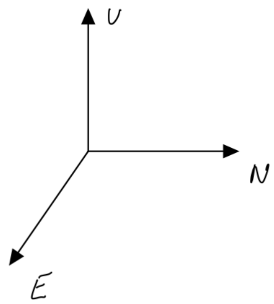
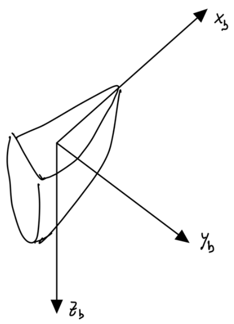
Stima del Moto di un mobile

La differenza fra moto assoluto e moto relativo (di un bersaglio) dipende dal sistema di riferimento (SdR) adottato per osservare il moto del bersaglio. Si distinguono: SdR globali (esterni al sistema di navigazione) e SdR solidali al sistema di navigazione.
I SdR solidali al sistema di navigazione sono: ENU, NED, Body. Tutti e tre sono sistemi locali ma la differenza risiede nel fatto che i primi due hanno soltanto l'origine solidale al mobile, mentre gli assi hanno orientamento fisso nel tempo. Per tale motivo i primi due SdR non percepiscono i moti di rollio, di beccheggio e di imbardata.



La terna Body, invece, è completamente solidale al mobile.



In sintesi: le terne ENU e NED seguono soltanto il moto traslatorio del mobile, mentre la terna Body segue sia il moto traslatorio che rotatorio del mobile e pertanto è l'unico che si può considerare solidale in senso stretto al mobile.
Vediamo ora come diverse tipologie di sistemi di navigazione stimano il moto assoluto di un mobile ad esso solidale (per la stima di un moto relativo è necessario considerare almeno un bersaglio rispetto al quale calcolarlo).

Stima del MA di un Sistema Position Fixing

<u>Calcolo della velocità nel sistema ECEF</u>

In un SdR esterno al sistema di navigazione, come il sistema ECEF, i moti considerati saranno assoluti. In questa tipologia di sistema di riferimento opera il GNSS, che è un sistema di navigazione di position fixing.

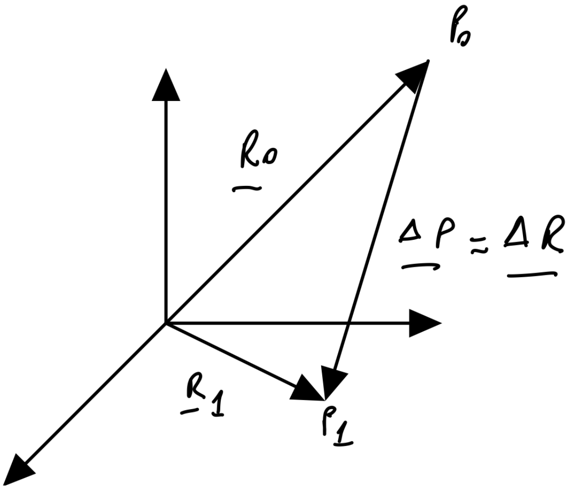
Supponiamo che, in due epoche differenti, il sistema GNSS fornisca la posizione del mobile

$$t_0 \rightarrow \underline{R_0}\ (x_0, y_0, z_0)$$

$$t_1 \rightarrow \underline{R_1}\ (x_1, y_1, z_1)$$

Integrando tale sistema con un **cronometro**, che permette di valutare il tempo del moto $\Delta t = t_1 - t_0$, si ottiene il moto assoluto, cioè il seguente vettore velocità:

$$\underline{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}; \frac{\Delta y}{\Delta t}; \frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$



Vediamo come effettuare la stessa stima nel sistema ECEF qualora le posizioni del sistema di navigazione sono fornite in coordinate geografiche. In questo caso, considerando le posizioni del mobile P_0 $(\varphi_0; \lambda_0)$)e P_1 $(\varphi_1; \lambda_1)$, sulla superficie terrestre, riferite rispettivamente agli istanti t_0 e t_1, si tracciano il parallelo passante per P_1 il meridiano passante per P_0 e l'ortodromia che li congiunge ottenendo il triangolo mistilineo di figura:

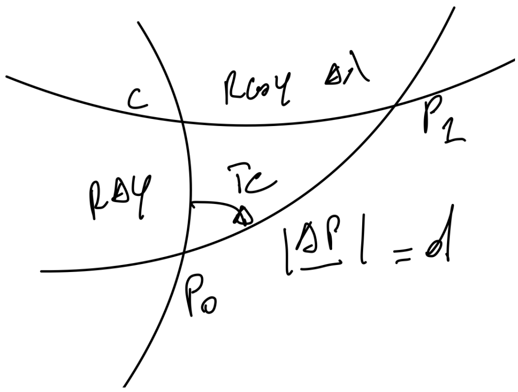


Fig.1

Note le coordinate geografiche dei punti, è possibile ricavare la differenza di latitudine $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ e di longitudine $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ grazie alle quali possiamo ricavare lo spostamento:

$$|\Delta P| = \sqrt{R^2 \Delta\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi\, \Delta\lambda^2} = R\sqrt{\Delta\varphi^2 + \Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi}$$

Sapendo che il cronometro fornisce il tempo del moto: $\Delta t = t_1 - t_0$ allora possiamo ricavare come segue il modulo del vettore velocità:

$$|\underline{v}| = \frac{|\Delta P|}{\Delta t}$$

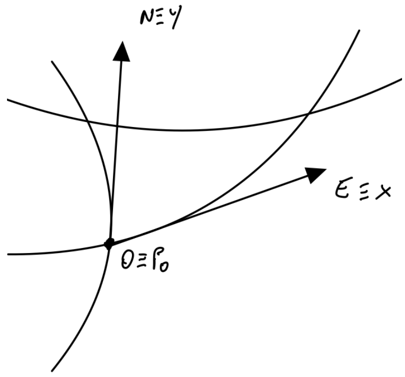
Oltre al modulo, è importante conoscere la direzione di tale vettore in quanto indica la rotta del mobile (TC – true course) che si può ricavare dal triangolo mistilineo:

$$\operatorname{tg} TC = \frac{R cos\varphi \Delta\lambda}{R\Delta\varphi} = \frac{cos\varphi\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \rightarrow TC = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{cos\varphi\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)$$

Questo tipo di approccio esprime il vettore in coordinate polari, ma nella logica della cinematica navale è più conveniente sfruttare le coordinate rettangolari.

<u>Calcolo della velocità nel sistema ENU</u>

Consideriamo ora le direzioni cardiali Nord ed Est del punto P_0 :



Se le due posizioni successive del sistema di navigazione P_0 e P_1 appartengono allo stesso orizzonte (piano π), il triangolo mistilineo diventa un triangolo rettangolo di cateti pari a ΔE e ΔN.

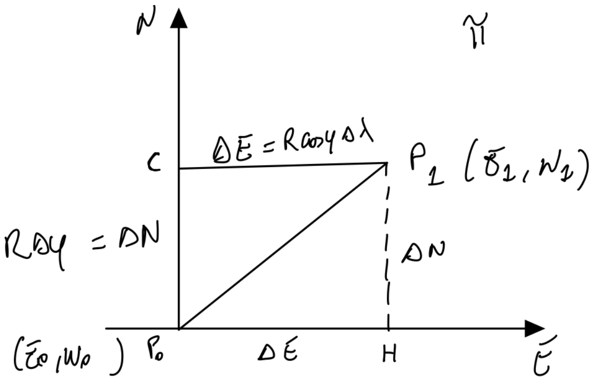


Fig. 2

I due triangoli di Fig.1 e Fig.2 sono uguali pertanto le lunghezze dei cateti sono le stesse e quindi:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = R cos\varphi\Delta\lambda$$

$$\Delta N = N_1 - N_0 = R\Delta\varphi$$

Dividendo per Δt è possibile ottenere le componenti Est e Nord del vettore velocità:

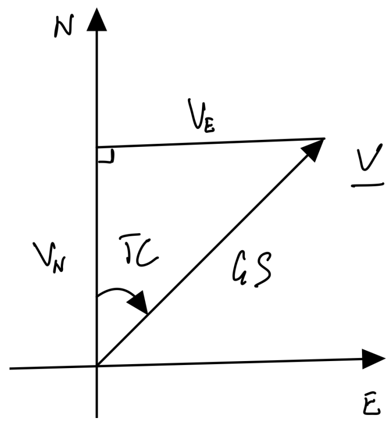
$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = V_E$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = V_N$$

La terza componente è nulla ($V_U = 0$) per ipotesi, perché il moto si svolge sull'orizzonte per cui le componenti in ENU del vettore velocità sono:

$$\underline{V} = (V_E, V_N, 0)$$

Dalla rappresentazione in ENU del vettore velocità $\underline{V}$, è possibile ricavare la rotta, infatti:



$$TC = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{V_E}{V_N}\right)$$

Inoltre, è possibile ricavare direttamente la velocità effettiva o Ground Speed (GS) del mobile, che è una velocità espressa in un SdR non strettamente solidale al mobile (ENU, appunto):

$$GS = \sqrt{V_E^2 + V_N^2}$$

Stima del moto di un mobile da parte di un sistema Dead Reckoning (DR)

È opportuno osservare che per quanto vantaggioso sia il fatto che i sistemi position fixing forniscano la posizione espressa in coordinate rettangolari, affinché ciò avvenga, è necessario studiare la posizione del mobile almeno in due istanti differenti. Perciò la velocità è ottenuta in modo indiretto, a partire dalla variazione temporale della posizione.

I sistemi di posizionamento DR, invece, risolvono questo problema mediante misure effettuate in una singola epoca. Un sistema DR è composto da tre sensori:

- sensori di velocità (solcometri, anemometri) che forniscono informazioni di velocità nella terna body; la velocità che si misura è riferita alla direzione d'avanzamento del mobile (detta anche "velocità propulsiva" ed indicata in letteratura con V_p).
- indicatori di direzione (girobussole, bussole magnetiche) che forniscono informazioni sulla rotta (TC);
- cronometri che forniscono misure di tempo.

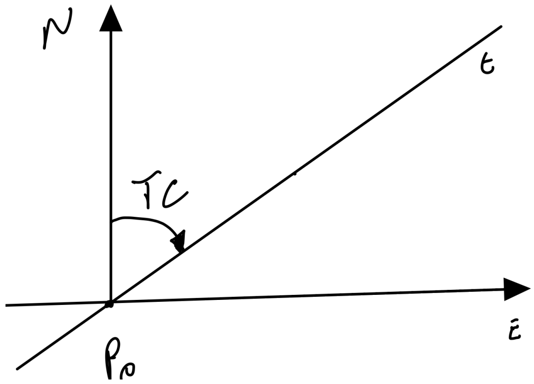
Dunque, da un'unica epoca è possibile ottenere informazioni di velocità, di rotta e di tempo che "in assenza" di vento e corrente rappresentato la velocità effettiva o GS del mobile.

<u>Stima della Posizione di un sistema Dead Reckoning (DR)</u>

Vediamo adesso come sono sfruttate queste misure per ottenere le coordinate della posizione finale P_1 del sistema di navigazione DR nota la posizione iniziale P_0. Risolviamo questo problema con approccio: grafico ed analitico.

Graficamente

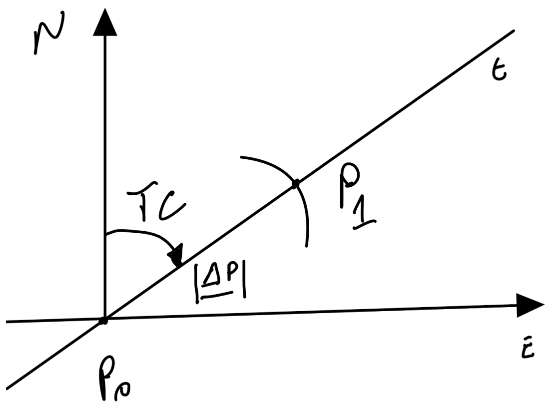
Rappresentiamo in P_0 il SdR ENU. Grazie all'indicatore di direzione è possibile tracciare la traiettoria del mobile - t.



Conoscendo, grazie agli altri due sensori, il modulo della velocità $|\underline{v}|$ e il tempo di navigazione Δt è possibile calcolare, considerato il moto uniforme[1], lo spostamento:

$$|\underline{v}| = \frac{|\underline{\Delta P}|}{\Delta t} \rightarrow |\underline{\Delta P}| = |\underline{v}|\Delta t$$

Conoscendo il modulo dello spostamento, è possibile riportarlo graficamente sulla direzione della rotta (ad esempio con l'utilizzo di un compasso) come segue:



[1] L'ipotesi di moto uniforme è sempre rispettata se le informazioni vengono processate con un'elevata frequenza, anche se si tratta di un moto accelerato: $v = cost \leftrightarrow \Delta t \rightarrow 0$.

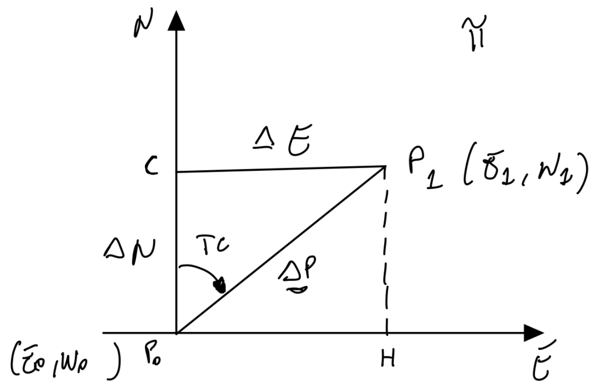
Il punto ottenuto dall'intersezione dell'arco di circonferenza di centro P_0 e raggio $|\underline{\Delta P}|$ e la retta (t) – direzione del moto di rotta TC- sarà la posizione P_1 del sistema di navigazione all'epoca t_1

Algebricamente

Dalle misure del solcometro e del cronometro possiamo ricavare il modulo del vettore spostamento, come prima, e cioè:

$$|\underline{\Delta P}| = |\underline{v}|\Delta t$$

Consideriamo il triangolo



Di cui conosciamo l'ipotenusa, dal calcolo precedente, e l'angolo in P_0 pari alla misura dell'indicatore di direzione e cioè la TC.

Possiamo calcolare i cateti:

$$\Delta E = |\underline{\Delta P}|\sin{(TC)}$$

$$\Delta N = |\underline{\Delta P}|\cos{(TC)}$$

e quindi le coordinate del punto P_1 :

$$E_1 = E_0 + \Delta E$$

$$N_1 = N_0 + \Delta N$$

Mentre nelle ipotesi di moto orizzontale:

$$U_1 = U_0$$

<u>Deriva del sistemi DR</u>

Lo svantaggio principale dei sistemi DR è legato agli errori di misura e a come questi influenzano la stima della posizione finale.

Se indichiamo con L la "vera" stima di una grandezza, un sensore ci fornisce una sua misura $\tilde{L}$ data da:

$$\tilde{L} = L + \delta L$$

dove δL rappresenta l'errore di misura (che può essere sistematico, accidentale e/o grossolano)

Un sistema di navigazione DR per determinale la posizione utilizza misure di velocità, di rotta e di tempo, e quindi:

$$\tilde{v} = v + \delta v$$
$$\widetilde{TC} = TC + \delta TC$$
$$\tilde{t} = t + \delta t$$

N.B. δTC, nel caso di una girobussola è la deviazione gyro, differenza tra il Nord Vero e la direzione indicata dalla gyro.

Trascurando gli errori sulla rotta e sul tempo ($\delta TC = \delta t = 0$), sarà possibile tracciare la traiettoria reale del mobile. Sfruttando l'informazione di velocità, è possibile ricavare lo spostamento nelle seguenti ipotesi: $t_0 = 0; P = P_0$

$$|\underline{\Delta P}| = v\Delta t$$

Allora: $\Delta t = t - t_0 = t$, per cui:

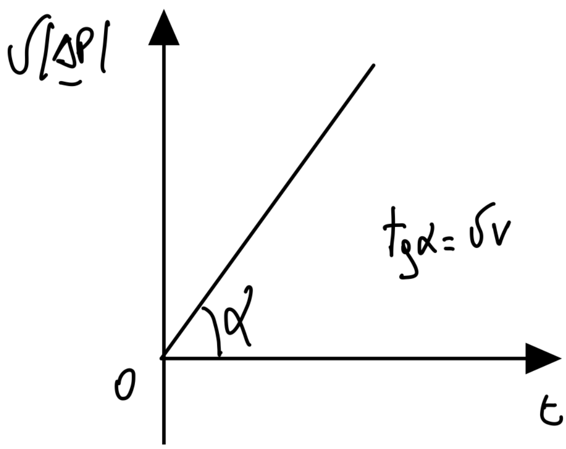
$$|\underline{\Delta P}| = vt$$

Per capire come gli errori sulla misura di velocità si ripercuotono sullo spostamento e quindi sulla posizione finale del sistema di navigazione, si consideri la legge di propagazione della varianza-covarianza, e cioè:

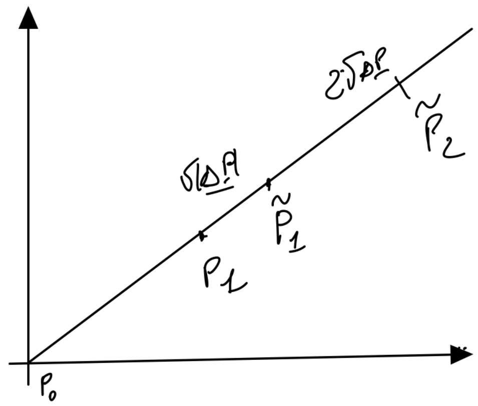
$$\delta|\underline{\Delta P}| = \delta v\ t$$

Se, ad esempio, l'errore sulla velocità è pari ad 1kt, dopo 1h di tempo, l'errore sullo spostamento sarà di 1nm, dopo 2h sarà di 2nm, dopo 3h sarà di 3nm e così via.

Come è possibile notare, l'errore sullo spostamento aumenta linearmente nel tempo. L'inclinazione di tale retta dipende dal coefficiente angolare δv che, tanto più cresce, tanto più la retta è inclinata.



Pertanto, anziché ottenere la posizione P_1 effettiva del mobile, si ottiene una sua stima $\tilde{P}$ che si discosta da P_1 di una quantità pari a $\delta|\underline{\Delta P}|$ che cresce nel tempo, per questo motivo tale processo è definito <u>deriva</u>.



La reale limitazione dei sistemi DR, però, risiede sull'errore della misura TC. Supponiamo che gli errori di tempo e velocità siano nulli ($\delta v = \delta t = 0$) e che si abbia soltanto un errore sulla rotta δTC. In tal caso, non si è in grado di valutare la vera traiettoria del mobile (retta t di figura 3) , ma la si può sottostimare (retta t_1 di figura 3) o sovrastimare(retta t_2 di figura 3). Se, dopo un intervallo di tempo Δt, il mobile si troverà sulla posizione P, il sistema DR in quanto affetto da errore sulla rotta (si suppone il caso di una sua sottostima) fornirà la posizione $\tilde{P}$ distante δP da P.

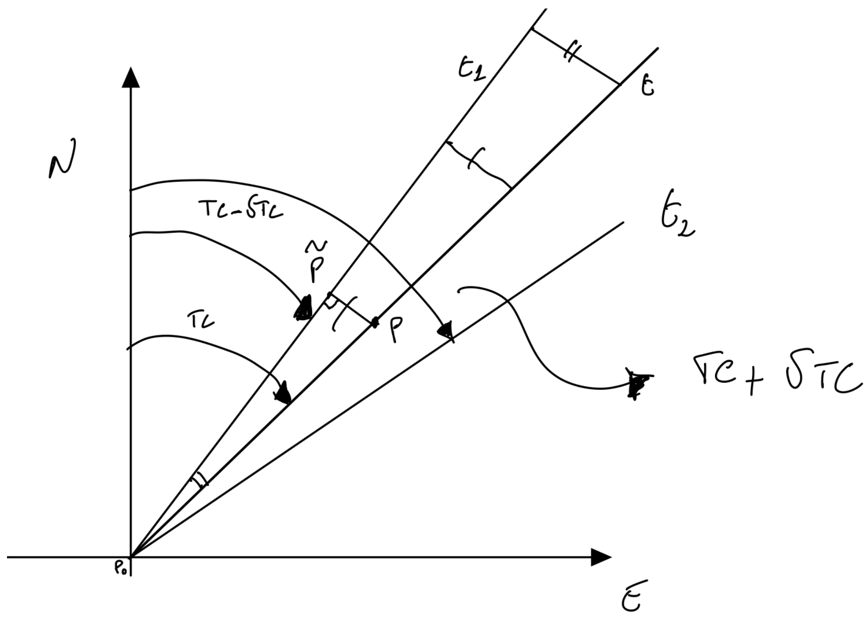
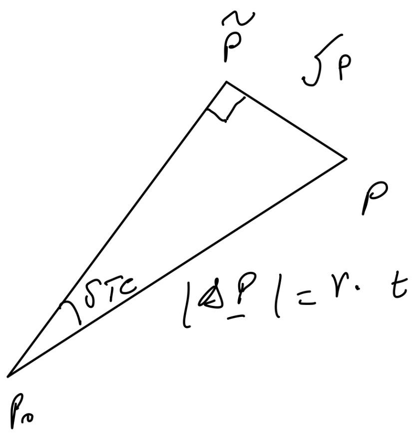


Fig. 3

Considerando il triangolo $\tilde{P}P_0P$ rettangolo in $\tilde{P}$, l'angolo in $P_0 = \delta TC$, il cateto $\tilde{P}\,P = \delta P$ e l'ipotenusa $P_0P = |\underline{\Delta P}|$:



Dalla trigonometria piana:

$$\delta P = |\underline{\Delta P}| \sin \delta TC$$

Se $\delta TC \to 0$ $\sin \delta TC = \delta TC$, $t_0 = 0$ e ricordando che $|\underline{\Delta P}| = v\Delta t = v\ t$, si ha:

$$\delta P = v\ t\ \delta TC$$

In sintesi, se non si commettono errori di velocità e di tempo, l'errore di posizione dipende linearmente dall'errore sulla rotta; sebbene anche in questo caso la dipendenza è lineare tra errore di misura ed errore sulla posizione, la situazione è più pericolosa rispetto al caso precedente perché il coefficiente angolare dell'equazione lineare non è costante ma funzione del tempo. In particolare tale coefficiente, e quindi l'inclinazione della retta, aumentano con il tempo comportando, quindi, una deriva sulla posizione in continuo aumento.