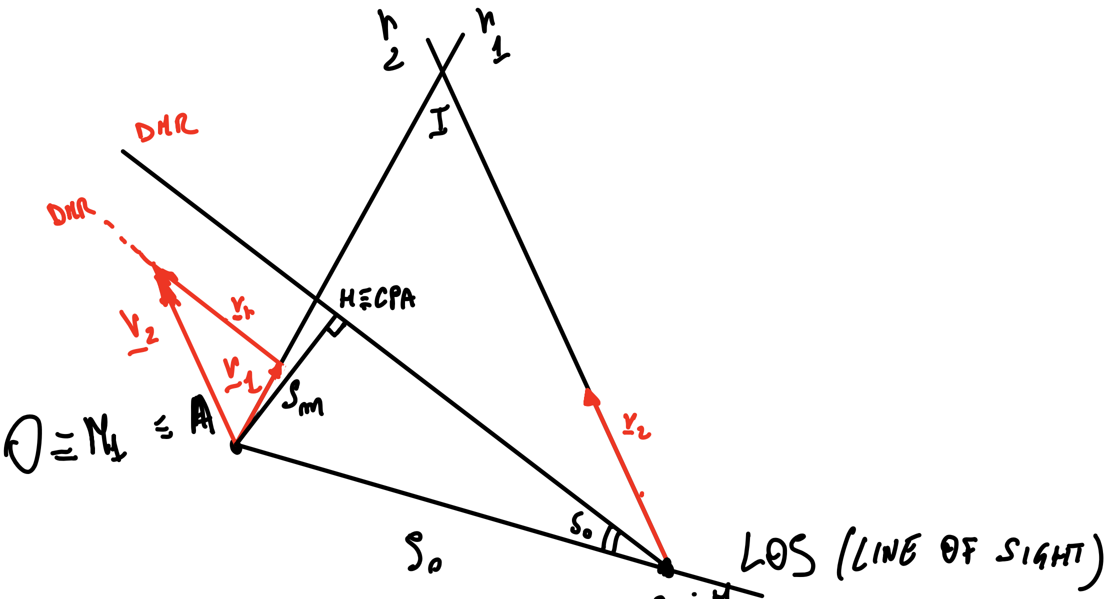
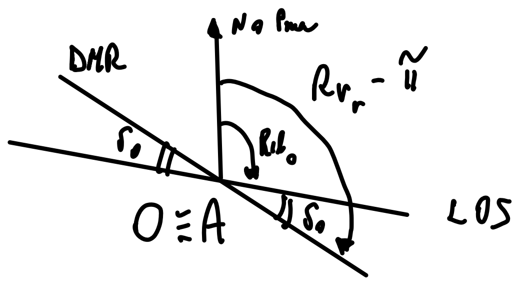


Fig.1

Riportiamo la DMR sulla posizione iniziale del bersaglio B ottenendo in questo modo la traiettoria "apparente" che il mobile percorre se visto da un osservatore solidale al mobile M1. Se la traiettoria apparente del mobile M2 interseca r1 in un punto che si trova nella direzione del moto di M1 (caso di figura) allora M2 passa di prua ad M1. Nel caso in cui intersecasse r1 in un punto che si trova nel verso opposto di V1 allora passerebbe di poppa, mentre per incontrarsi M2 dovrebbe percorrere (sempre durante il suo moto apparente) la congiungente iniziale Bersaglio-Osservatore (indicata in figura con LOS) tale conclusione sarà ulteriormente rafforzata in seguito.
Consideriamo adesso la perpendicolare condotta da A alla traiettoria apparente del mobile M2; il punto H che si determina è il Closest Point of Approach (CPA) e cioè punto in cui il mobile M2 passa alla minima distanza, chiamata miss distance ρ_m , da M1.
Per la sicurezza della navigazione tale distanza è una informazione molto importante; per determinarla consideriamo che un radar a bordo del mobile M1 ci fornisca del Bersaglio sempre la distanza ed il Rilevamento (vero o polare a secondo se si considera come direzione di riferimento il N o la prua del mobile).
Dalla misura di Rilevamento possiamo ricavare l'angolo δ_0 tra la LOS iniziale e la DMR (tale direzione è anche indicata come Rotta della velocità relativa Vr); infatti riportando tali direzioni in un solo punto si può notare che facendone la differenza si può calcolare tale angolo (NB a tale differenza di deve sommare o sottrarre 180° a secondo del quadrante in cui si trova il bersaglio e dal verso della Vr

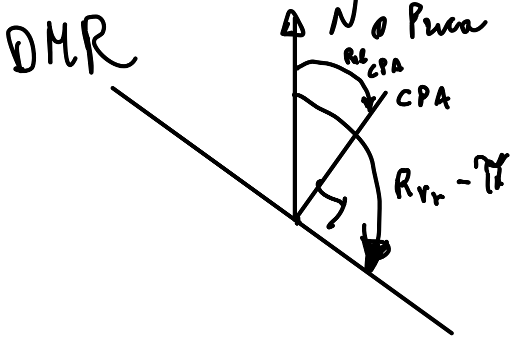


$$\delta_0 = R_{v_r} - \tilde{\pi} - Ril_0$$

Si consideri adesso il triangolo $\overset{\Delta}{AHB_0}$, dalla trigonometria piana si ha:

$$\rho_m = \rho_0 \sin \delta_0 \quad (*)$$

Il CPA sarà noto se conosciamo le sue coordinate (per semplicità consideriamo le coordinate polari con polo coincidente con A), pertanto oltre la distanza dal polo (relazione precedente) dobbiamo conoscere l'anomalia che in questo caso ha il significato di Rilevamento. Tale angolo si può determinare riportando nel polo la direzione della DMR e quella del CPA



$$Ril_{CPA} = R_{V_r} - \frac{\pi}{2} \underbrace{(\pm\gamma)}_{\text{VALGONO LE CONSIDERAZIONI PRECEDENTI}}$$

Pertanto il CPA è il punto che in coordinate polari dato da

$$CPA\left(\rho_m , Ril_{CPA}\right)$$

Per determinare quando il mobile M2 si troverà in questo punto, e cioè calcolare il Time of CPA (TCPA) consideriamo che M2 percorre la DMR nel suo moto apparente con velocità Vr pertanto:

$$V_r = \frac{\overline{B_0H}}{TCPA} \Rightarrow TCPA = \frac{\rho_0 \cos\delta_0}{V_r} \quad (*)$$

Tale epoca può essere ricavata anche dalla dimostrazione riportata in Appendice a tale dispensa.

Adesso per determinare la **Condizione dell'Incontro** si consideri soltanto il moto relativo dei due mobili e la traiettoria apparente del mobile M2 (bersaglio) . Consideriamo due posizioni successive del bersaglio B0 e B (che unite ci forniscono la DMR) e le misure fornite dal radar nelle due epoche e cioè

$$t_0 \left(\rho_0 , Ril_0\right)$$

$$t \left(\rho , Ril\right)$$

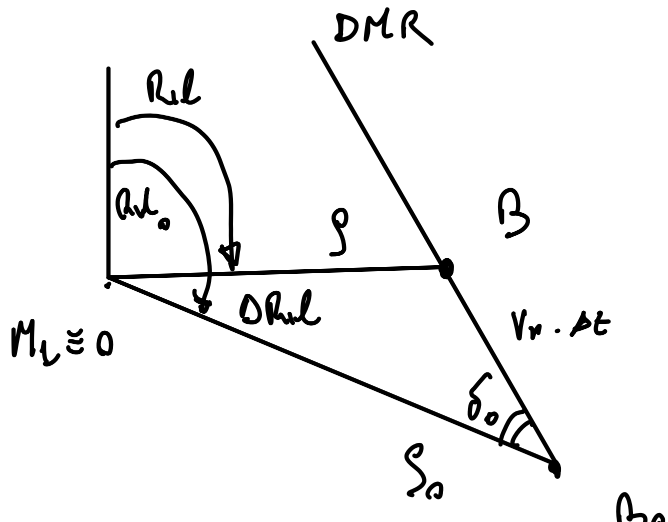


FIG.2

Dal Teorema dei Seni applicato al triangolo $\overset{\Delta}{OB_0B}$ si ha:

$$\frac{\overline{B_0B}}{\sin(\Delta Ril)} = \frac{\overline{OB}}{\sin\delta_0}$$

Da cui:

$$\sin\Delta Ril = \frac{\overline{B_0B}}{\overline{OB}} \cdot \sin\delta_0 = \frac{V_r \cdot \Delta t}{\rho} \cdot \sin\delta_0 \Rightarrow \frac{\sin\Delta Ril}{\Delta t} = \frac{V_r \sin\delta_0}{\rho}$$

Ricavando $\sin\delta_0$ dalla $(*)$ si ha:

$$\sin\delta_0 = \frac{\rho_m}{\rho_0}$$

che sostituiamo nella relazione precedente ottenendo:

$$\frac{\sin\Delta Ril}{\Delta t} = \frac{V_r \, \rho_m}{\rho \, \rho_0} \quad (**)$$

Nell'ipotesi in cui. $\Delta t \to 0$, il chè significa che le due posizioni successive del bersaglio sono prossime, si ha:

$$S_m \Delta Ril = \Delta Ril \; ; \; S \cong S_0 \; ; \; \frac{\Delta Ril}{\Delta t} = \frac{d Ril}{dt}$$

Sostituendo nella (**) si ha:

$$\frac{dRil}{dt} \cong \frac{V_r S_m}{S^2} .$$

I due mobili si incontrano se:

$$S_m = 0$$

Che sostituito nella precedente relazione comporta:

$$\frac{dRil}{dt} = 0 \xRightarrow{\text{INTEGRANDO}} \boxed{Ril = cost}$$

affinché i due mobili si incontrino quindi il rilevamento del bersaglio deve rimanere costante e pari pertanto al rilevamento iniziale Ril0. Per questo motivo un osservatore solidale al mobile M1 vedrà M2 muoversi lungo la LOS iniziale.

APPENDICE

* Per il calcolo del TCPA si può anche ragionare in questo modo:

Considerando t0=0 e cioè iniziando a misurare i tempi a partire dal primo rilevamento del bersaglio si ha:

$$\overline{B_0B} = D = |V_r|\,\Delta t = |V_r|\,(t - \underbrace{t_0}_{t_0=0}) = |V_r|\,t$$

Applicando il Teorema di CARNOT al triangolo $O\hat{B_0}B$ di Fig.2 si ha:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OB_0}^2 + \overline{B_0B}^2 - 2\,\overline{OB_0}\cdot\overline{B_0B}\cdot\cos O\hat{B_0}B$$

Sostituendo il significato dei lati, si ha:

$$\rho^2 = \rho_0^2 + V_r^2\,t^2 - 2\rho_0 V_r t \cos\delta_0$$

Equazione che esprime la distanza generica di un punto della traiettoria del moto apparente dal centro che è una funzione del tempo (variando a secondo dell'epoca in cui si considera il bersaglio.

$$\rho = f(t)$$

Si ha che M2 raggiungerà il CPA quando sarà minima tale distanza; quindi il tutto si riduce a studiare il minimo di una funzione (la condizione di minimo si ha quando la derivata prima della funzione si annulla e la derivata seconda è maggiore di zero). Calcoliamo la derivata della fuzione

$$\rho^2 = \rho^2(t) = y$$

$$y' = 0 + 2V_r^2 t - 2\rho_0 V_r \cos\delta_0 = 0$$

$$\cancel{2} V_r^{\cancel{2}} \cdot t = \cancel{2}\rho_0 \cancel{V_r} \cos\delta_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underbrace{t}_{TCPA} = \frac{\rho_0 \cos\delta_0}{V_r}}$$

MIN

o

MAX

Per capire se in t sia ha un minimo oppure un massimo studiamo il segno della derivata seconda:

$$y'' = \underbrace{2V_r^2}_{>0} > 0 \Rightarrow \text{in } t \text{ si ha un } \underline{\text{MINIMO}} \Rightarrow TCPA$$