

10.1 - Premessa

Nello studio dei fenomeni giroscopici si deve spesso ricorrere alla rappresentazione vettoriale delle velocità angolari, alla loro composizione e scomposizione; può riuscire utile perciò richiamare i principi fondamentali di questa rappresentazione.

Consideriamo (v. figura 10.1) un corpo solido, considerato per semplicità di forma sferica, in rotazione intorno ad un asse con velocità angolare $\dot{\Omega}$ solidale alla terna $OXYZ$ con OX coincidente con $\dot{\Omega}$ e riferito ad un sistema inerziale di riferimento $Oxyz$; sull'asse OX prendiamo, a partire dal centro di rotazione O , un segmento OB proporzionale ad $\dot{\Omega}$ e diretto in maniera che un osservatore posto con i piedi in O e la testa in B veda la rotazione del corpo avvenire nel senso delle lancette dell'orologio.

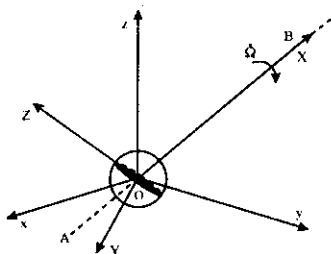


Figura 10.1

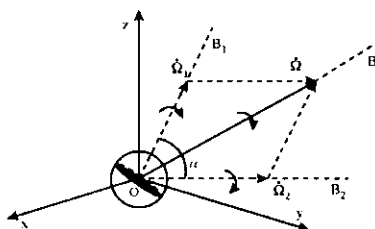


Figura 10.2

Il vettore OB rappresenterà, in grandezza e direzione, la velocità angolare del corpo solido considerato. Se il corpo solido è animato da due rotazioni simultanee, che avvengano con velocità angolari diverse $\dot{\Omega}_1$ e $\dot{\Omega}_2$, intorno agli assi OB_1 e OB_2 (v. figura 10.2), allora è possibile comporre i due vettori ($\dot{\Omega}_1$ e $\dot{\Omega}_2$). La combinazione di queste due rotazioni fornirà una unica rotazione del corpo solido intorno ad un terzo asse diretto secondo la diagonale del parallelogramma costruito sui vettori ($\dot{\Omega}_1$ e $\dot{\Omega}_2$). La velocità angolare di rotazione intorno a questo asse è rappresentata in grandezza e in direzione dal vettore $\dot{\Omega}$ rappresentato dalla diagonale del parallelogramma stesso. La grandezza della velocità angolare risultante, è facilmente nota quando si conoscano i vettori ($\dot{\Omega}_1$ e $\dot{\Omega}_2$) e l'angolo α formato dagli assi delle rotazioni componenti. Per la scomposizione di una velocità angolare secondo due direzioni date, si

segue il procedimento inverso: si può dire insomma che si opera sulle velocità angolari esattamente come con le forze. Un successivo approfondimento sulla fisica dei corpi ruotanti e sulla loro rappresentazione vettoriale è riportato in APPENDICE A

10.2 – Generalità sui giroscopi

Consideriamo il giroscopio (girostat) di figura 10.3 costituito da un solido di rivoluzione animato da un movimento di rapidissima rotazione intorno ad un asse geometrico, (passante cioè per il centro di gravità). Se esso è sospeso nel vuoto senza legami rigidi, come avviene per esempio per i corpi celesti, oppure se è sospeso in maniera che la reazione dell'appoggio passi sempre per il suo centro di gravità e con il suo asse suscettibile di qualunque rotazione intorno a questo punto (sospensione cardanica a tre snodi), si dice che il giroscopio ha tre gradi di libertà; vincolando il giroscopio ad un piano, (che si realizza sopprimendo uno degli snodi della sospensione), il grado di libertà si riduce a due; vincolandone l'asse ad una direzione fissa si riduce il grado di libertà ad uno.

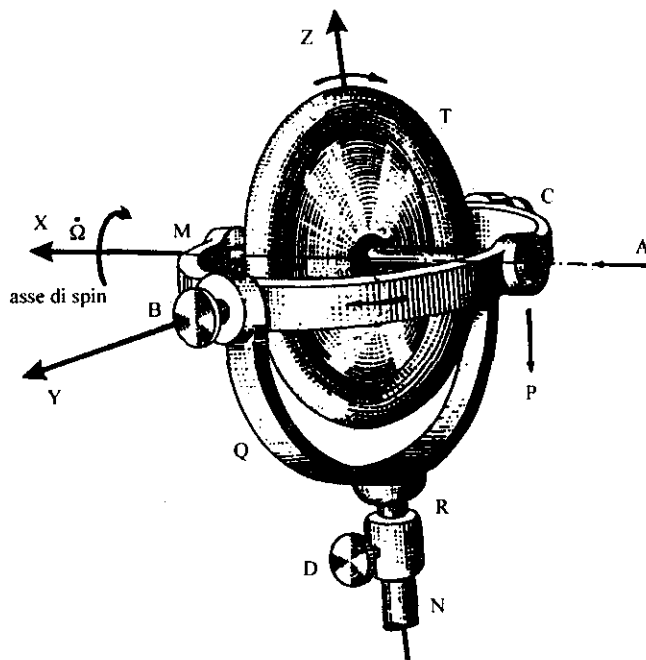


Figura 10.3 – Giroscopio a tre gradi di libertà

Un giroscopio con grado di libertà tre può servire ad evidenziare l'inerzia giroscopica e la rotazione della Terra; un giroscopio con grado di

libertà due può essere utilizzato per indicare la direzione del Nord sul piano dell'orizzonte.

Lo studio fisico matematico di un giroscopio a tre gradi di libertà è riportato in APPENDICE A; le equazioni che forniscono il moto dell'asse di spin sono fornite dalle equazioni (10.A.6):

$$\begin{aligned} C_x &= I_x \ddot{\Omega}_x - (I_y - I_z) \dot{\Omega}_y \dot{\Omega}_z \\ C_y &= I_y \ddot{\Omega}_y - (I_z - I_x) \dot{\Omega}_z \dot{\Omega}_x \\ C_z &= I_z \ddot{\Omega}_z - (I_x - I_y) \dot{\Omega}_x \dot{\Omega}_y \end{aligned} \quad (10.A.6)$$

con (C_x, C_y, C_z) le componenti della coppia C , (I_x, I_y, I_z) i momenti d'inerzia del giroscopio, $(\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z)$ le velocità angolari dell'asse di rotazione rispetto alla terna; quando si riconsidera il corpo rotante di forma cilindrica (per esempio un disco rotante attorno all'asse normale al disco), l'ellissoide d'inerzia è rotondo con $(I_y = I_z)$ ed il sistema (10.A.6) può essere riscritto nella forma (10.A.16).

Il sistema (10.A.16) fornisce il moto del giroscopio mediante due equazioni differenziali del secondo ordine la cui soluzione è riportata in APPENDICE B:

$$\begin{aligned} C_x &= I_1 \ddot{\alpha} + H \dot{\gamma} \\ C_y &= I_1 \ddot{\gamma} - H \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (10.A.16)$$

con $I_x = I$, $\dot{\Omega}_x = \dot{\Omega}$, $\ddot{\Omega}_x = 0$, $H = I\dot{\Omega}$, $I_y = I_z = I_1$, $\dot{\Omega}_y = \dot{\alpha}$ e $\dot{\Omega}_z = \dot{\gamma}$.

10.3 - Inerzia giroscopica.

Si usa generalmente dire che l'asse di un giroscopio con grado di libertà tre tende a mantenersi parallelo a se stesso nello spazio. Ma è chiaro che, sotto questa forma, tale proprietà non è un attributo dei soli girostati in movimento. Qualunque corpo, anche non rotante, tende a mantenere costante l'orientamento del suo asse nello spazio, finché non intervengano forze perturbatrici; invece l'aspetto caratteristico *dell'inerzia giroscopica* consiste appunto nella diversa maniera con cui un giroscopio reagisce all'azione di forze perturbatrici esterne.

Confrontiamo per esempio il modo di agire di due girostati identici, sospesi all'equatore con grado di libertà tre, e dei quali uno abbia il toro giostatico fermo, mentre l'altro lo abbia in movimento di rapidissima rotazione intorno al suo asse.

Supponendo nulli gli attriti della sospensione e trascurabile la resistenza dell'aria, nessuna forza tenterebbe ad alterare l'orientamento

dell'asse AB dei due rotori supposti inizialmente orizzontali e diretti per Est-Ovest (vedi figure 10.4a e 10.4b in posizione 1).

Ambedue rimarrebbero perciò puntati verso lo stessa stella, e si sposterebbero durante la rotazione della Terra intorno al proprio asse, mantenendosi paralleli a loro stessi, come mostra la figura 4a, mentre la sospensione cardanica, fissa alla Terra, ruoterebbe intorno ai giostati compiendo un intero giro nelle 24 ore sideree pari a $23^h 56^m 04^s$ di tempo medio.

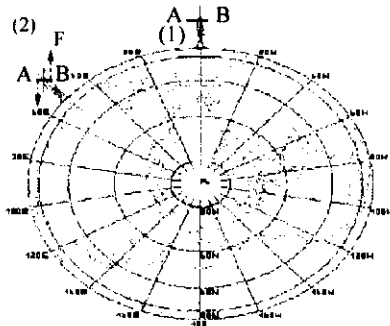


Figura 10.4a

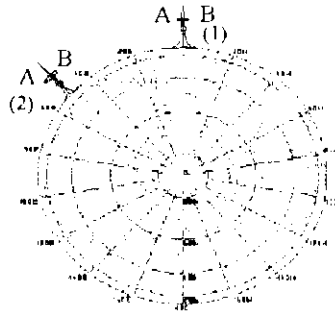


Figura 10.4b

Considerando che gli attriti non sono mai completamente trascurabili, gli anelli della sospensione cardanica tenderanno a trascinare in questo movimento di rotazione gli assi dei due giostati, esercitano un'azione che possiamo rappresentare con una coppia generata da una forza virtuale applicata sull'asse del rotore come è segnato nella figura 10.4a nella posizione (2) del giroscopio; nella situazione a sospensione cardanica fissa (figura 10.4b) la coppia è assorbita dalle vite di bloccaggio

È proprio nelle conseguenze di questa coppia deviatrice che risiede la differenza sostanziale fra il comportamento di un giroscopio a rotore fermo e quello di un giroscopio in movimento.

Il primo, infatti, seguirà docilmente l'impulso della coppia e verrà perciò trascinato dagli anelli della sospensione in maniera da non subire alcun spostamento relativo ad essa; esso rimarrà perciò sempre col suo asse orizzontale, come mostra la figura 10.4b, e apparirà immobile all'occhio dell'osservatore. Il secondo invece, reagirà alla coppia perturbatrice senza subire spostamento nel suo piano di appartenenza e muovendosi, invece, in un piano ad essa perpendicolare, come vedremo meglio fra poco. Questo movimento, caratteristico dei giroscopi in moto, si chiama movimento di precessione, e avviene con una velocità che si può rendere piccola quanto si vuole, scegliendo convenientemente le dimensioni, il peso e la velocità di rotazione del giroscopio come facil-

mente si può ottenere dalla prima equazione delle (10.A.16) nota come relazione fondamentale dei giroscopi:

$$C_{\alpha} = I\dot{\Omega}\dot{\gamma} \quad (10.1)$$

nella quale è stata considerata trascurabile l'azione della accelerazione $\ddot{\alpha}$. Se questi parametri sono tali che la velocità di precessione risulti tanto piccola da essere trascurabile, l'asse del giroscopio si manterrà praticamente parallelo a sé stesso nello spazio e apparirà all'occhio dell'osservatore sollevarsi con l'estremo $\dot{\Omega}$ dell'asse sull'orizzonte compiendo un giro completo nelle 24^h sideree.

L'asse del giroscopio in tale condizione presenta in tutte le direzioni una rigidità quasi assoluta finché le forze perturbatrici sono dell'ordine di grandezza degli attriti e della resistenza del mezzo; e solo in questo senso, e con queste restrizioni, può ritenersi giustificato quanto comunemente è detto, che, cioè, un giroscopio mantiene il suo asse costantemente parallelo a sé stesso nello spazio. In questo comportamento consiste la cosiddetta *inerzia giroscopica*, che permette di verificare l'esistenza della rotazione terrestre: ($C_{\alpha} = 0$ e $I\dot{\Omega} \neq 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$); infatti, se supponiamo nulli gli attriti e la resistenza del mezzo oppure supponiamo infinitamente piccola la reazione giroscopica nel piano perpendicolare alle forze perturbatrici, allora un giroscopio posto ad una generica latitudine ϕ , ed orientato con il suo asse di spin verso una stella fissa A manterrà durante una rotazione terrestre il suo orientamento; l'asse di rotazione descriverà una superficie conica di base $ADD'A$ mantenendo la sua distanza polare costante (vedi figura 10.5).

L'osservatore vedrà dunque, nel giro delle 24^h sideree, l'estremo Est dell'asse del giroscopio sollevarsi sull'orizzonte e, ruotando da levante verso ponente, raggiungere la sua massima inclinazione (uguale all'altezza meridiana) nel piano del meridiano, riabbassarsi poi verso ponente e passare sotto l'orizzonte per riprendere al termine delle 24^h sideree la posizione iniziale BA . Il giroscopio viene così a confermare il moto apparente diurno dei corpi celesti e la realtà della rotazione terrestre.

E' appunto mediante un giroscopio completamente libero, e soggetto solamente a forze passanti per il centro di gravità, che *Foucault* ha potuto dimostrare la rotazione terrestre. Egli misurò anzi con un microscopio l'angolo di cui l'asse giroscopico, puntato verso lo zenit a Bruxelles, ruotava in cinque minuti; essendo trascurabili in così breve intervallo di tempo, per una grande velocità di rotazione propria del giroscopio, gli spostamenti dovuti alle forze perturbatrici degli attriti e della resistenza dell'aria, egli poté ottenere in tal modo un valore sufficientemente approssimato della velocità angolare della rotazione terrestre.

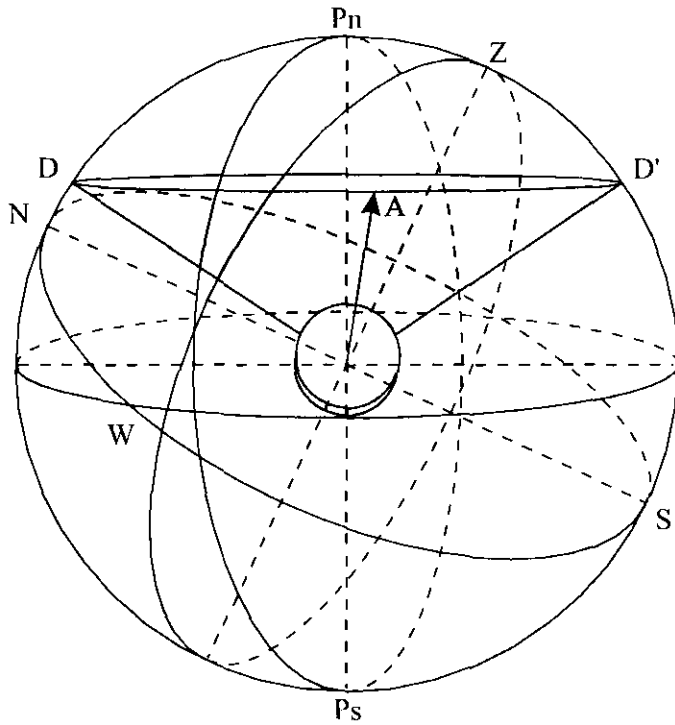


Figura 10.5 – Moto apparente dell'asse di spin

10.4 - Precessione giroscopica

È facile verificare sperimentalmente il fenomeno della precessione giroscopica, usando un giroscopio simile a quello riportato in figura 10.3 e schematizzato in figura 10.6 e 10.7; il rotore, sostenuto da una sospensione cardanica, è animato da un rapido movimento di rotazione intorno all'asse di velocità angolare Ω , di cui è visibile l'estremo A . Il senso della rotazione è indicato dalla freccia. Si applichi all'estremo A dell'asse un peso P alla distanza l ; ciò equivale ad applicare al rotore una coppia C_α orientata lungo l'asse OY che tende ad imprimere al rotore stesso un movimento intorno all'asse Y , una rotazione, cioè, secondo una direzione normale all'asse del rotore. Se questo non fosse in movimento, l'asse seguirebbe docilmente col suo asse l'impulso impressogli dal peso P . Per effetto, invece, della rapida rotazione da cui esso è animato, vedremo il suo asse porsi in movimento in un piano orizzontale (perpendicolare cioè alla direzione della forza P), nel senso indicato dalla freccia, in modo che tutta la sospensione ruoterà attorno all'asse Z . Se il peso p viene staccato, il movimento cessa immediatamente; se viene applicato all'altro estremo B dell'asse, il movimento ricomincia, ma, in senso opposto.

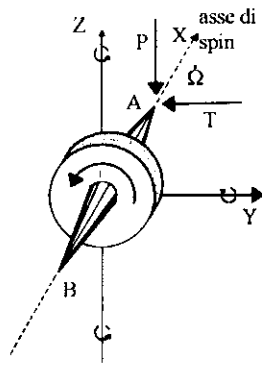


Figura 10.6 – Giroscopio a tre assi di libertà

Se, in modo schematico (vedi figura 10.7), rappresentiamo il rotore di un giroscopio perfettamente libero, che ruoti intorno all'asse OA con velocità $\dot{\Omega}$, e immaginiamo applicato ad punto P dell'asse distante l da O , una forza qualunque F ; essa genera una coppia deviatrice, il cui momento sarà il vettore C_α , condotto perpendicolarmente al piano contenete la forza e l'asse di spin $\dot{\Omega}$.

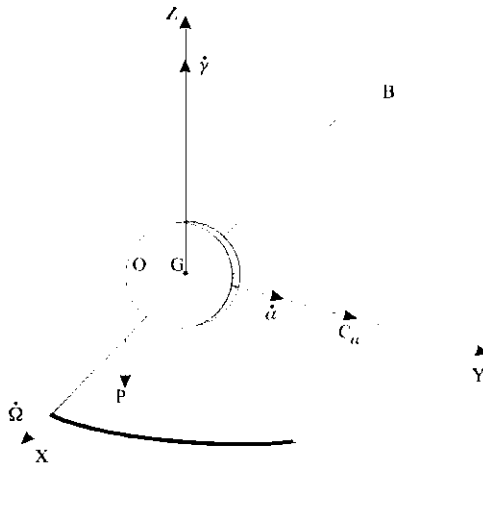


Figura 10.7 – Moto di precessione dell'asse di spin

Sotto l'azione di questa coppia, il giroscopio reagirà senza alcuno spostamento nel piano della coppia stessa, ma muovendo il proprio asse in un piano normale, con una velocità di rotazione $\dot{\gamma}$, tale da tendere a portare l'asse del giroscopio a coincidere col vettore rappresentativo della coppia deviatrice C_α . Questo movimento di rotazione, caratteristico dei corpi animati da rapidissima rotazione intorno all'asse, si chiama

movimento di *precessione*, e avviene secondo la direzione definita dalla seguente regola:

Disponendo la mano destra in modo che l'indice risulti parallelo alla rotazione del giroscopio $\dot{\Omega}$ e il pollice al vettore della coppia C_{α} , allora il dito medio, disposto normalmente al piano delle due dita precedenti, rappresenterà il vettore $\dot{\gamma}$ del movimento di precessione.



Figura 10.8 – Regola della mano destra

Reciprocamente: se un giroscopio, animato da una rotazione $\dot{\Omega}$ intorno al suo asse, è trascinato in un movimento di rotazione intorno a un asse perpendicolare, se, cioè, è sottoposto a una *precessione forzata* di velocità $\dot{\gamma}$, esso eserciterà sugli appoggi dell'asse una coppia di reazione uguale e contraria alla coppia esterna C_{α} che sarebbe capace di produrre la precessione $\dot{\gamma}$; il senso di azione della coppia risulta tale da portare l'asse del giroscopio a coincidere con l'asse della precessione forzata, e può essere subito definita con regola analoga alla precedente, sostituendo però la mano sinistra alla destra. Considerando contemporaneamente i due fenomeni, che sono l'uno reciproco dell'altro, si vede che la *coppia deviatrice* da una parte e la *precessione forzata* dall'altra, provocano un movimento tale che tende a far coincidere l'asse della rotazione propria $\dot{\Omega}$ con l'asse di rotazione della coppia C_{α} . Si ha dunque una *tendenza al parallelismo delle rotazioni*, proprietà caratteristica dei giroscopi, che fu enunciata per la prima volta da *Foucault*.

Se la coppia rimane costante in direzione, il movimento di precessione cesserà quando l'asse AB (v. figura 10.7) sarà venuto a coincidere con l'asse della coppia, poiché in tale posizione la coppia C_{α} non avrà più effetto deviante sull'asse del giroscopio, e tenderà solamente ad aumentare la velocità $\dot{\Omega}$ di rotazione propria; se la coppia si sposta continuamente, in modo da rimanere sempre perpendicolare all'asse del giroscopio, il moto di precessione continuerà indefinitamente con velocità uniforme $\dot{\gamma}$.

È questo il caso della figura 10.7 quando si applichi il peso p (F), o anche della figura 10.6, in cui la coppia deviatrice è costituita sempli-

cemente dal peso del giroscopio appoggiato sugli estremi dell'asse oppure dalla reazione R dell'appoggio (non indicata in figura 10.6); in questo caso il movimento di precessione continuerà finché continuerà la rotazione $\dot{\Omega}$ del giroscopio.

Come si dimostrerà in APPENDICE B, la velocità di precessione $\dot{\gamma}$ (10.B.5) e l'angolo γ (10.B.7) sono dati dalle equazioni:

$$\dot{\gamma} = \frac{C_{\alpha}}{I\dot{\Omega}} \quad (10.2)$$

$$\gamma = \frac{C_{\alpha}}{H}t - \frac{C_{\alpha}}{H} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (10.3)$$

in cui C_{α} rappresenta la coppia deviatrice, $\dot{\Omega}$ è la velocità di rotazione propria del giroscopio, I ed I_1 i momenti d'inerzia del rotore rispetto ai suoi asse e $\omega_0 = \frac{H}{I}$ la pulsazione del moto; si vede quindi, come detto

precedentemente, che, proporzionando convenientemente le caratteristiche di costruzione del giroscopio e la sua velocità di rotazione, si può, per piccole forze deviatrici, ottenere una velocità di precessione estremamente piccola, annullando anche il moto di nutazione e realizzare così per un tempo limitato una rigidità giroscopica.

10.5 - Esempi di giroscopi liberi – La trottola

Si può considerare (v. figura 10.9) come giroscopio completamente libero, sopprimendo il piano di appoggio e sostituendovi una forza R uguale e contraria al peso dell'apparecchio e applicata nel punto di appoggio O . Questa forza insieme con il peso p costituisce la coppia deviatrice C , il cui momento rimane sempre orizzontale e sempre normale all'asse della trottola. Si vedrà in conseguenza l'apparecchio soggetto ad un moto continuo di precessione tale che il suo asse descrive una superficie conica a base circolare intorno alla verticale passante per il punto di appoggio.

La velocità di precessione $\dot{\gamma}$ è indipendente dall'angolo di inclinazione della trottola rispetto alla verticale, e cresce al diminuire di $\dot{\Omega}$, cioè man mano che rallenta la rotazione propria della trottola; ciò che è facile verificare sperimentalmente. Il movimento di precessione avviene nello stesso senso del movimento di rotazione propria della trottola.

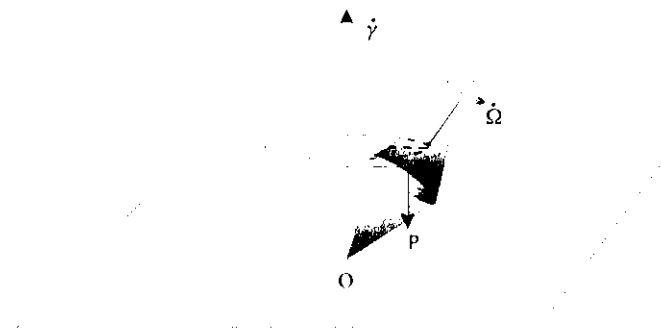


Figura 10.9 – Moto della trottola

10.6 – Moto di precessione e nutazione

I fenomeni giroscopici, che abbiamo descritto e in particolare il fatto che sotto l'azione di una forza deviatrice l'asse del rotore resiste e sfugge secondo una direzione perpendicolare ad essa, appaiono in contraddizione con i principi fondamentali della meccanica. Da una parte, infatti, il punto di applicazione della forza non si sposta nella direzione della forza stessa, per cui non sembra che si sia speso un lavoro per produrre il movimento di precessione; dall'altra è stata necessaria l'applicazione continua di una forza per creare un movimento uniforme. Tutto ciò è però solamente in apparenza paradossale: l'asse del giroscopio si sposta realmente un poco nel piano della coppia deviatrice e il movimento di precessione è solo apparentemente uniforme.



Figura 10.10 – Composizione del moto di precessione e nutazione

Un'osservazione accurata del fenomeno permette, infatti, di riconoscere che il percorso dell'estremo dell'asse non è regolare, ma è decomponibile in una rapida successione di piccolissimi festoni quasi invisibili e percepibili a livello di vibrazioni nelle figura 10.7 e 10.8. L'estremo dell'asse descrive in realtà una curva del tipo di quella rappresentata grossolanamente nella figura 10.10. Al movimento di precessione si sovrappone dunque un movimento di oscillazione, che avviene nel piano di azione della coppia deviatrice e rappresenta il moto di *nutazione*. La figura 10.10 riporta il moto risultante della combinazione del moto di precessione con quello di nutazione. Le equazione che esprime il moto di nutazione sono:

$$\alpha = -\frac{C_a}{H} \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (10.4)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{C_a}{H} \sin \omega_0 t \quad (10.5)$$

e che sono state ricavate in APPENDICE B.

Il movimento di precessione e nutazione dell'asse del giroscopio si compone dunque, in sostanza, di successive piccole cadute nel piano della coppia perturbatrice con successivi rapidi rialzamenti nello stesso piano combinati con spostamenti in un piano perpendicolare. Questi due moti sono simili al moto di precessione e nutazione astronomica della Terra in rotazione attorno all'asse terrestre.

Facciamo un esempio numerico per fissare le idee sulla grandezza di questi movimenti di precessione e nutazione. Consideriamo un giroscopio, come quello della figura 10.3, che pesi complessivamente 200 grammi; il rotore abbia un peso di 170 grammi, un raggio di 28 mm. e una velocità di rotazione di 120 giri al secondo. Introducendo questi dati nella formula fondamentale (10.2) si trova che il giroscopio, sottoposto all'azione perturbatrice del peso, viene ad avere un moto orizzontale di precessione tale da compiere un giro completo in 8,05 secondi. Per il moto di nutazione, l'estremo libero dell'asse, che dista 8 cm dall'estremo appoggiato, descrive dei festoni dell'ampiezza di 0,047 cm in un periodo di 0,0238 secondi (10.5). In un giro completo di precessione dunque l'asse descrive 338 festoni di circa mezzo millimetro di ampiezza; e, per il noto fenomeno della persistenza delle immagini, l'osservatore avrà l'impressione di un movimento uniforme affetto da un leggero tremolio.

Osserviamo infine che, se si impedisce in qualche maniera all'asse di muoversi nel piano della precessione giroscopica, esso non offre più alcuna resistenza a seguire l'impulso della coppia deviatrice e si comporta esattamente come un giroscopio a rotore fermo.

Supponiamo, per esempio, nel giroscopio rappresentato in figura 10.3, di stringere la vite di pressione D in modo da fissare il cerchio Q e impedirgli ogni rotazione intorno ad un asse verticale; sotto l'azione del peso p , l'asse del giroscopio non può reagire con moto di precessione orizzontale, e quindi non può svilupparsi la coppia, uguale e contraria al peso per sostenere l'asse in posizione orizzontale. Si vedrà perciò questo asse cadere subito in basso, seguendo l'azione del peso, proprio come se il rotore fosse completamente fermo.

10.7 – Fenomeni direttivi del giroscopio

Un giroscopio a tre gradi di libertà serve ottimamente a dimostrare la rotazione della Terra e a rilevare i fondamentali fenomeni giroscopici;

un tale strumento non può evidentemente servire come bussola, perché esso indica soltanto, quando sono trascurabili gli attriti, una direzione fissa nello spazio (riferimento inerziale) ma non fissa rispetto alla Terra.

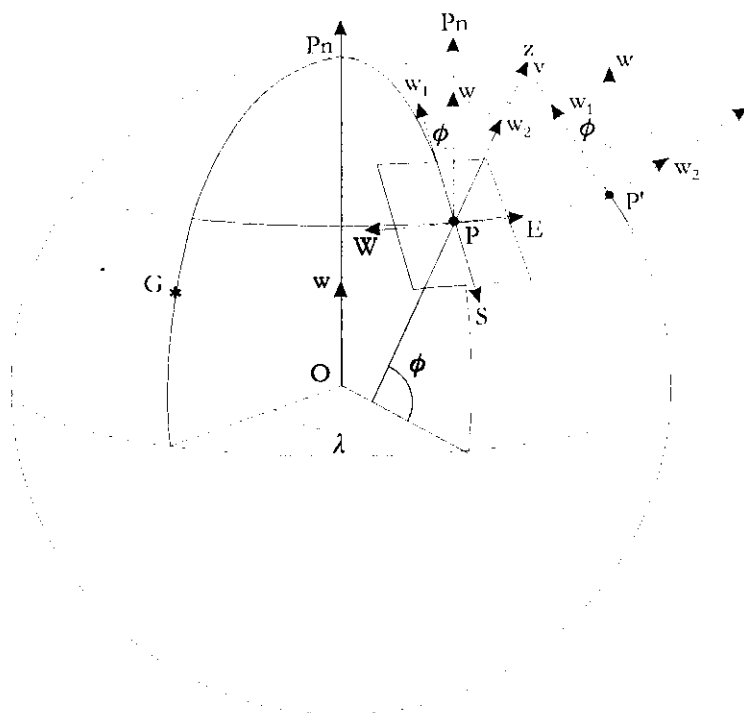


Figura 10.11 – Scomposizione della rotazione terrestre

Perché un giroscopio indica una direzione fissa rispetto alla Terra, perché insomma si manifestano i fenomeni direttivi giroscopici, è necessario che l'asse del rotore non abbia tre gradi di libertà, ma sia vincolato ad un piano orizzontale od ad uno verticale, piani che sono trascinati dalla Terra nel suo movimento di rotazione diurna. Studiamo separatamente i due casi:

- asse del giroscopio $\dot{\Omega}$ vincolato al piano orizzontale;
- asse del giroscopio $\dot{\Omega}$ vincolato al piano verticale.

fermandoci particolarmente su quest'ultimo, che costituisce il principio fondamentale della girobussola.

Iniziamo esaminando l'effetto della rotazione terrestre sul giroscopio in un luogo qualunque di latitudine ϕ .

10.7.1 – Rotazione della Terra

La rotazione diurna terrestre, che avviene nel senso diretto, può essere rappresentata da un vettore w (v. figura 10.11) diretto verso nord e di grandezza proporzionale alla velocità angolare della rotazione stessa, che è $w=15''/s$, pari a $0,000072 \text{ rad/s}$.

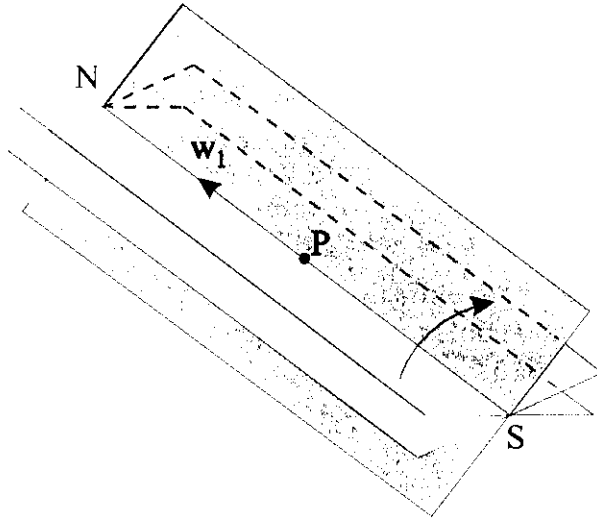


Figura 10.12 – Rotazione del piano orizzontale attorno alla linea N-S

Consideriamo un osservatore nel punto $P \equiv O$ (baricentro del giroscopio coincidente con il centro di rotazione) di latitudine ϕ ; (v. figura 10.11); la rotazione terrestre genera in questo punto una traslazione e una rotazione uguale e parallela a quella applicata al centro della Terra. La traslazione non ci interessa poiché non ha alcun effetto deviante, e quindi non ha influenza sui fenomeni giroscopici e noi la trascuriamo, come già abbiamo trascurato la traslazione dovuta al movimento di rivoluzione annua della Terra intorno al Sole.

La rotazione w , trasportata nel punto P , può essere decomposta nelle sue componenti lungo la verticale e sul piano orizzontale; nella figura 2.11, per facilitare il lettore, è stato rappresentato sia l'orizzonte in sezione meridiana (punto P) sia l'orizzonte nel punto P di latitudine ϕ .

La rotazione della Terra è scomposta nelle due direzioni principali: la linea meridiana e la direzione della verticale. Si ricava facilmente che la rotazione della Terra è esprimibile nei due seguenti vettori:

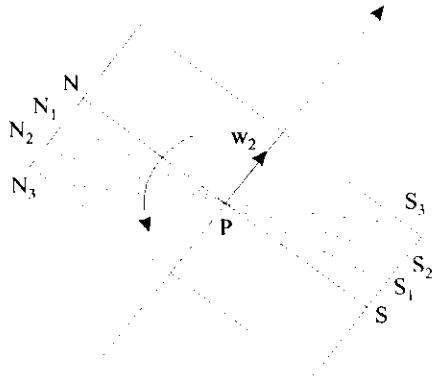


Figura 10.13 – Rotazione del piano orizzontale attorno alla verticale

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = |w| \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}$$

Per effetto della componente

$$w_1 = w \cos\phi \quad (10.6)$$

il piano dell'orizzonte ruota intorno alla traccia *NS* del meridiano nel senso retrogrado, come mostra la figura 10.12, tale che la metà orientale dell'orizzonte va continuamente deprimendosi, mentre la metà occidentale si solleva; la velocità di questo movimento è tale che l'orizzonte compie un giro completo in 24^h sideree. Per effetto della seconda componente

$$w_2 = w \sin\phi \quad (10.7)$$

tutti i piani verticali passanti per *O* ruotano nel senso diretto in modo da compiere un giro completo della Terra. In particolare, la figura. 10.13 mostra questa rotazione del piano del meridiano per mezzo della rotazione nello stesso senso della traccia *NS* del piano stesso sul piano dell'orizzonte. Questa traccia passerà successivamente dalla posizione *N-S* alle posizioni *N₁-S₁*, *N₂-S₂*, *N₃-S₃* ecc. fino a ritornare, dopo 24^h sideree, nella posizione iniziale *N-S*.

Queste due componenti hanno differente grandezza a seconda della latitudine dell'osservatore; la w_1 è sempre diretta verso Nord, mentre la w_2 è diretta verso lo Zenit nell'emisfero Nord, e verso il Nadir nello emisfero Sud. All'equatore la componente w_2 si annulla, la traccia del meridiano non ha alcun movimento di rotazione sul piano dell'orizzonte. Al polo invece si annulla la componente w_1 e quindi non si ha il mo-

vimento di depressione dell'orizzonte verso levante e di sollevamento verso ponente.

10.7.2 - Giroscopio vincolato al piano orizzontale

Supponiamo ora (v. figura 10.14) di mettere un giroscopio col centro nel punto O , e con l'asse disposto orizzontalmente e prossimo alla direzione Est-Ovest. Fissiamo poi uno degli snodi della sospensione cardanica (v. figura 10.13) in modo che l'asse del giroscopio possa muoversi liberamente nel piano orizzontale, ma non possa uscirne per nessuna ragione. Esso sarà perciò costretto a seguire tutti i movimenti che il piano orizzontale subisce per effetto della rotazione terrestre. Abbiamo visto che questi movimenti sono le due rotazioni, w_1 intorno alla traccia del meridiano e w_2 intorno alla verticale Z passante per O . Per effetto della w_2 l'asse di spin $\dot{\Omega}$, inizialmente orientato per Est-Ovest, apparirà muoversi nel senso retrogrado con velocità tale da compiere un giro completo nelle 24^h sideree. In realtà non è l'asse del giroscopio che si muove ma è la traccia del meridiano che ruota in senso opposto per effetto della w_2 ; l'asse giroscopico rivela questo movimento perché tende a mantenere fissa la sua direzione nello spazio. La rotazione dell'orizzonte non ha alcun effetto deviante sull'asse del giroscopio poiché questo non incontra difficoltà a muoversi sul piano orizzontale.

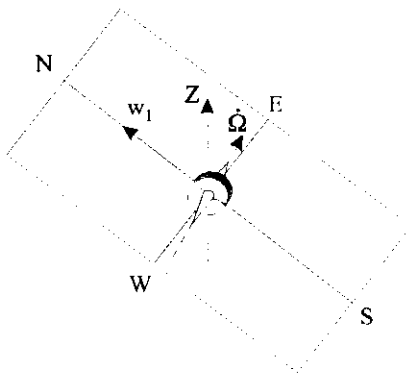


Figura 10.14 - Giroscopio vincolato al piano orizzontale

Per effetto della rotazione w_1 , invece, l'asse di spin $\dot{\Omega}$ è costretto a seguire il movimento di depressione dell'orizzonte verso levante e di sollevamento verso ponente; esso è soggetto quindi ad una precessione forzata di velocità (10.06):

$$w_1 = w \cos \phi$$

ma, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, una precessione forzata w_1 , che trascina l'asse di un giroscopio, genera una coppia di reazione girostatica di momento

$$C_\alpha = I\dot{\Omega}w_1 \quad (10.8)$$

in cui $\dot{\Omega}$ è la velocità di rotazione del giroscopio e I il momento d'inerzia del rotore rispetto all'asse; la (10.8) è definita dalla regola delle tre dita della mano sinistra.

Per effetto della componente w_1 della rotazione terrestre, si manifesterà dunque nel giroscopio una coppia di reazione girostatica

$$C_\alpha = I\dot{\Omega}w\cos\phi$$

il cui momento, con la regola citata (mano sinistra), risulta diretto lungo la verticale, e precisamente verso il Nadir, se la rotazione $\dot{\Omega}$ del giroscopio avviene nel senso indicato dalla freccia nella figura 10.15a, verso lo Zenit se la rotazione avviene nel senso contrario (vedi figura 10.15b).

In ogni caso la coppia tende a portare verso Nord il vettore che rappresenta la velocità $\dot{\Omega}$ del rotore, tende, cioè, a rendere parallele la rotazione $\dot{\Omega}$ e la componente orizzontale della rotazione terrestre; l'equazione che esprime questo moto è data dalla (10.D.4) e qui di seguito riportata:

$$\ddot{\gamma} = -\frac{H}{I_1}\gamma w_1 \quad (10.9)$$

per un dato verso di rotazione del rotore, l'estremo dell'asse che si rivolge a Nord è sempre lo stesso, come se in esso si fosse destata una polarità analoga a quella Nord dell'ago magnetico.

Ritroviamo così anche in questo fenomeno il principio fondamentale del parallelismo delle rotazioni. L'asse del giroscopio deve necessariamente seguire il movimento impressogli dalla coppia C_α di reazione girostatica, non potendo reagire con un moto di precessione in un piano ad essa normale, cioè verticale poiché non ha in esso alcuna libertà di movimento.



Figura 10.15 – Precessione dell'asse di spin

Nel caso della figura 10.15a, dunque, si vedrà l'estremo dell'asse di spin $\dot{\Omega}$, mettersi in moto da Ovest verso Nord, raggiungendo, e oltrepassando poi, la traccia del meridiano. Durante il movimento dell'asse verso il Nord, la coppia C_α non si mantiene costante in grandezza.

Quando l'asse di spin $\dot{\Omega}$ arriva sulla linea meridiana, per inerzia la sorpassa fino a raggiungere un valore compreso fra Nord ed Est; in questa fase la coppia C_α cambia di segno e tenderà di portare l'asse di spin $\dot{\Omega}$ di nuovo verso il meridiano (*moto pendolare*).

Quando l'asse del giroscopio fa col meridiano l'angolo γ , invece dell'angolo di 90° , la precessione forzata nel piano verticale ha una velocità non più uguale all'intera w_l ma solo alla proiezione w_l sull'asse (v. figura 10.15b).

In ogni istante coppia C_α avrà l'espressione generale:

$$C_\alpha = I\dot{\Omega}w\cos\phi\sin\gamma$$

che può anche scriversi, per γ piccolo, nel seguente modo:

$$C_\alpha = I\dot{\Omega}w\gamma\cos\phi \quad (10.10)$$

la quale si annulla per $\gamma=0$, quando cioè l'asse del giroscopio avrà raggiunto il meridiano. Ciò è evidente, perché l'asse di spin in meridiano coincide con la direzione della componente w_l che non produce alcun effetto deviante su di esso e quindi cessare il movimento di precessione forzata nel piano verticale; ma il moto orizzontale dell'asse non si arresta poiché per inerzia l'asse di spin $\dot{\Omega}$ oltrepasserà il meridiano e si manifesterà di nuovo la coppia C_α ; questa sarà ora evidentemente diretta

in senso contrario alla precedente, cioè nel senso di portare nuovamente l'asse verso il meridiano. La coppia C_α è dunque una vera e propria *coppia direttiva* del giroscopio del tutto analoga alla coppia direttiva magnetica che orienta l'ago di una bussola ordinaria, con la sola differenza che essa dirige l'asse del giroscopio verso il meridiano vero, anziché verso il meridiano magnetico. Sotto l'azione di questa coppia l'asse del giroscopio compirà una serie di oscillazioni intorno alla traccia del meridiano, oscillazioni che teoricamente durerebbero indefinitamente, ma che in pratica verranno a poco a poco smorzate dagli inevitabili attriti e dalla resistenza del mezzo. In definitiva l'asse del giroscopio rimarrà in equilibrio nel piano del meridiano vero; né si scosterebbe più da tale direzione se non intervenisse l'altra componente della rotazione terrestre ad allontanarlo dal meridiano.

La componente w_2 , che giace lungo la verticale, ha infatti, come abbiamo visto, l'effetto di far ruotare la traccia $N - S$ del meridiano (v. figura 10.14) nel piano orizzontale e nel senso diretto, allontanandola quindi continuamente dalla posizione di equilibrio dell'asse del giroscopio. Ma appena questo si trova fuori dal piano del meridiano, si manifesta nuovamente la coppia direttrice che riporta l'asse verso il Nord. In definitiva si può dire che l'asse di spin Ω ha un moto pendolare che si annulla, a causa degli attriti, dopo un tempo lunghissimo.

Lo studio fisico matematico che permette di trovare l'equazione di questo moto pendolare è riportato nel paragrafo 10.D.1.2 (rel. 10.D.7) dell'APPENDICE D e le cui relazioni principali sono qui di seguito riportate:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 \cos \omega_0 t \\ \dot{\gamma} &= -\gamma_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{I w_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{I w \cos \phi}}$$

si capisce quindi come un giroscopio, vincolato ad un piano orizzontale, possa indicare la direzione del meridiano vero, cioè servire potenzialmente come bussola quando però si annulla il moto pendolare attorno alla linea meridiana.

Anche questo importante fenomeno fu scoperto da *Foucault* nel corso delle sue memorabili esperienze verso la metà del secolo scorso. Egli usava un giroscopio portato da una sospensione cardanica, di cui un anello era verticale e l'altro fissato in posizione esattamente perpendicolare al precedente: il giroscopio poteva così ruotare intorno ad un asse

verticale, ma non intorno ad un asse orizzontale. Messo il rotore in movimento rapido intorno al suo asse, si vedeva questo, dopo un certo numero di oscillazioni, presto smorzate dalle resistenze passive, di orientarsi per meridiano e mantenersi secondo tale orientamento. In realtà il giroscopio rudimentale di *Foucault* non si orientava con grande esattezza, poiché la coppia direttiva era piccola e bastavano piccole resistenze ad ostacolarne il movimento. D'altra parte la resistenza dell'aria riduceva presto notevolmente la velocità di rotazione propria del giroscopio, rendendo ancora più piccola la forza di orientamento.

10.7.3 - Giroscopio vincolato al piano del meridiano

In una seconda esperienza, *Foucault* rese libero l'anello orizzontale e fissò invece l'anello verticale della sospensione cardanica del suo giroscopio nella direzione del meridiano locale. Egli osservò allora che l'asse del rotore, dopo una serie di oscillazioni, finiva per disporsi inclinato sull'orizzonte di un angolo uguale alla latitudine del luogo, e sempre con lo stesso estremo verso l'alto.

Vediamo come si spiega quest'altro fenomeno direttivo; consideriamo (v. figura 10.16) un giroscopio col centro nel punto O di latitudine ϕ , ed animato da una rotazione di velocità $\dot{\Omega}$ nel seno indicato dalla freccia nella figura. Supponiamo che il suo asse possa liberamente muoversi nel piano del meridiano, senza però poterne uscire per nessuna ragione e sia inizialmente disposto secondo una direzione qualunque e che faccia l'angolo γ con l'orizzonte. Decomponiamo la rotazione terrestre w nelle due componenti w'_1 e w'_2 lungo l'asse del rotore e normalmente all'asse stesso: la componente $w'_1 = w \cos(\phi - \gamma)$ non ha effetto deviatore sull'asse, mentre la componente $w'_2 = w \sin(\phi - \gamma)$ facendo ruotare il piano del meridiano nel senso diretto, imprime al giroscopio un movimento di precessione forzata di velocità w'_2 , che genera la seguente coppia di reazione girostatica (10.12); questa coppia ha, per la regola delle tre dita (mano sinistra) il suo momento diretto normalmente al piano del meridiano, e verso l'avanti della figura, dato il senso della rotazione $\dot{\Omega}$ del giroscopio; in ogni caso esso risulta diretto in maniera da portare a coincidere il vettore $\dot{\Omega}$ della rotazione propria del giroscopio con il vettore w della rotazione terrestre confermando ancora una volta il principio fondamentale del parallelismo delle rotazioni.

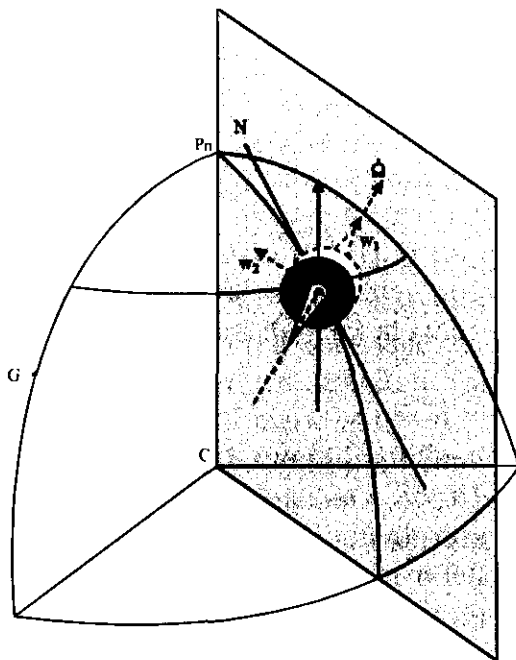


Figura 10.16 –Giroscopio vincolato al piano meridiano

$$C_{\alpha} = I\Omega w \sin(\phi - \gamma) \quad (10.12)$$

La coppia C si annulla, cioè l'asse del giroscopio si troverà in equilibrio quando $\gamma = \phi$ cioè quando tale asse risulterà parallelo all'asse polare; ciò che del resto è evidente poiché in tali condizioni la rotazione terrestre non ha alcun effetto deviante sull'asse del giroscopio. Il valore massimo della coppia direttiva si ha quando l'asse del rotore è parallelo all'equatore, ed è dato da $C = I\Omega w$; esso è cioè indipendente dalla latitudine del luogo. Tranne questa differenza, un giroscopio vincolato al piano del meridiano si comporta esattamente come una bussola d'inclinazione magnetica, e può servire ad indicare la latitudine del luogo.

10.7.4 - Giroscopio sospeso

La scoperta di *Foucault* interessò vivamente il mondo scientifico; si pensò subito di applicare i principi delle sue esperienze per ottenere la direzione del Nord senza ricorrere all'ago magnetico. Il vantaggio di questa sostituzione si manifestò ancora più apprezzabile quando la costruzione delle navi in ferro e l'estensione delle applicazioni elettriche a bordo resero sempre più difficile il problema di una buona installazione

della bussola magnetica, e quando di conseguenza le grandi deviazioni e la loro instabilità vennero a scuotere la fiducia dei naviganti nei vecchi strumenti per l'orientamento della nave.

Un giroscopio vincolato ad un piano orizzontale, come nella prima esperienza di *Foucault*, risolveva senz'altro il problema a Terra; ma, trasportato a bordo, risultava inservibile per l'incertezza con cui su una nave si poteva ottenere un piano esattamente orizzontale e per i molti movimenti estranei che influenzavano l'apparecchio, come il rollio, il beccheggio, le accostate, i cambiamenti di velocità, ecc.

Per qualche tempo si è rinunciato a risolvere il problema, che presentava difficoltà apparentemente insormontabili; esso fu ripreso solo molti anni più tardi, superando la principale difficoltà del piano orizzontale a bordo col vincolare il giroscopio non ad un piano, ma ad una direzione: alla direzione della verticale. Il grado di libertà del giroscopio in tal caso è solo apparentemente uguale a tre, perché, essendo sospeso come un pendolo, esso è sollecitato a disporsi continuamente secondo la verticale, cioè col suo asse nel piano

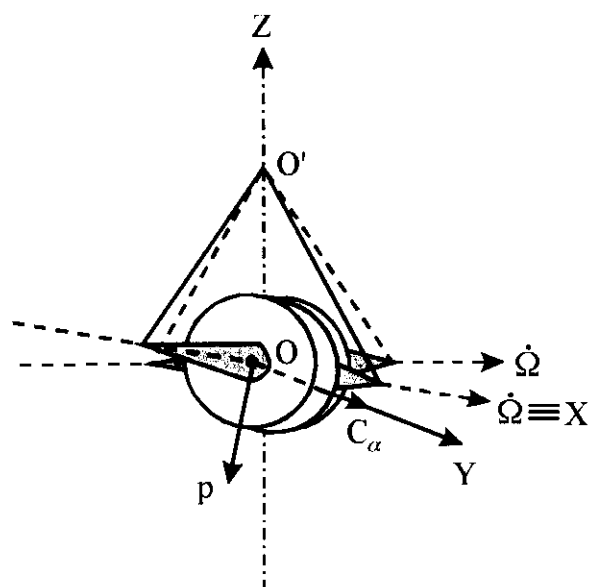


Figura 10.17 – Giroscopio sospeso

orizzontale. Con questo artificio si sono ottenuti dei buonissimi risultati, che hanno permesso l'installazione e l'impiego pratico delle bussole giroscopiche a bordo.

Consideriamo il giroscopio di figura 10.17 sospeso nel punto $G \equiv O$, libero di ruotare senza attrito intorno a questo punto, e con l'asse di spin orientato per $E - W$.

Riprendendo la decomposizione della rotazione terrestre nelle sue due componenti sull'orizzonte (10.6) e lungo la verticale (10.7) osserviamo che la componente w_2 , non ha alcun effetto deviante sull'asse del giroscopio. Ma nemmeno la componente w_1 sembrerebbe in questo caso avere effetto deviante, poiché l'asse non è rigidamente vincolato al piano dell'orizzonte, e quindi non è trascinato da questo nel suo movimento di depressione verso levante, come invece avveniva nella classica prima esperienza di *Foucault*.

Un esame più attento del fenomeno mostra facilmente che la differenza fra i due casi non è sostanziale, ma soltanto apparente e formale. L'asse del giroscopio sospeso può, infatti, muoversi nel piano verticale, ma, non appena l'orizzonte, per effetto della componente w_1 è passato dalla posizione $E - W$ alla posizione $E' - W'$, per cui l'estremo dell'asse sembrerà essersi sollevato sull'orizzonte, la direzione del peso p della massa rotante, che sarà normale alla nuova posizione dell'orizzonte, non passerà più per il punto O , e creerà con la reazione del punto di sospensione una coppia $C_a = pl \sin \alpha \cong pl \alpha$ che tenderà a portare l'asse del giroscopio nel nuovo piano orizzontale. In sostanza dunque, anche in questo caso, come nell'esperienza di *Foucault*, l'asse del giroscopio è costretto a seguire il movimento di rotazione dell'orizzonte intorno alla traccia $N - S$, ed è perciò trascinato in un movimento di precessione forzata intorno alla traccia stessa. La differenza consiste nel fatto, che, nell'esperienza di *Foucault* l'orizzonte trascina rigidamente con sé l'asse del giroscopio che ad esso è vincolato, nel caso del giroscopio sospeso, il trascinamento avviene per così dire elasticamente, con minore rigidità e con l'intermediario della coppia costituita dal peso e dalla reazione della sospensione.

L'esperienza di *Foucault* si può far rientrare nel caso più generale del giroscopio sospeso, supponendo che la massa rotante abbia un peso infinitamente grande, e che quindi debba seguire senza ritardo il movimento di rotazione dell'orizzonte.

Il comportamento del giroscopio sospeso (v. figura 10.18) è quindi sostanzialmente simile a quello del giroscopio vincolato al piano orizzontale. Del resto la sua direttività verso Nord risulta evidente anche indipendentemente da tale similitudine, poiché si capisce come, sotto l'azione della coppia pl , formata dal peso e dalla reazione di sospensione, l'asse del giroscopio debba muoversi con moto di precessione nel piano orizzontale; ed è facile vedere, col la regola delle tre dita (mano destra),

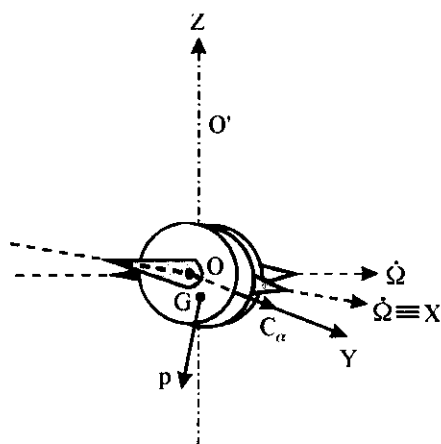


Figura 10.18 – Giroscopio zavorrato

che questo movimento deve avvenire in modo da portare verso il Nord quell'estremo dell'asse per cui il vettore della rotazione propria del giroscopio risulti coincidente con il vettore della componente orizzontale w_l della rotazione terrestre.

Nelle apparenze vi è però una notevole differenza fra il comportamento del giroscopio vincolato e quello del giroscopio sospeso; mentre, infatti, il primo si orienta in meridiano, rimanendo sempre rigorosamente orizzontale, l'asse del secondo si solleva e si abbassa di quantità più o meno grande, rispetto al piano dell'orizzonte, descrivendo con il suo estremo una curva che, proiettata su un piano verticale, risulta una ellisse il cui asse maggiore è parallelo al piano orizzontale.

10.8 - Movimento dell'asse giroscopico

Abbiamo visto come, per effetto della componente w_l della rotazione terrestre, si manifesta nel giroscopio sospeso una coppia deviatrice che genera il movimento di precessione dell'asse giroscopico verso il meridiano; questo movimento deve avvenire, per i principi fondamentali del fenomeno della precessione, in un piano normale a quello in cui agisce la coppia e quindi in un piano orizzontale, poiché essa, costituita dal peso e dalla reazione di sospensione, giace certamente in un piano verticale.

L'asse del giroscopio sospeso non uscirebbe dunque dal piano orizzontale nell'orientarsi verso il meridiano se, durante questo movimento, la direzione dell'orizzonte, e quindi anche quella del peso, rimanessero invariate. In realtà invece, per effetto della rotazione terrestre, l'orizzonte cambia continuamente di posizione nello spazio, per cui in ogni

istante cambia la direzione del peso, e quindi la direzione del piano in cui avviene il movimento di precessione.

Se vogliamo ricavare quale sia il movimento apparente relativo dell'asse giroscopico rispetto all'orizzonte e quale sia la linea che l'asse stesso traccerebbe con uno dei suoi estremi (per esempio, l'estremo che si orienta verso Nord) su una superficie sferica di centro coincidente con il centro del giroscopio (v. figura 10.19), dobbiamo idealmente fermare l'orizzonte ed attribuire al giroscopio un movimento apparente uguale e contrario a quello che l'orizzonte subisce realmente per effetto della rotazione terrestre.

Ma abbiamo già che questo movimento apparente, uguale e contrario a quello reale della rotazione terrestre, è tale che l'asse del giroscopio, rimanendo costantemente orientato verso lo stesso punto della sfera celeste, descrive nelle 24^h sideree nel senso retrogrado, il parallelo della sfera che passa per quel punto.

Per avere dunque il movimento relativo dell'asse giroscopico rispetto all'orizzonte, dobbiamo comporre i due movimenti a cui l'asse è soggetto:

- un movimento reale di precessione verso il Nord secondo un piano orizzontale;
- un movimento apparente nel senso retrogrado lungo un parallelo della sfera celeste.

Per questa composizione dei due movimenti, consideriamo anzitutto il caso del giroscopio sospeso all'equatore (v. figura 10.19), con l'asse inizialmente diretto secondo una qualunque direzione e descriviamo, col centro nel centro di gravità del rotore, una sfera rappresentativa di raggio arbitrario, nella quale segneremo l'asse polare e la direzione della verticale Z .

L'estremo dell'asse giroscopico (cioè l'estremo che si orienta verso Nord) è dunque soggetto a due movimenti: uno reale lungo l'orizzonte e nel senso diretto, ed uno apparente lungo il parallelo $ACA'C'$ e nel senso retrogrado (per chi guardi dal polo Nord verso l'equatore). Nel primo momento anzi, esisterà solo questo movimento apparente, poiché l'asse si trova inizialmente orizzontale, e quindi la coppia raddrizzante del peso non si è ancora destata; l'estremo dell'asse $\dot{\Omega}$ si solleverà quindi sullo orizzonte lungo il parallelo AC , cioè in direzione sensibilmente verticale. Ma appena ha percorso un piccolo tratto di questo parallelo, viene a manifestarsi la coppia raddrizzante dovuta al peso, e si genera il moto reale di precessione orizzontale, che porta l'asse di spin $\dot{\Omega}$ verso il Nord.

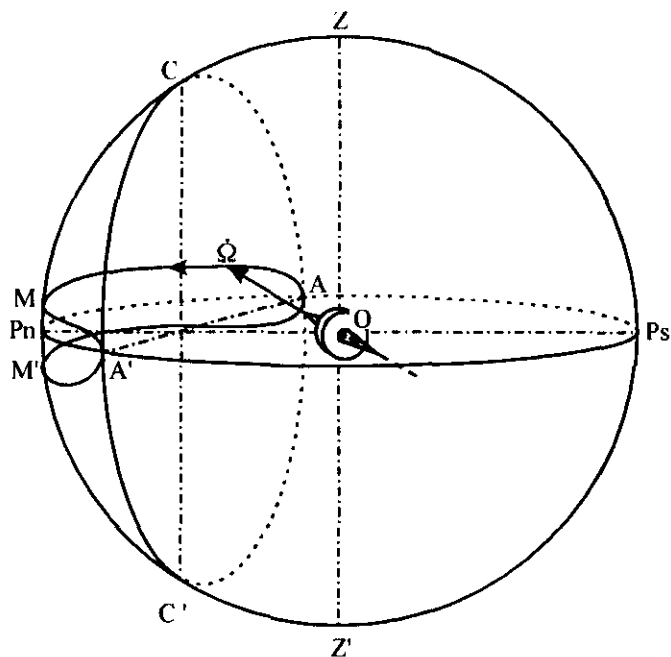


Figura 10.19 - Giroscopio sospeso all'equatore

Continua intanto il movimento apparente, ma naturalmente non più lungo il parallelo $ACA'C'$, bensì secondo un altro parallelo più vicino al polo, e quindi con velocità minore. Man mano dunque che l'asse del giroscopio si orienta verso il Nord, la velocità del moto apparente va progressivamente diminuendo, raggiungendo un minimo quando l'asse è giunto al meridiano. La velocità di precessione orizzontale va invece, nello stesso intervallo di tempo, continuamente aumentando, poiché cresce continuamente l'inclinazione dell'asse giroscopico sull'orizzonte.

Si capisce quindi che il percorso dell'estremo dell'asse di spin $\dot{\Omega}$, iniziatosi in direzione quasi verticale, debba man mano incurvarsi verso l'orizzonte; è facile vedere che esso diventerà orizzontale quando l'asse del giroscopio avrà raggiunto la sua massima inclinazione sull'orizzonte, quando esso sarà arrivato nel piano meridiano. Finché infatti l'estremo $\dot{\Omega}$ è a levante del meridiano, il movimento apparente lungo il parallelo ha sempre una componente verticale, per cui l'inclinazione dell'asse cresce continuamente; soltanto quando l'estremo dell'asse è giunto in M , il segmento di parallelo che dovrebbe descrivere risulta tangente all'orizzonte, e quindi senza alcuna componente verticale. Quando poi l'estremo $\dot{\Omega}$ è passato a ponente del meridiano, il movimento apparente lungo il parallelo avviene nel senso di abbassare l'asse e quindi diminuire la sua inclinazione.

E' evidente dunque che l'asse raggiunge la sua massima inclinazione nel piano del meridiano; in tale posizione la coppia raddrizzante è massima ed è massima la velocità della precessione orizzontale; l'asse dunque non si fermerà in tale posizione, ma proseguirà verso ponente.

In questo cammino verso ponente, il percorso dell'estremo $\dot{\Omega}$ è evidentemente diretto verso il basso, poiché il moto apparente dell'asse avviene sempre nel senso retrogrado. L'inclinazione dell'asse va dunque continuamente diminuendo, e con essa la velocità di precessione orizzontale; d'altra parte, allontanandosi l'asse dal meridiano, aumenta sempre di più la velocità del moto apparente di depressione.

Le fasi di questo movimento sono assolutamente simili a quelle del movimento a levante del meridiano, finché si ritengano trascurabili gli attriti e la resistenza del mezzo. Nel suo percorso l'estremo A raggiungerà dunque l'orizzonte in un punto A' , simmetrico di A rispetto al meridiano; e lo raggiungerà con velocità solamente verticale, poiché l'annullamento dell'inclinazione fa sparire la coppia raddrizzante e quindi anche il movimento di precessione orizzontale.

Sull'estremo A , l'asse di spin $\dot{\Omega}$ non si può fermare sull'orizzonte, ma deve proseguire il suo percorso al di sotto di esso percorrendo un primo breve tratto quasi verticale ed avviandosi poi verso una direzione sempre più prossima all'orizzonte, non appena si sarà nuovamente manifestata la coppia raddrizzante e quindi il moto di precessione. Questo moto riporterà nuovamente l'estremo $\dot{\Omega}$ verso il Nord, e la traiettoria descritta da questo estremo ripeterà, al disotto dell'orizzonte, le stesse fasi del precedente moto sopra l'orizzonte. Si avrà così un'inclinazione massima negativa OM' , e l'asse oltrepasserà di nuovo il meridiano con la massima velocità orizzontale raggiungendo nuovamente l'orizzonte nel punto di partenza A .

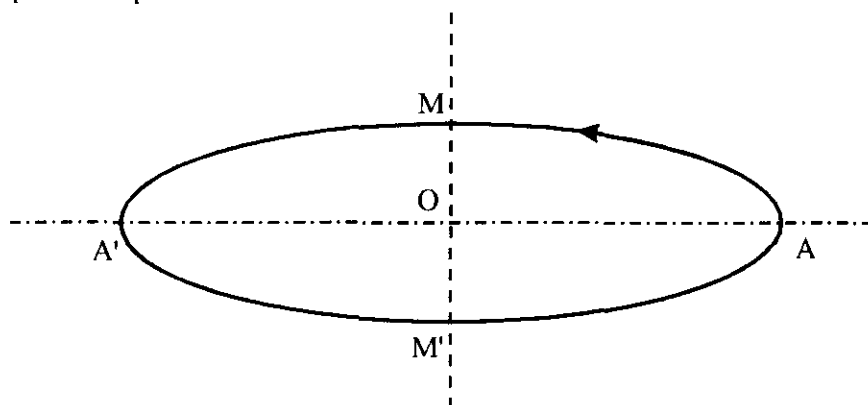


Figura 10.20 - Ellisse di precessione ($\phi = 0$)

Raccogliendo la traccia, che lascerebbe l'estremo dell'asse $\dot{\Omega}$ su di una superficie cilindrica tangente alla sfera rappresentativa lungo l'orizzonte e sviluppata poi in piano, si avrebbe una traiettoria a forma di ellisse, come quella segnata nella figura 10.20. La grandezza dell'asse maggiore AA' dipende dalla posizione iniziale dell'asse di spin $\dot{\Omega}$ che aveva il giroscopio quando è stato messo in movimento; la grandezza dell'asse minore MM' dipende, oltre che da questa stessa posizione iniziale, anche dagli elementi caratteristici del giroscopio:

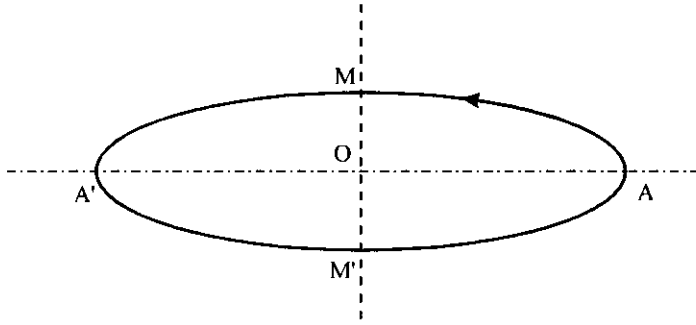


Figura 10.20 - Ellisse di precessione ($\phi = 0$)

- dalla velocità di rotazione $\dot{\Omega}$;
- dal momento d'inerzia I rispetto all'asse;
- dal peso del rotore;
- dalla lunghezza della sospensione.

In particolare la grandezza MM' è inversamente proporzionale al prodotto del peso per la lunghezza della sospensione, diminuisce, cioè, al crescere della grandezza della coppia raddrizzante (10.20); quando il momento di questa coppia diventa infinitamente grande, come nel caso del giroscopio rigidamente vincolato all'orizzonte (prima esperienza di *Foucault*), l'asse minore MM' diventa nullo e l'ellissi si schiaccia in una retta.

Consideriamo ora (v. figura 10.21) un giroscopio sospeso in un luogo di latitudine ϕ , diversa da zero, e con l'asse disposto inizialmente orizzontale in direzione $\dot{\Omega}$. Essendo al solito soggetto al movimento di rotazione apparente diurna, l'estremo $\dot{\Omega}$ dell'asse descriverebbe nelle 24 ore sideree, e nel senso retrogrado, il parallelo $ACA'C'$ della sfera rappresentativa. In un primo momento, dunque, si vedrà l'estremo $\dot{\Omega}$ sollevarsi sull'orizzonte, ma non più verticalmente, come nel caso del giroscopio sospeso in latitudine zero, bensì con una traiettoria tangente al parallelo $ACA'C'$, tangente cioè ad un piano, che forma con l'orizzonte un angolo uguale alla colatitudine.

In questi primi momenti, dunque, l'estremo $\dot{\Omega}$, anziché dirigere verso il Nord, si incammina in direzione opposta. Ma, appena l'inclinazione sull'orizzonte diventa sensibile, si manifesta la coppia raddrizzante, e si genera il moto di precessione orizzontale verso il Nord con velocità gradatamente crescente. Il movimento risultante dell'asse sarà ancora per qualche istante diretto verso Sud, e precisamente ciò continuerà ad avvenire finché la velocità orizzontale di precessione non giungerà ad eguagliare la proiezione orizzontale della velocità di rotazione terrestre.

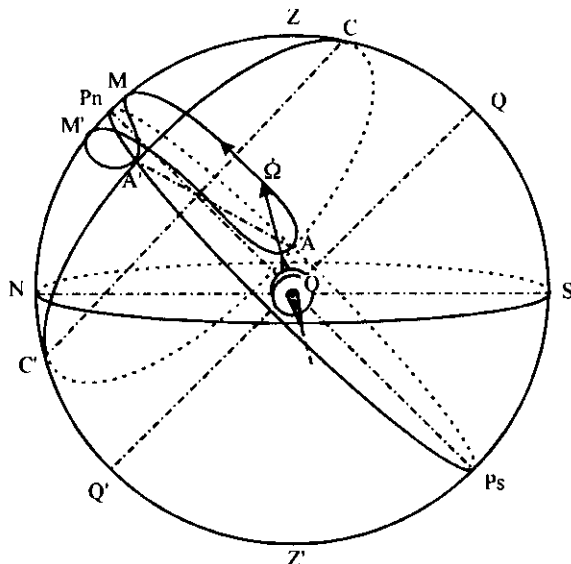


Figura 10.21 - Ellisse di precessione alla latitudine ($\phi \neq 0$)

Quando questa uguaglianza si sarà verificata, il moto risultante dell'asse avverrà solo nel piano verticale, con l'unico effetto di aumentare la sua inclinazione sull'orizzonte. Ma conseguentemente crescerà la velocità di precessione orizzontale della rotazione terrestre, e quindi l'asse piegherà nella sua traiettoria verso il Nord; l'inclinazione massima si avrà nel piano del meridiano, e quindi l'asse l'oltrepasserà verso ponente, avvicinandosi progressivamente all'orizzonte, mentre la velocità di precessione andrà sempre diminuendo. Ben presto quindi il moto apparente diventerà preponderante sul moto reale di precessione, e l'estremo $\dot{\Omega}$ dell'asse seguirà un percorso che a poco a poco si avvicinerà alla direzione verticale. Diventerà esattamente verticale quando la velocità orizzontale di precessione sarà nuovamente uguale alla proiezione orizzontale della rotazione terrestre. Dopo questo istante, l'estremo $\dot{\Omega}$ piegherà nuovamente verso l'orizzonte, ma in senso opposto, in modo da raggiungere il punto A' , simmetrico di A rispetto al meridiano, con una traiettoria tangente in questo punto al parallelo $ACA'C'$, tangente

cioè ad un piano che forma con l'orizzonte un angolo uguale alla colatitudine.

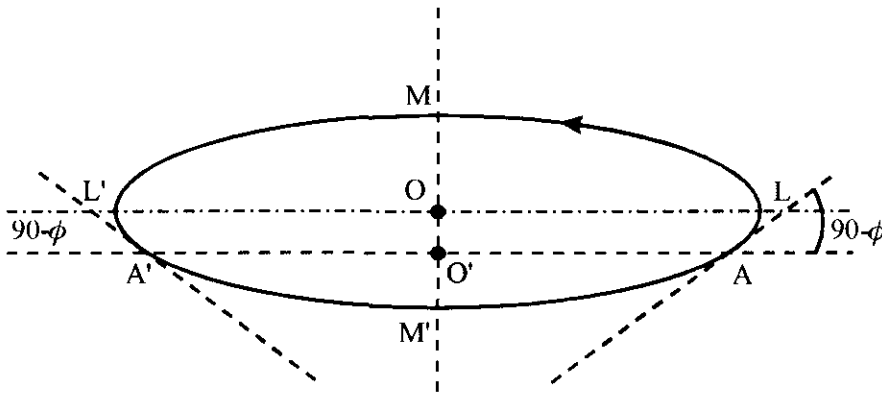


Figura 10.22 – Ellisse di precessione alla latitudine ($\phi \neq 0$)

Il movimento dell'asse prosegue da questo momento sotto l'orizzonte, per cui, raccogliendo la traccia di tale movimento sulla solita superficie cilindrica tangente alla sfera lungo l'orizzonte, si avrà una traiettoria della forma rappresentata in figura 10.21 e 10.22. Essa è ancora una ellisse, ma il suo centro è spostato lungo la verticale, in alto nell'emisfero Nord, e in basso nell'emisfero Sud. Le dimensioni dell'ellisse variano con la posizione iniziale dell'asse, con gli elementi caratteristici del giroscopio sospeso e con la latitudine (10.15). Al crescere della latitudine del luogo di sospensione, cresce anche l'inclinazione OO' corrispondente al centro dell'ellisse che è evidentemente uguale all'inclinazione dell'asse sull'orizzonte nei punti L ed L' della traiettoria, in cui il movimento dell'asse si inverte per l'avvenuta preponderanza del movimento di precessione sulla componente orizzontale della rotazione terrestre w_1 . Nella figura 10.23 è rappresentato il caso di un giroscopio sospeso alle alte latitudine e disposto inizialmente per E - W. Partendo da Est, l'estremo dell'asse deve compiere verso il Sud un percorso assai lungo prima che sia verificata l'uguaglianza delle velocità di precessione e di rotazione terrestre:

- perché il moto iniziale dell'asse, tangente al piano inclinato di $(90^\circ - \phi)$ sull'orizzonte, sposta l'asse stesso assai lentamente lungo la verticale;
- perché la proiezione orizzontale della rotazione terrestre cresce al crescere della latitudine ($w_2 = w \sin \phi$) e occorre quindi che l'asse raggiunga una maggiore inclinazione, prima che il moto di precessione orizzontale possa uguagliare la suddetta proiezione.

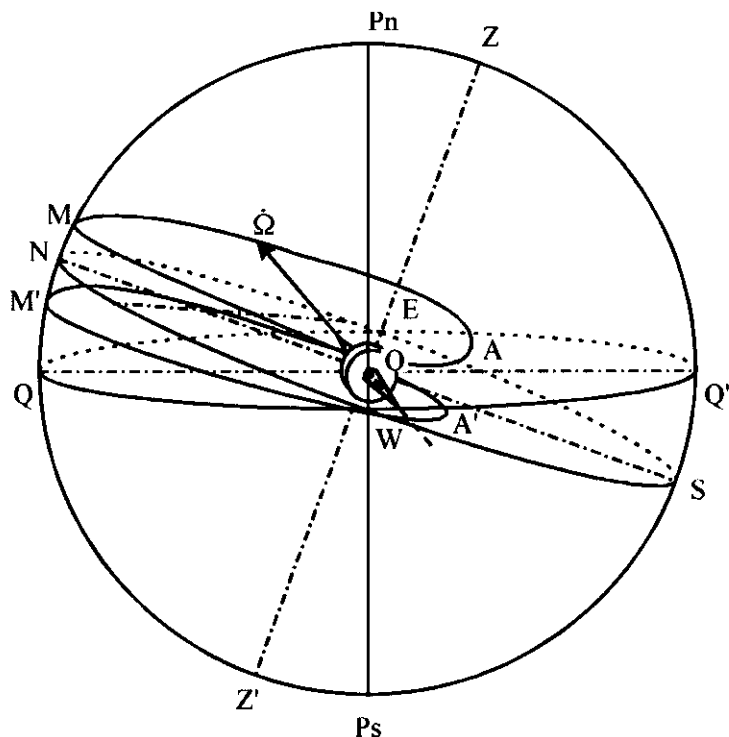


Figura 10.23 – Ellisse di precessione alle alte latitudini

In prossimità del polo, avverrà che il punto L di figura 10.22, in cui le due velocità orizzontali risultano uguali, si troverà molto prossimo al meridiano inferiore, il cui valore dipende dalle caratteristiche della bussola, ma che in ogni caso è certamente molto vicino a 90° , avverrà che l'asse raggiungerà il meridiano inferiore prima che il moto di precessione divenga preponderante, e continuerà perciò a ruotare nel senso retrogrado, perdendo ogni pratica direttività. Da questa latitudine fino al polo la bussola giroscopica risulta inservibile.

Come si è notato nel caso di giroscopio sospeso all'equatore, anche negli altri casi l'asse minore delle ellissi (v. figure 10.20 e 10.22) risulta tanto più piccolo quanto maggiore è il valore della coppia raddrizzante come si può anche vedere dalle relazioni (10.13).

Tutte le considerazioni e deduzioni del giroscopio sospeso sono il risultato della trattazione fisico matematica del giroscopio sospeso esposta nel paragrafo 10.D.3 dell'APPENDICE D. L'asse del giroscopio sospeso è soggetto ai due moti di equazioni (10. D.15) qui di seguito riportate:

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_m \cos \sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi t \\ \alpha &= \alpha_m \pm \gamma_m \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w \cos \phi \sin \left(\sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi \right) t\end{aligned}\quad (10.13)$$

la cui composizione fornisce facilmente l'equazione di una conica al centro di equazione:

$$\frac{\gamma^2}{A^2} + \frac{(\phi - \gamma)^2}{B^2} = 1 \quad (10.14)$$

con A e B semiasse maggiore e minore dell'ellisse (10.14):

$$A = \gamma_m \quad , \quad B = \gamma_m \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w_1 \quad (10.15)$$

10.9 - Posizione d'equilibrio del giroscopio

Abbiamo visto dunque che, in sostanza, la traiettoria descritta da un estremo dell'asse di spin $\dot{\Omega}$ è la combinazione di due movimenti oscillatori, ortogonali fra loro, uno orizzontale e l'altro verticale come si può anche vedere dalle relazioni del moto (10.13). Sono ambedue movimenti di tipo pendolare, per cui gli angoli orizzontali e verticali descritti dall'asse sono una funzione sinusoidale del tempo; ma anche sotto questo aspetto i due movimenti sono ortogonali fra loro, nel senso che alla velocità massima dell'uno corrisponde la velocità minima dell'altro. Al movimento pendolare nel piano verticale si dà sovente il nome di *nutazione dell'asse*; ma, da quanto abbiamo detto, risulta chiaramente che questo nome non è appropriato, poiché il movimento a cui lo si attribuisce è una conseguenza della rotazione terrestre, e non ha le origini meccaniche, né le relazioni di dipendenza col moto di precessione che ha, invece, il vero movimento di nutazione. In pratica poi questo movimento pendolare nel piano verticale è sempre compreso entro i limiti di pochi gradi sopra e sotto l'orizzonte. Se non vi fossero attriti né resistenza del mezzo, l'estremo Nord dell'asse continuerebbe indefinitamente a descrivere la traiettoria ellittica delle figure 10.20 e 10.22 sempre con le stesse caratteristiche e nello stesso senso, cioè da levante a ponente sopra l'orizzonte e da ponente a levante sotto l'orizzonte.

10.10 – La Girobussola

10.10.1 – Giroscopio sospeso smorzato

Gli attriti e le resistenze passive riducono progressivamente le dimensioni della traiettoria ellittica; dopo un tempo più o meno lungo

l'asse del giroscopio si arresterà nella posizione di equilibrio. In realtà questo tempo è eccessivamente lungo; per avere utili indicazioni dal giroscopio sospeso o zavorrato, è stato necessario introdurre uno smorzamento artificiale. Vedremo in seguito come sia stato realizzato nelle sue varie forme e vedremo come per ottenerlo si approfitti di uno dei due movimenti pendolari ortogonali che generano la traiettoria ellittica dell'estremo dell'asse; per ora limitiamoci ad esaminare quale debba essere la posizione di equilibrio del giroscopio.

E' intuitivo che tale posizione dovrà corrispondere al centro della ellisse descritta dall'estremo dell'asse giroscopico. Questa direzione sarà dunque a riposo nel piano del meridiano in qualunque latitudine; l'asse di spin $\dot{\Omega}$ rimarrà in posizione esattamente orizzontale all'equatore, mentre sarà leggermente sollevato nell'emisfero Nord e leggermente depresso nell'emisfero Sud.

E' facile vedere che realmente così deve essere, riflettendo che la posizione di equilibrio si potrà avere solo quando il movimento reale di precessione, da cui è animato l'asse, risulterà di grandezza uguale di direzione esattamente contraria, al movimento di rotazione diurna apparente. Il primo di questi movimenti avviene secondo un piano orizzontale, l'altro secondo un parallelo della sfera celeste; ora l'orizzonte risulta tangente al parallelo solamente nel piano del meridiano, per cui solamente quando l'asse è in questo piano i due movimenti possono avere direzione contraria. Perché poi i movimenti si annullano, è necessario che l'asse sia inclinato rispetto all'orizzonte di un angolo α tale che la precessione generata dalla coppia raddrizzante dovuta al peso risulti esattamente uguale alla componente w_2 della rotazione terrestre.

Se con p indichiamo il peso del giroscopio sospeso, con l la distanza del centro di sospensione dal centro di gravità, la coppia raddrizzante ha il valore $pls \sin \alpha \cong pl \alpha$ con α piccolo. La velocità di precessione conseguente si ricava dalla formula fondamentale ($C = I\dot{\Omega}\dot{\gamma}$):

$$\dot{\gamma} = \frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} \quad (10.16)$$

dovrà essere dunque

$$\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} = w \sin \phi \quad (10.17)$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{I\dot{\Omega}w \sin \phi}{pl} \quad (10.18)$$

quest'angolo è positivo nell'emisfero Nord, cioè per valori positivi della latitudine e cresce con quest'ultima; all'equatore, essendo $\phi = 0$, anche $\alpha = 0^\circ$. Nell'emisfero Sud, cioè per valori negativi della latitudine, l'angolo risulta anch'esso negativo, e pertanto l'asse giroscopico risulterà inclinato al disotto dell'orizzonte.

10.10.2 - Effetto di una coppia deviatrice nel piano verticale

Supponiamo che, mentre un giroscopio sospeso si trova nella posizione di equilibrio indicata nel paragrafo precedente, intervenga improvvisamente una coppia deviatrice permanente che agisca nel piano verticale, costituita per esempio da un peso applicato all'estremo Sud dell'asse e dalla reazione dell'appoggio. Non appena si manifesta questa coppia C_a , che tende a sollevare l'estremo Nord dell'asse, l'equilibrio del giroscopio sospeso viene turbato da un movimento di precessione giroscopica nel piano normale a quello di azione della coppia, cioè nel piano orizzontale. Questo movimento, dato il senso della coppia deviatrice, avverrà in modo da portare lo estremo Nord dell'asse verso levante con una velocità la cui grandezza dipenderà dall'entità della coppia stessa oltre che dalle caratteristiche dello strumento. Ma, per effetto della depressione che l'orizzonte subisce verso levante (a causa della w_1), appena l'asse giroscopico è uscito dal meridiano verso Est la sua inclinazione sull'orizzonte viene progressivamente ad aumentare; aumenta quindi l'effetto raddrizzante dovuto al peso proprio del giroscopio, e questo viene sollecitato a ritornare verso il meridiano secondo la consueta traccia ellittica.

L'asse giroscopico risulta quindi contemporaneamente soggetto nel piano orizzontale a due movimenti di precessione di senso contrario: uno dovuto alla coppia deviatrice, e che tende a portarlo continuamente verso levante, ed uno dovuto al richiamo del proprio peso e che tende a riportarlo verso il meridiano. Siccome questo secondo movimento di precessione aumenta di velocità man mano che l'asse si allontana dal meridiano verso levante, per effetto del conseguente aumento d'inclinazione dell'asse, esisterà un momento in cui, se il peso disturbatore non è troppo grande, la velocità dei due movimenti di precessione risulterà uguale, e l'asse cesserà di muoversi verso levante. In questo momento l'asse avrà raggiunto la sua massima distanza dal meridiano, e si avrà quindi la massima deviazione dovuta all'intervento della coppia deviatrice.

Subito dopo, il movimento di precessione dovuto al proprio peso verrà ad avere la preponderanza su quello di senso contrario, e l'asse giroscopico inizierà il suo movimento di ritorno verso il meridiano. Questo ritorno non avverrà in una sola semi oscillazione, ma sarà più o meno

lungo a seconda della resistenza del mezzo e degli attriti della sospensione. Dopo un certo numero di oscillazioni, l'asse si fermerà in una nuova posizione di equilibrio, ed è facile vedere che questa sarà ancora nel meridiano locale, ma con inclinazione dell'asse diversa da quella della precedente posizione di equilibrio.

E' evidente infatti che la nuova posizione di equilibrio debba essere come prima nel meridiano, perché questa è l'unica direzione in cui si annulla il movimento verticale apparente dovuto alla rotazione terrestre, come si è visto nel paragrafo precedente, mentre le altre forze che agiscono sul giroscopio, peso proprio e peso aggiuntivo, provocano movimenti di precessione esattamente orizzontali cioè senza alcuna componente nel piano verticale.

L'inclinazione dell'asse nel meridiano deve essere però diversa da quella della precedente posizione di equilibrio; nel caso considerato, deve essere maggiore perché la velocità del movimento di precessione verso ponente dovuto al proprio peso deve risultare maggiore di quella precedente, dato che deve bilanciare non solo la velocità w_1 di rotazione del meridiano sul piano orizzontale, ma anche la nuova velocità di precessione verso levante dovuta al peso aggiuntivo; se questo bilanciamento non si verificasse, l'asse giroscopico non sarebbe in equilibrio.

Concludendo, l'intervento di una coppia perturbatrice nel piano verticale, tendente a sollevare l'estremo Nord dell'asse, ha per effetto un'escursione dell'asse giroscopico verso levante fino a raggiungere una deviazione massima (la cui grandezza dipende dall'intensità della coppia) ed il ritorno infine ad una nuova posizione di equilibrio la quale è ancora con l'asse in meridiano, ma più inclinato sull'orizzonte di quanto era precedentemente.

E' facile vedere che, se la coppia deviatrice tendesse ad abbassare anziché ad alzare l'estremo Nord dell'asse, l'escursione di tale estremo avrebbe luogo verso ponente (si avrebbe cioè una deviazione Ovest) e la posizione finale di equilibrio sarebbe ancora in meridiano ma con l'asse meno inclinato rispetto all'orizzonte.

Ricordando quanto si è avuto occasione di dire al paragrafo 10.10.1, è chiaro che l'angolo α di cui in definitiva risulterà inclinato l'asse giroscopico sull'orizzonte, sarà dato dall'espressione :

$$\alpha = \frac{I\Omega w \sin\phi}{pl \pm p'l} \quad (10.19)$$

in cui i simboli hanno il solito significato, e il prodotto $p'l$ rappresenta il momento della coppia deviatrice. Nel denominatore della formula si dovrà prendere il segno + se la coppia del proprio peso e la coppia de-

viatrice hanno lo stesso senso, si dovrà prendere il segno - in caso contrario.

10.10.3 - Effetto di una coppia deviatrice nel piano orizzontale

Supponiamo ora che, mentre il giroscopio si trova in equilibrio nel piano del meridiano, intervenga improvvisamente una coppia deviatrice permanente che agisca nel piano orizzontale e che tenda, per esempio, a portare verso levante l'estremo Nord dell'asse giroscopico.

Anche questa volta il giroscopio reagirà subito con un movimento di precessione in un piano normale a quello della coppia deviatrice, cioè nel piano verticale. Dato il supposto senso di questa coppia, il movimento di precessione tenderà a portare in basso l'estremo Nord dell'asse con velocità dipendente dal momento della coppia deviatrice e dalle caratteristiche giroscopiche.

Man mano però che l'estremo Nord dell'asse si abbassa verso l'orizzonte, diminuisce l'effetto raddrizzante del peso proprio del giroscopio; conseguentemente anche la velocità del movimento di precessione da esso provocato verrà a diminuire e non risulterà più uguale al movimento di rotazione che ha la traccia del meridiano sul piano dell'orizzonte. L'asse giroscopico rimarrà quindi un poco indietro rispetto a questa traccia del meridiano e all'occhio dell'osservatore sembrerà allontanarsi dalla sua posizione di equilibrio dirigendosi verso levante. Ora, una volta che l'asse giroscopico è uscito dal meridiano verso levante, non è più nullo il movimento di depressione che l'orizzonte ha per effetto della componente w_l della rotazione terrestre, e l'asse giroscopico verrà, per effetto di questo movimento, ad aumentare continuamente la sua inclinazione sul piano orizzontale; verrà cioè ad avere un movimento apparente nel piano verticale diretto verso l'alto, e quindi in senso contrario a quello della precessione dovuta alla coppia deviatrice.

L'inclinazione dell'asse cesserà quindi ad un certo momento di diminuire, e tornerà a crescere fino a ritornare uguale al valore α della posizione iniziale di equilibrio. In questo momento la velocità della precessione, dovuta al proprio peso, ritornerà ad uguagliare la velocità del movimento di rotazione della traccia del meridiano, per cui l'escursione verso levante risulterà finita, si avrà cioè in questo momento la deviazione massima dal piano del meridiano. Ma non potrà essere questa la posizione definitiva di equilibrio perché in tale posizione il movimento apparente di sollevamento dell'asse propenderà su quello di abbassamento dovuto alla coppia deviatrice, e quindi, dopo un istante di arresto, l'asse dovrà iniziare il movimento di ritorno verso il meridiano.

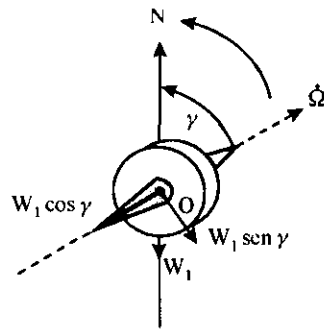


Figura 10.29 – Coppia deviatrice nel piano orizzontale

Dopo un certo numero di oscillazioni, l'asse si fermerà nella nuova posizione di equilibrio, che ovviamente non potrà essere nel piano del meridiano poiché in tale piano non vi è alcun movimento verticale atto a compensare quello di abbassamento dovuto alla coppia deviatrice. La posizione di equilibrio dovrà invece essere con l'asse a levante del meridiano e di tanto a levante quanto è necessario perché il movimento apparente di sollevamento dell'asse risulti uguale al movimento di abbassamento dovuto alla coppia deviatrice.

Sia rappresentata in figura 10.29 questa posizione di equilibrio con l'asse giroscopico $\hat{\Omega}$ spostato dall'angolo γ , esageratamente grande, inclinato verso levante. La velocità del movimento apparente di sollevamento dell'asse sull'orizzonte è ovviamente data dalla proiezione della componente w_1 della rotazione terrestre sulla normale all'asse giroscopico, e risulterà perciò pari a:

$$\begin{aligned} w \cos \phi \sin \gamma &= \gamma \omega \cos \phi \\ w \cos \phi \cos \gamma &= w \gamma \cos \phi \end{aligned} \quad (10.20)$$

dato che l'angolo γ è sempre piccolissimo, e che perciò è lecito sostituire il valore dell'arco a quello del suo seno trigonometrico; la componente lungo l'asse del giroscopio non ha alcun effetto perché piccolissima rispetto a $\hat{\Omega}$. La velocità di abbassamento dell'asse dovuta alla coppia deviatrice è invece una velocità di precessione che si può rappresentare con un vettore normale all'asse giroscopico, e il cui valore scalare w si può dedurre dalla formula fondamentale dei girostati :

$$C = I \hat{\Omega} \dot{\alpha}$$

Si avrà:

$$\dot{\alpha} = \frac{C}{I \hat{\Omega}} \quad (10.21)$$

e poiché nella posizione di equilibrio le due velocità ora ricercate devono risultare uguali, sarà :

$$\frac{C}{I\dot{\Omega}} = \alpha \omega \cos\phi$$

e quindi

$$\gamma = \frac{C}{I\dot{\Omega} \omega \cos\phi} \quad (10.22)$$

La posizione di equilibrio sarà dunque deviata dal meridiano verso levante del piccolo angolo γ , ma l'inclinazione dell'asse sarà la stessa della precedente posizione di equilibrio, perché il peso proprio del giroscopio deve ancora provocare un movimento di precessione orizzontale uguale a quello della traccia del meridiano sull'orizzonte.

Concludendo, l'intervento di una coppia deviatrice nel piano orizzontale, che tenda a spostare verso levante l'estremo Nord dell'asse giroscopico, ha per effetto un'escursione di tale estremo verso levante fino a raggiungere una deviazione massima (il cui valore dipende dal momento della coppia deviatrice), ed il ritorno infine ad una nuova posizione di equilibrio, la quale ha ancora la stessa inclinazione di prima sull'orizzonte, ma si trova deviata dal meridiano di un piccolo angolo verso levante.

E' facile vedere che, se la forza deviatrice tendesse a spostare lo estremo Nord dell'asse verso ponente invece che verso levante, l'escursione dell'asse avrebbe luogo verso Ovest, e la deviazione finale sarebbe pure occidentale.

10.10.4 - Coppia direttiva - Periodo d'oscillazione

Abbiamo già fatto notare che, tanto nel caso del giroscopio vincolato al piano orizzontale (l'esperienza di *Foucault*), quanto nel caso del giroscopio sospeso, l'orientamento in meridiano è causato dalla coppia direttiva, che nasce per effetto della precessione forzata di velocità, $w_1 = \omega \cos\phi$, nella quale è trascinato l'asse del giroscopio. Le piccole differenze di comportamento fra i due casi, dovute al diverso valore della coppia raddrizzante del peso, non influiscono sulla grandezza della *coppia direttiva*, che è in ogni caso espressa dalla relazione

$$C = I\dot{\Omega} \omega \cos\phi$$

risulta, perciò, che la coppia direttiva di un giroscopio sospeso:

- è indipendente dalla grandezza della coppia raddrizzante, che sollecita l'asse del giroscopio a rimanere orizzontale;
- è massima all'equatore ($\cos\phi=1$) e nulla ai poli ($\cos\phi=0$);
- aumenta con la velocità Ω di rotazione del rotore intorno all'asse;
- aumenta con il momento d'inerzia I del giroscopio rispetto all'asse.

Si può dunque agire per accrescere la coppia direttiva, sia aumentando il momento d'inerzia del rotore, sia aumentandone la velocità Ω di rotazione. Ma questa non si può aumentare oltre certi limiti per non accrescere eccessivamente la forza centrifuga, che è proporzionale alla prima potenza del raggio del rotore e al quadrato della velocità; sorpassando tali limiti, il rotore si spezzerebbe.

Convorrà perciò rinunciare alle altissime velocità di rotazione ed ottenere una maggior coppia direttiva agendo sul momento d'inerzia I che è proporzionale al peso del rotore e al quadrato del suo raggio. A parità di peso, si aumenterà dunque il raggio; la coppia direttiva crescerà in conseguenza rapidamente, mentre la forza centrifuga crescerà assai più lentamente.

E' evidente l'importanza di ottenere una forte coppia direttiva in un giroscopio sospeso per definire esattamente la direzione del meridiano vero, quando cioè si voglia costruire, in base ai principi teorici fin qui indicati, una vera e propria bussola giroscopica.

Per la costruzione pratica di un tale *sensore di direzione* (*girobussola*), per tenere cioè un giroscopio di dimensioni e quindi di peso notevole in movimento di rotazione continua, a velocità elevata, libero di ruotare intorno a tre assi ortogonali, è infatti necessario un insieme di strutture meccaniche molto più complesse e più pesanti di quanto non sia il consueto *equipaggio* magnetico di una delle vecchie bussole tradizionali. Di conseguenza, le resistenze di attrito risultano, in una girobussola, ben più imponenti di quelle che si manifestano in una ordinaria bussola magnetica; e, per quanto si faccia allo scopo di ridurle ad un minimo, (vedremo con quali sottili accorgimenti a ciò si provveda), non si riesce mai ad eliminarle completamente.

Le resistenze residue devono perciò essere vinte dalla coppia direttiva del giroscopio; se questa non fosse abbastanza forte, potrebbe avvenire che l'asse giroscopico si fermasse in una posizione errata, fuori cioè dal piano del meridiano. Ciò sarebbe tanto più probabile quanto più alta fosse la latitudine locale, poiché la coppia direttiva diminuisce rapidamente al crescere della latitudine; per avere un'idea dell'ordine di grandezza della coppia direttiva di una girobussola, notiamo che essa assume approssimativamente i seguenti valori, per i differenti tipi in uso :

<i>Tipo di giro bussola</i>	<i>Coppia direttiva all'equatore in dine-cm</i>
<i>Anschutz monogirostatica</i>	20000
<i>Anschutz Bigirostatica (Microtecnica)</i>	10000
<i>Sperry I</i>	200000
<i>Brown</i>	1700

In una bussola magnetica tipo *Magnaghi*, invece, la coppia direttiva all'equatore è di sole *1200 dine-cm*, a 90° dalla linea meridiana.

Quanto al periodo di oscillazione di un giroscopio sospeso (e quindi anche di una girobussola), quanto cioè al tempo necessario perché lo estremo Nord dell'asse giroscopico descriva per intero la traiettoria ellittica delle figure 2.10 e 2.12, si dimostra che il suo valore può essere fornito con sufficiente approssimazione dalla formula :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pI\omega \cos\phi}} \quad (10.23)$$

esso risulta, quindi, crescente al crescere della velocità del rotore giroscopico, mentre diminuisce quando aumenta la grandezza della coppia direttiva (quella che tende a mantenere orizzontale l'asse), e quando aumenta la latitudine del luogo. In prossimità dei poli geografici della Terra, il periodo di oscillazione assume un valore infinitamente grande ed ogni bussola giroscopica diventa inservibile.

10.11 - Smorzamento delle oscillazioni

Abbiamo già visto nei paragrafi precedenti l'asse di spin del giroscopio finisce per orientarsi nel piano del meridiano vero dopo un certo numero di oscillazioni, progressivamente smorzate per effetto degli attriti e delle resistenze passive. Tuttavia, come si è già detto, questo smorzamento naturale è molto debole, e il giroscopio impiegherebbe molto tempo prima di fermarsi nella posizione di equilibrio. Una girobussola, costruita con questi criteri, non fornirebbe indicazioni pronte, e risulterebbe di scarso uso pratico.

Né d'altra parte conviene aumentare artificialmente le resistenze di attrito, se non si vuole ridurre la sensibilità della girobussola, la cui coppia direttiva, benché molto maggiore di quella di un'ordinaria bussola magnetica, è pur sempre di grandezza limitata considerando il peso cospicuo dell'apparecchio che essa deve orientare. Inoltre i sistemi di smorzamento a liquido, che sono utilmente impiegati nelle bussole ma-

gnetiche, sarebbero assolutamente insufficienti nel caso delle giroscopiche perché la resistenza del liquido è proporzionale alla velocità del movimento di rotazione della rosa; questa ha valori molto piccoli data la grandezza del periodo. Si è pensato dunque di introdurre uno smorzamento dinamico delle oscillazioni, che non aumentasse le resistenze passive e fosse, per quanto possibile, indipendente dalla posizione geografica.

Tutti i sistemi di smorzamento ideati appartengono a due categorie ben distinte a seconda che lo smorzamento viene fatto introducendo una coppia di forze nel piano verticale oppure nel piano orizzontale. Inizialmente le bussole *Anschutz* e bussole *Sperry* hanno utilizzato coppie di smorzamento nel piano orizzontale; successivamente, utilizzano invece coppie di smorzamento nel piano verticale.

I risultati e le proprietà di una girobussola zavorrata o sospesa derivano dallo studio teorico matematico dell'oscillazione smorzata dell'asse di spin soggetto ad una coppia di smorzamento verticale, C_{sv} , riportato in APPENDICE D; a giustificazione di quanto esposto si riporta il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \gamma w \cos \phi - \frac{C_{sv}}{H} \alpha \\ \dot{\gamma} &= -\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} + w_v\end{aligned}\quad (10.24)$$

nelle quali è stata introdotta la coppia di smorzamento verticale C_{sv} ; la soluzione del sistema di equazioni differenziali (10.24) fornisce le equazioni del moto del giroscopio smorzato:

$$\alpha = \alpha_e + \frac{w_1}{b} (\gamma_o - \gamma_e) e^{-vt} \operatorname{sen} bt \quad (10.25)$$

$$\gamma = \gamma_e (\gamma_o - \gamma_e) \left(\frac{v}{b} \operatorname{sen} bt + \operatorname{cos} bt \right) e^{-vt} \quad (10.26)$$

$$T_s = \frac{2\pi}{b} = 2\pi \sqrt{\frac{plw_1}{H} - \frac{plC_{sv}}{4H^2}} \quad (10.27)$$

Le relazioni trovate si semplificano ulteriormente quando si annulla l'effetto dell'azione della componente verticale della rotazione terrestre $w_v = w \sin \phi$ sul giroscopio:

$$\alpha = w_1 \gamma_o \frac{2H}{R} e^{-\frac{C_{sv}}{2H} t} \sin \frac{R}{2H} t \quad (10.28)$$

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{C_{sv}}{R} \sin \frac{R}{2H} t + \cos \frac{R}{2H} t \right) e^{-\frac{C_{sv}}{2H} t} \quad (10.29)$$

$$\Phi = \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-v(t_2-t_1)} = e^{-\frac{C_{sv} T_s}{4H}} \quad (10.30)$$

con Φ fattore di smorzamento della traiettoria dell'estremo dell'asse di spin.

L'asse di spin $\hat{\Omega}$, nel suo movimento di orientamento in meridiano compie, come si vede dagli integrali (10.26) e (10.27), due tipi di oscillazione, di cui una avviene nel orizzontale ed una in quello verticale; è precisamente su questo secondo movimento di oscillazione che viene ad influire la coppia di smorzamento. Affinché però l'azione della coppia verticale sia effettivamente smorzante, è necessario che i movimenti di precessione da essa provocati siano continuamente diretti a riportare l'asse giroscopico verso la linea meridiana, cambiando di senso ogni volta che l'asse passa per il piano meridiano. Siccome il movimento ellittico dell'asse di spin $\hat{\Omega}$ è tale che il suo estremo Nord si trova sollevato sull'orizzonte ogni volta che oscilla verso ponente, e depresso ogni volta che oscilla verso levante, i congegni di smorzamento approfittano di questa caratteristica, e fanno cambiare il senso della coppia. Inoltre il momento della coppia di smorzamento risulta di grandezza proporzionale all'inclinazione dell'asse, per cui l'azione di essa va continuamente decrescendo man mano che l'asse si avvicina all'orizzonte, man mano cioè che decrescono le sue oscillazioni di orientamento.

Analogo è il funzionamento dei sistemi di smorzamento a coppia orizzontale; tale coppia, naturalmente, influisce sul movimento di oscillazione orizzontale dell'asse. In questo caso la coppia deve agire nel senso di avvicinare sempre l'asse al meridiano, deve cioè provocare un movimento di precessione diretto verso ponente finché l'asse si trova a levante del meridiano, ed un movimento diretto verso levante finché l'asse si trova a ponente. La coppia deve perciò cambiare segno ogni volta che l'asse passa per il meridiano, il che non è facile a realizzarsi praticamente, poiché l'istante del passaggio in meridiano non è meccanicamente definibile in alcun modo. Si gira la difficoltà servendosi ancora, per l'inversione della coppia, degli istanti perfettamente definibili in cui l'asse passa per il piano orizzontale, e ritardando l'azione della coppia di un quarto di periodo in modo che la sua azione cambi senso proprio quando l'asse passa in meridiano.

Anche in questo caso l'azione della coppia è proporzionale all'angolo di inclinazione dell'asse, per cui va decrescendo continuamente man mano che l'asse si avvia verso la posizione finale di equilibrio.

I due sistemi di smorzamento sono quindi affatto simili fra loro, ed hanno lo stesso effetto di smorzare rapidamente le oscillazioni. Per effetto di questo smorzamento, la traccia descritta dall'estremo Nord dell'asse non sarà più di forma ellittica come nelle figure 10.20 e 10.22 ma avrà l'aspetto di una spirale come rappresentata nella figura 10.25.

La posizione finale di equilibrio del giroscopio sarà però differente a seconda che si adoperi una coppia di smorzamento orizzontale oppure verticale. Basterà ricordare quanto si è avuta occasione di dire nei paragrafi precedenti, a proposito dell'effetto delle coppie deviatrici nei due piani, per comprendere che la posizione di equilibrio sarà nel primo caso con la stessa inclinazione di prima, ma con deviazione finale dal meridiano (vedi figura 10.26). Nel secondo caso invece (coppia di smorzamento nel piano verticale) la posizione di equilibrio del giroscopio sarà nel piano del meridiano, ma con inclinazione diversa sull'orizzonte (v. figura 10.28).

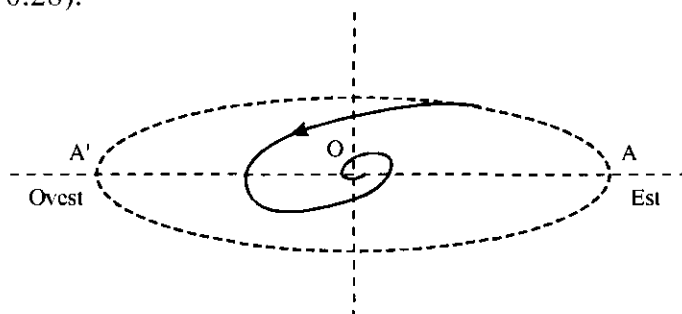


Figura 2.15 – Esempio di curva smorzata di orientamento

La deviazione dal meridiano, che si riscontra nella posizione di equilibrio nel caso di coppia di smorzamento che agisce nel piano orizzontale, viene denominata *deviazione di smorzamento*, ed è sempre diretta verso levante nell'emisfero Nord e verso ponente in quello Sud. La sua grandezza varia, seppure lentamente, con la latitudine, essendo nulla all'equatore e massima ai poli; perciò talvolta questa deviazione viene anche chiamata *errore di latitudine*. Dato che il suo valore è raramente trascurabile, è necessario provvedere alla sua correzione, ed infatti tutte le bussole, che impiegano una coppia di smorzamento orizzontale, hanno un correttore automatico di questa deviazione. Si tratta quindi di una piccola complicazione costruttiva che non esiste nelle bussole a coppia di smorzamento nel piano verticale. E' per questo che viene generalmente preferito questo ultimo sistema di smorzamento, il quale non introduce alcuna deviazione finale.

Esaminiamo ora più particolarmente come è stato risolto il problema dello smorzamento nei vari tipi di girobussola cui si è precedentemente accennato.

10.11.1 - Smorzamento tipo *Sperry*

1) *Zavorra solida*: Lo smorzamento delle oscillazioni nella prima girobussola *Sperry*, è stato ottenuto in questo tipo di girobussola staccando la zavorra *Z* dalla cassa del giroscopio e fissandola ad un semicerchio girevole intorno all'asse del cerchio esterno. Questo cerchio, come vedremo in seguito, è stato chiamato *cerchio fantasma* perché destinato a inseguire continuamente i movimenti del cerchio verticale che sostiene la cassa girostatica. Staccata così dalla cassa del giroscopio, la zavorra non avrebbe più alcun effetto raddrizzante su di esso; per ripristinare tale effetto, la si è collegata alla cassa mediante un piolo, che non giace sulla verticale del centro del giroscopio, ma ne è spostato eccentricamente verso levante.

In queste condizioni, quando l'estremo Nord dell'asse giroscopico è inclinato sopra l'orizzonte, cioè la bussola compie un'oscillazione verso ponente, il peso della zavorra non ha soltanto un effetto raddrizzante, ma, per l'eccentricità dell'attacco, ha anche un effetto nel piano orizzontale, nel quale introduce una coppia deviatrice, di momento proporzionale all'inclinazione dell'asse. Questa coppia ha un senso tale da produrre nel giroscopio un movimento di precessione nel piano verticale, diretto ad abbassare l'estremo Nord dell'asse. Il contrario avviene quando questo estremo si trova inclinato al disotto dell'orizzonte, perché allora l'effetto della zavorra, oltre che a raddrizzare la cassa, tende anche a farla ruotare nel piano orizzontale, introducendo così anche questa volta una coppia di smorzamento in tale piano, di momento proporzionale all'inclinazione dell'asse. Il senso di tale coppia è in questo caso tale da provocare un movimento di precessione tendente a rialzare l'estremo Nord dell'asse verso l'orizzonte.

In ogni caso dunque la coppia di smorzamento orizzontale creata dall'eccentricità di attacco della zavorra tende a riportare l'asse girostatico orizzontale cambiando di senso ogni volta che tale asse passa per l'orizzonte. Si sono così realizzate le condizioni descritte nel paragrafo precedente, e si ha quindi un rapido smorzamento delle oscillazioni ed una posizione finale di equilibrio affetta da una piccola deviazione.

Successivamente la zavorra solida è imperniata pendolarmente alla cassa girostatica e lo smorzamento è affidato ad un sistema di repulsione magnetica, che introduce una coppia nel piano orizzontale.

2) *Zavorra liquida a mercurio* –La coppia di smorzamento è costituita da zavorra liquida. L'effetto di smorzamento è ottenuto eliminando

l'attacco diretto del tubo di mercurio alla cassa girostatica stabilendo invece una connessione eccentrica mediante un piolo leggermente spostato verso levante. La connessione fra la cassa girostatica e il balistico a mercurio deve anche in questo caso essere spostata a levante del meridiano, come nelle bussole a zavorra solida, perché la coppia orizzontale di smorzamento deve sempre tendere ad abbassare l'estremo Nord dell'asse nella sua oscillazione verso ponente, e a sollevarlo in quella verso levante. Ora è vero che la zavorra liquida crea una coppia nel piano verticale di senso opposto a quello della zavorra solida, ma anche il senso della rotazione girostatica è invertito nei due casi, e pertanto l'effetto della coppia di smorzamento, applicata per mezzo del piolo eccentrico a levante del meridiano, rimane immutato. In tutti i casi quindi, tanto con zavorra liquida quanto con zavorra solida, il movimento dell'estremo Nord dell'asse di una girobussola assumerà la forma di una spirale ellittica, come è rappresentata nella in scala molto ingrandita nel senso verticale.

In tutti i casi poi, la posizione finale di equilibrio dell'asse di spin giroscopico risulta, per le bussole *Sperry*, leggermente deviata dal meridiano come mostra chiaramente la figura 10.25 in scala molto ingrandita nel verso verticale. In tutti i casi poi, la posizione finale di equilibrio dell'asse di spin risulta, per le bussole *Sperry*, leggermente deviata dal meridiano come mostra la figura 10.26

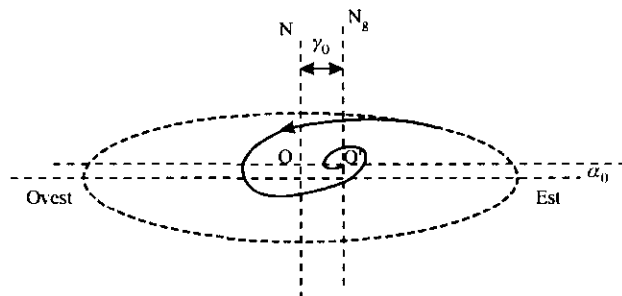


Figura 2.16 – Curva di orientamento con coppia orizzontale

10.11.2 - Smorzamento tipo *Anschutz*

A) *Bussola mono girostatica*:

La prima bussola *Anschutz* era dotata di un sistema di smorzamento a getto di aria generato dal rotore del giroscopio. Le cose erano disposte in modo che questo getto produceva per reazione una coppia nel piano orizzontale di senso inverso a seconda che l'oscillazione della bussola era diretta verso levante o verso ponente. Il momento di questa coppia era in ogni caso di grandezza proporzionale all'angolo di inclinazione

dell'asse. L'effetto di questo sistema di smorzamento era del tutto simile a quello già descritto delle bussole *Sperry*, e la posizione finale di equilibrio risultava perciò con l'asse deviato di un piccolo angolo dal meridiano. Non è però il caso di entrare in maggiori particolari circa questo sistema di smorzamento, che è stato ormai del tutto abbandonato.

B) Bussola bi-girostatica:

In questo tipo di bussola la Ditta ha creato una coppia di smorzamento nel piano verticale utilizzando il deflusso naturale dal Nord al Sud, e viceversa, di una piccola quantità di olio durante le oscillazioni dell'equipaggio giroscopico. La scatola che contiene e collega i due giroscopi, porta inferiormente un truogolo circolare, contenente dell'olio, che serve anche per la lubrificazione dei rotori. Il truogolo è diviso in otto compartimenti da altrettante paratie verticali, due delle quali sono situate in corrispondenza delle graduazioni Nord e Sud della rosa, e le altre equidistanti dalle precedenti. Attraverso ognuna di queste paratie, tranne quelle Nord e Sud, passa uno spezzone di tubo di piccolo diametro, per mezzo del quale ogni compartimento comunica con quelli adiacenti. Dentro ognuno di questi spezzoni di tubo è infilato un filo metallico le cui dimensioni si possono variare nell'aggiustamento della bussola all'atto del montaggio, in modo da ottenere che il passaggio dell'olio da un compartimento all'altro avvenga con la lentezza necessaria. Abbiamo infatti visto che, per assicurare uno smorzamento efficace, è necessario che questi spostamenti dell'olio da Nord a Sud e viceversa avvengano in ritardo di un quarto di periodo rispetto alle oscillazioni del sistema giroscopico. Si verifica così che quando la bussola, da una posizione deviata verso levante si avvia verso il meridiano, pur essendo la parte Nord della rosa sollevata sull'orizzonte, l'olio si trova ancora nei compartimenti Nord del truogolo e concorre perciò col peso del sistema giroscopico ad accelerare il movimento di precessione verso Ovest. Dopo un quarto di periodo, cioè quando la bussola passa per il meridiano, l'efflusso dell'olio è già tale che il liquido risulta equamente distribuito nei compartimenti del truogolo e non ha quindi alcun effetto sulla oscillazione dell'elemento sensibile. Subito dopo però l'olio, continuando ad affluire da Nord a Sud per effetto dell'inclinazione che i giroscopi hanno ancora sopra l'orizzonte, va ad appesantire la parte Sud del sistema giroscopico, e provoca un movimento di precessione verso levante che si oppone al movimento di oscillazione della bussola e tende a riportarla verso il meridiano. L'azione dell'olio in questa fase va continuamente crescendo perché aumenta continuamente la quantità di liquido che si accumula nella parte Sud del truogolo; essa raggiungerà un massimo quando, alla fine di questa seconda fase, la bussola avrà raggiunto la massima deviazione Ovest e comincerà l'oscillazione di ritorno verso il meridiano. In

questa terza fase la parte Nord della rosa sarà depressa sotto l'orizzonte, per cui l'olio comincerà a defluire verso i compartimenti Nord del truogolo; ma, a causa delle ostruzioni filari esistenti nei tubi di comunicazione, l'efflusso viene rallentato in modo che durante tutta questa terza fase sussiste ancora un appesantimento della parte Sud dell'elemento sensibile con un conseguente acceleramento del movimento verso il meridiano. Soltanto quando questa fase sarà terminata, e la bussola passerà nuovamente per il meridiano, l'efflusso dell'olio sarà tale che il liquido sarà equamente distribuito negli otto compartimenti. Da questo momento la parte Nord del sistema giroscopico comincia nuovamente ad appesantirsi, e si genera di nuovo il movimento di precessione verso ponente, in opposizione, cioè al movimento di oscillazione della bussola.

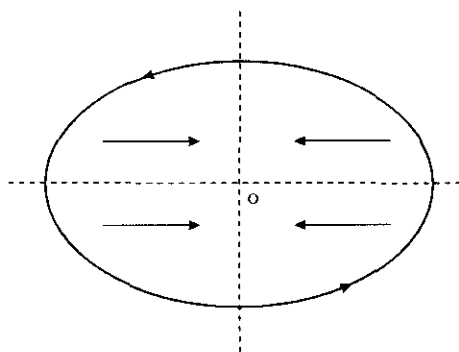


Figura 10.27 – Azione della coppia di smorzamento nelle girobussole Anschutz

Il congegno di smorzamento di questa bussola è dunque tale che, durante un'intera oscillazione della rosa, rappresentata colla solita traccia ellittica in figura 2.18, l'azione dell'olio genera i movimenti di precessione indicati dalle frecce interne della figura 2.17. Tali movimenti sono concordanti con l'oscillazione della rosa quando questa si dirige verso il meridiano, sono con essa contrastanti quando se ne allontana, hanno quindi un deciso effetto di smorzamento delle oscillazioni.

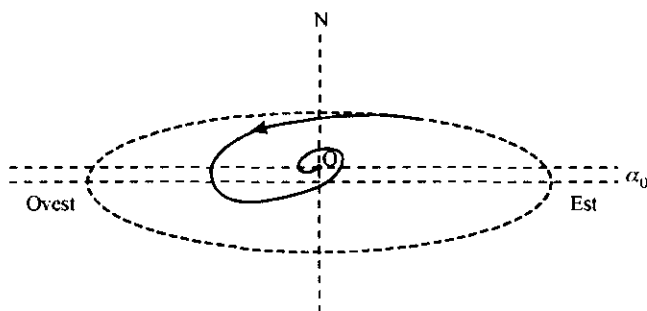


Figura 10.28 – Curva smorzata di orientamento con coppia verticale

Al termine di queste oscillazioni smorzate l'elemento sensibile si fermerà nella posizione di equilibrio; questa posizione sarà in meridiano, con l'asse inclinato sull'orizzonte di una quantità leggermente maggiore di quella di cui risulterebbe inclinato in una bussola senza smorzamento. (v. figura 10.27). L'azione risulta del resto evidente quando si pensi che, nella posizione di equilibrio, essendo il sistema giroscopico leggermente inclinato sull'orizzonte, l'olio viene a preponderare nei compartimenti Sud del truogolo, e tale appesantimento viene in sostanza a ridurre l'effetto raddrizzante della coppia costituita dal peso e dalla spinta del galleggiante. E' quindi necessario che l'asse sia più inclinato sull'orizzonte perché possa ancora avere una velocità di precessione orizzontale uguale alla velocità con cui ruota in senso azimutale la traccia Nord-Sud del meridiano locale per effetto della componente della rotazione terrestre.

10.12 – La girobussola su nave in moto

Nei paragrafi precedenti si è studiato il comportamento di un giroscopio (girobussola) indipendentemente dai movimenti della piattaforma su cui è installata (nave immobile o su Terra).

Occorre ora studiare il comportamento della girobussola installata a bordo di una nave in navigazione, studiare cioè l'effetto dei differenti moti che la nave è sottoposta e quali sono gli effetti sulla direttività della girobussola; fra i possibili moti sono da prendere in considerazione: rotta e velocità, variazioni di velocità, variazioni di rotta, rollio, beccheggio); tutti questi disturbi producono degli errori di direzione, noti come deviazioni della girobussola. Di minore importanza, ma anch'esse non del tutto trascurabili, sono le deviazioni prodotte dalla variazione di velocità del rotore della girobussola ($\dot{\Omega}$), le vibrazioni della nave e altri disturbi che possono generale delle accelerazioni applicabili sul baricentro della girobussola. Queste deviazioni influiscono seriamente sull'accuratezza della direzione fornita dalle girobussole ed hanno un valore non del tutto trascurabile; inoltre cessata la causa la bussola torna sulla direzione corretta dopo un intervallo assai lungo e le sue indicazioni durante la fase di riallineamento sono anch'esse errate. Il fenomeno è alquanto complesso e costituisce se non eliminato un serio inconveniente all'uso corretto della girobussola.

Lo studio teorico ha portato all'adozione di alcuni accorgimenti tecnici che consentono di ridurre notevolmente il valore di queste deviazioni.

Noi studieremo singolarmente ciascuno di questi moti e valuteremo gli effetti (errori di direzione) sulla direzione del nord geografico indicata dalla girobussola; studieremo, inoltre, il modo per ridurle o annul-

larle in modo da garantire la migliore prestazione della girobussola.

10.12.1 – Deviazione prodotta dal moto della nave.

In condizioni di equilibrio l'asse di spin di una girobussola. Situato in un punto della Terra di coordinate (ϕ, λ) . Si dispone lungo la direzione della linea meridiana ed ortogonalmente alla linea $E-W$; lungo quest'ultima direzione è orientata invece, la velocità periferica del punto O dovuto alla velocità angola w della rotazione terrestre; il suo valore è espresso dal seguente vettore:

$$V = wR\cos\phi \quad (10.31)$$

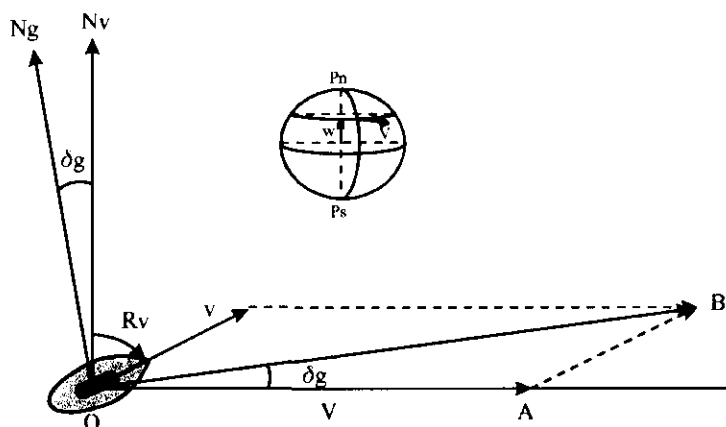


Figura 10.29 – Composizione vettoriale

con R raggio della Terra supposta sferica e diretto verso Est. Se la girobussola è installata su di una nave in moto, definito dal vettore di modulo v di direzione e verso fornito dalla rotta Rv , occorrerà tener conto della velocità angolare che compete alla nave per il fatto di muoversi su una superficie sferica.

Se indichiamo con σ la velocità angola della nave, allora, il vettore velocità sul punto O sarà dato dalla seguente espressione:

$$v = R\sigma \quad (10.32)$$

l'asse del giroscopio non si orienta parallelamente alla linea meridiana rappresentata da w_1 ma si orienterà lungo una direzione risultante vettoriale tra (w_1, σ) ; nasce così una deviazione δ_g che è diretta verso W quando la rotta della nave è compresa nel primo quadrante (v. figura 10.29). Per valutare δ_g applichiamo il teorema del seni al triangolo OAB :

$$\frac{\sin \delta_g}{v} = \frac{\sin[\frac{\pi}{2} - (R_v + \delta_g)]}{v} \quad (10.33)$$

dalla quale si ricava facilmente l'espressione di δ_g :

$$\delta_g = \tan^{-1} \left[\frac{v \cos R_v}{R_{W_1} + v \sin R_v} \right] \quad (10.34)$$

relazione che può essere scritta anche in termini di velocità angolare dividendo numeratore e denominatore per il raggio della Terra R :

$$\delta_g = \tan^{-1} \left[\frac{\sigma \cos R_v}{R_{W_1} + \sigma \sin R_v} \right] \quad (10.35)$$

Si può osservare che si ha la massima deviazione δ_g per $R_v = 270^\circ$ dato che si ha il minimo valore del denominatore; ciò è del resto facile da comprendere dato che per rotta W si ha la minima velocità relativa tra la nave e la rotazione terrestre. Inoltre, le relazioni (10.34) e (10.35) possono essere ulteriormente semplificate valutando il secondo termine al loro denominatore; infatti se confrontiamo la velocità associata alla rotazione terrestre:

$$w = 73 \times 10^{-6} [\text{rad/s}] = 903.47 [\text{mg/s}] \cong 900 [\text{nodi}]$$

con la velocità di una nave, sicuramente non superiore a 30 nodi, si ha che $R_{W_1} \gg \sigma \sin R_v$ per cui è sempre possibile considerare nullo il secondo termine ed esprimere le (10.34) e la (10.35) nel seguente modo:

$$\delta_g = \tan^{-1} \left[\frac{v \cos R_v}{R_{W_1}} \right] \text{ e } \delta_g = \tan^{-1} \left[\frac{\sigma \cos R_v}{R_{W_1}} \right] \quad (10.36)$$

dalle due relazioni si ricava che il valore massimo di δ_g si verifica per

le rotte $R_v = 0^\circ$ e $R_v = 180^\circ$ mentre è nullo per le rotte $R_v = 90^\circ$ e $R_v = 270^\circ$.

La deviazione δ_g prodotta dal moto della nave non si può né eliminare né ridurre; bisogna quindi tenerne conto ed eliminarla; per correggere le deviazioni δ_g si ricorre, normalmente, con apposite tabelle inserite nella raccolta delle tavole nautiche edite dall'I.I. della Marina. Le case costruttrici hanno inserito nelle girobussole un correttore che va imposta

in funzione della latitudine e della velocità della nave; ovviamente, al variare di questi parametri va modificato di volta in volta.

10.12.2 – Deviazioni balistiche

La deviazione δ_g prodotta dal moto della nave ha un valore ben noto che si mantiene costante finché rimangono invariate le aree regionali di navigazione.

Le deviazioni che nascono durante le operazioni di manovra (variazione continua di rotta e di velocità) oppure durante la navigazione con forte rollio e beccheggio hanno un carattere completamente diverso e sono molto più preoccupanti. Esse nascono per l'azione delle forze prodotte dalle accelerazioni che fanno nascere delle coppie che disturbano la coppia direttrice; per questi motivi vanno studiate ed eliminate dato che la nave quasi sempre è soggetta ad un moto accelerato.

10.12.3 – Deviazioni balistiche prodotte da variazioni di velocità

La natura di questo errore è nella sospensione pendolare del sistema girobussola (baricentro non coincidente con il centro di rotazione del giroscopio, figura 10.30): baricentro G posto ad una distanza l dal centro di rotazione O .

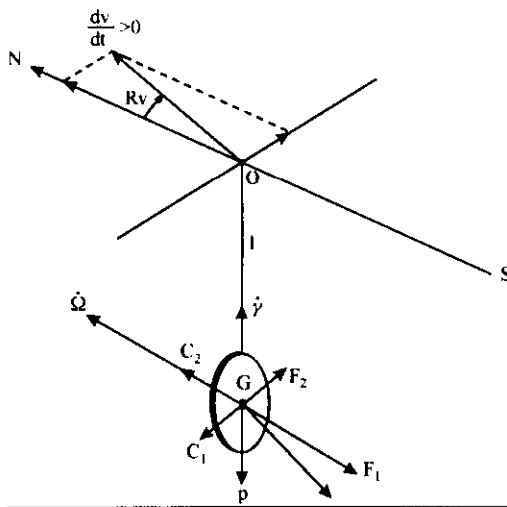


Figura 10.30 – Coppie generate dalla variazione di velocità

Un aumento del modulo della velocità fa nascere una accelerazione a in senso opposto al verso di v ; questa accelerazione, applicata alla mas-

sa $m = \frac{P}{g}$ del sistema sensibile genera una forza nel piano orizzontale passante per G ; le componenti di questa forza F rispetto ad un sistema cartesiano piano coincidente con l'asse Y con la linea meridiana sono:

$$\begin{aligned} F_1 &= -ma_1 = -\frac{P}{g} a \cos Rv && \text{diretta per meridiano} \\ F_2 &= -ma_2 = -\frac{P}{g} a \sin Rv && \text{diretta per parallelo} \end{aligned} \quad (10.37)$$

Tali forze, rispetto al centro di sospensione O , producono due coppie:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{g} a l \cos Rv && \text{diretta per } W \\ C_2 &= -\frac{P}{g} a l \sin Rv && \text{diretta per } N \end{aligned} \quad (10.38)$$

La coppia C_2 che agisce lungo la linea meridiana e quindi nella stessa direzione di $H = I\dot{\Omega}$ non ha alcuna influenza sull'asse di spin $\dot{\Omega}$; la coppia C_1 , perpendicolare all'asse di spin, produce un moto di precessione intorno all'asse Z di espressione:

$$\dot{\gamma} = -\frac{C_1}{H} = -\frac{l}{I\dot{\Omega}} \frac{P}{g} a \cos Rv \quad (10.39)$$

Detta velocità ha l'effetto di far ruotare l'asse di spin caratterizzato dalla deviazione δ_g prodotta dal vettore velocità v della nave all'istante dell'accelerazione a . L'asse di spin dovrà assumere una nuova posizione di equilibrio relativa alla nuova velocità della nave; appare evidente però, a causa della natura dell'azione di a , che l'asse di spin debba raggiungere la nuova posizione di equilibrio senza subire alcuna oscillazione, come sarebbe desiderabile; il risultato ottimale per un utile corretto uso della girobussola sarebbe quello che l'asse di spin passasse alla nuova direzione senza alcuna oscillazione.

Per ottenere questo risultato occorre che la velocità di precessione $\dot{\gamma}$ sia uguale alla variazione, in ogni istante, alla variazione di δ_g che si può ottenere direttamente dalla (10.36); infatti derivando la (10.36) si ha:

$$\frac{d}{dt} \delta_g = -\frac{\cos Rv}{Rw_1} \frac{dv}{dt} = -a \frac{\cos Rv}{Rw_1} \quad (10.40)$$

nella quale si è sostituito, data la piccolezza di δ_g , al valore della tangente il suo argomento. Per l'equilibrio dei due modi occorre allora uguagliare la (10.39) con la (10.40):

$$\frac{l}{I\dot{\Omega}} \frac{p}{g} a \cos Rv = \frac{a \cos Rv}{Rw_1}$$

ovvero dovrà aversi:

$$\frac{R}{g} = \frac{H}{plw_1} = \frac{I\dot{\Omega}}{pl \cos \phi} \quad (10.41)$$

con R raggio della Terra e g l'accelerazione di gravità. La (10.41) definisce la condizione per cui si verifica il moto stazionario che porta l'asse di spin alla nuova posizione relativa alla velocità raggiunta per effetto dell'accelerazione.

Osserviamo però che il secondo membro è proporzionale al periodo di oscillazione della girobussola per cui se si impone nella fase di progettazione della girobussola un periodo di smorzamento dato da:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl \cos \phi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (10.42)$$

la deviazione balistica sarà nulla e la girobussola si orienterà senza oscillazioni nella nuova posizione di equilibrio; il periodo T è noto come periodo di *Schuler*, il suo valore è di 85^m . La (10.42) comunque stabilisce una dipendenza del periodo dalla latitudine per cui il periodo di *Schuler* è valido per una sola latitudine. Tuttavia per le bussole destinate alla navigazione è sufficiente impostare la costruzione per il periodo valido solo per una latitudine (normalmente viene assegnata una latitudine dell'area di attività commerciale a cui è destinata la nave); per le altre latitudine si avranno piccole deviazioni balistiche che comunque non superano i 2° . La cifra di 89^m è comunque teorica perché non tiene conto dello smorzamento artificiale delle oscillazioni che è necessario per l'accelerare l'orientamento dell'asse di spin al meridiano.

10.12.4 – Deviazioni balistiche prodotte da variazioni di rotta

A bordo della nave, quando si accosta rapidamente, si genera una accelerazione centrifuga il cui valore dipende dalla velocità della nave e

dal raggio di curvatura della traiettoria. Anche questa accelerazione produce una forza che applicata al baricentro della girobussola genera una coppia.

Se indichiamo con ρ (v. figura 10.31) il raggio di curvatura della traiettoria della nave in accostata, l'accelerazione centrifuga è:

$$W = \frac{v^2}{\rho} \quad (10.43)$$

con v velocità della nave che può essere calcolata in funzione della variazione di rotta per mezzo della relazione:

$$v = \rho \frac{dRv}{dt} \quad (10.44)$$

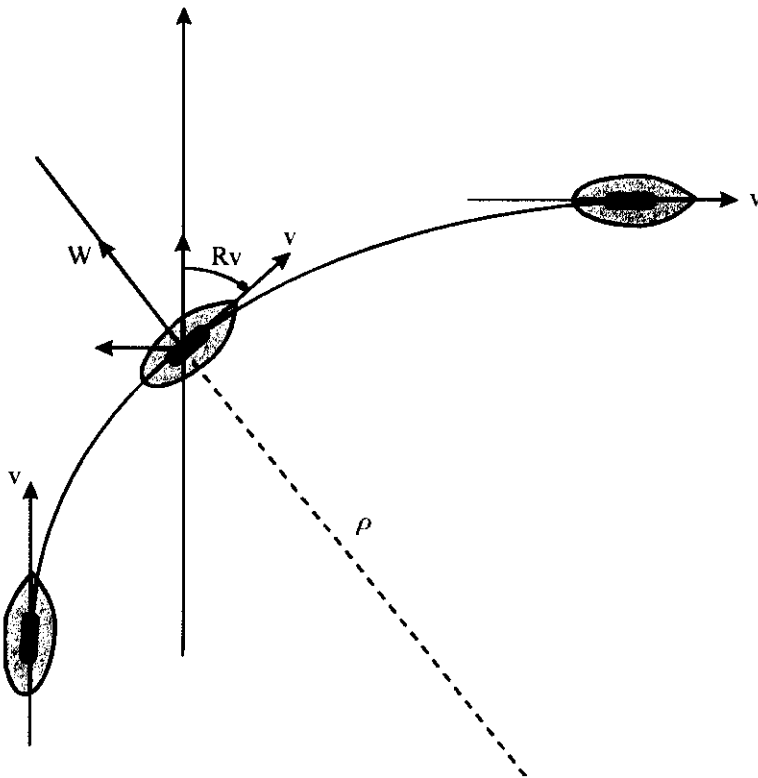


Figura 10.31 – Accelerazione centrifuga W in accostata

dalla quale è possibile ricavare il raggio di curvatura della traiettoria per sostituirlo nella (3.12). Dopo di che si ha:

$$W = v \frac{dRv}{dt} \quad (10.45)$$

Considerando Rv nel primo quadrante e che sia $\frac{dRv}{dt} > 0$ si possono ricavare le due forze in cui si scompone la forza F (perpendicolare a v) prodotta dall'accelerazione W :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{p}{g} v \frac{dRv}{dt} \sin Rv && \text{diretta per meridiano (N)} \\ F_2 &= \frac{p}{g} v \frac{dRv}{dt} \cos Rv && \text{diretta per parallelo (W)} \end{aligned} \quad (10.46)$$

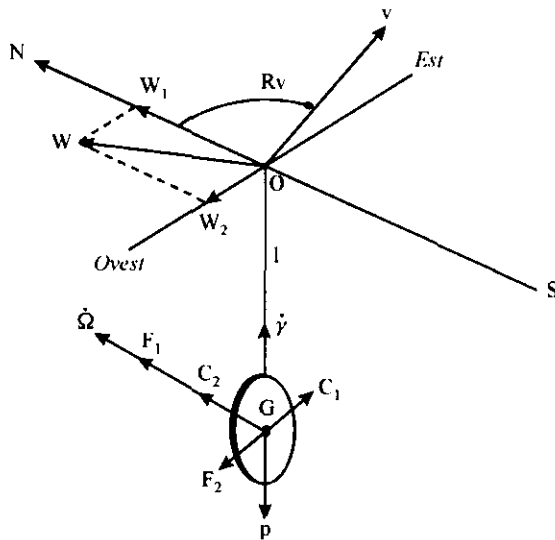


Figura 10.32 - Coppie generate dalla variazione di rotta

La F_2 è ortogonale al braccio l , genera una coppia C_2 , parallela alla linea meridiana e all'asse di spin, per cui non produce alcuna azione sul giroscopio; la forza F_1 con il braccio l genera la coppia C_1 perpendicolare all'asse di spin e fa nascere una velocità di precessione data da:

$$\dot{\gamma} = \frac{C_1}{H} = \frac{pl}{I\Omega g} v \frac{dRv}{dt} \sin Rv \quad (10.47)$$

Richiamando ora il valore della deviazione δ_g che compete alla nave prima della accostata:

$$\delta_g = -\frac{v \cos Rv}{Rw_1}$$

nella quale il segno meno dipende da considerazioni sul quadrante della Rv), possiamo ricavare dalla derivata di δ_g :

$$\frac{d\delta_g}{dt} = \frac{v \sin Rv}{Rw_1} \frac{dRv}{dt} \quad (10.48)$$

Dopodiché, per le considerazioni già fatte nel paragrafo precedente, possiamo eguagliare le relazioni (10.47) e (10.48):

$$\frac{pl}{I\dot{\Omega}g} v \frac{dRv}{dt} \sin Rv = \frac{v \sin Rv}{Rw_1} \frac{dRv}{dt}$$

dalla quale si ottiene ancora la condizione (10.40):

$$\frac{R}{g} = \frac{H}{plw_1} = \frac{I\dot{\Omega}}{pl \cos \phi}$$

ed il periodo $T = 2\pi \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl \cos \phi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

Anche per questo caso si trova che per annullare l'effetto della variazione di rotta basta imporre un periodo delle oscillazione smorzate pari al periodo di *Schuler*.

Si fa notare che il periodo di *Schuler* è indipendente dalla latitudine, mentre a secondo membro è presente la latitudine in cui si trova la nave. Ciò comporta, da parte dei costruttori la scelta del periodo di smorzamento che normalmente si fissa alla latitudine di 40° . E' importante sottolineare che il periodo di *Schuler* si incontra in ogni applicazione del giroscopio nelle quali occorre eliminare gli effetti di oscillazioni spurie.

Per le navi con velocità non molte elevate, oltre a costruire l'elemento sensibile per un valore intermedio di latitudine, si può variare il valore del $\cos \phi$ ma con lo svantaggio di accentuare la riduzione di rendimento della girobussola alle alte latitudini. Negli girobussole controllati da motori di coppia non si impiega il periodo di *Schuler*, ma una tecnica che riguarda la livella da cui partono i segnali elettrici che alimentano i motori di coppia, essendo questo per caratteristiche costruttive, l'unico sensore ad essere influenzato dalle accelerazioni.

10.12.5 - Deviazione balistica di smorzamento

Le variazioni di rotta e di velocità non provocano soltanto una deviazione balistica come quella che abbiamo esaminato nei paragrafi prece-

denti, ma danno anche luogo ad un'altra deviazione causata dalla presenza del sistema di smorzamento. Il fenomeno si manifesta tanto nel caso di coppia di smorzamento orizzontale quanto in quello di smorzamento verticale.

Consideriamo infatti la girobussola *Sperry* che impiega una coppia di smorzamento nel piano orizzontale; si nota che le deviazioni balistiche sorgono in questo tipo di bussola per effetto della forza d'inerzia che si desta per ogni variazione di andatura della nave ed applicata al centro di gravità della zavorra.

Questa forza d'inerzia tende a sollevare o ad abbassare l'estremo Nord dell'asse giroscopico e fa nascere la deviazione balistica. Nella girobussola *Sperry*, per introdurre una coppia di smorzamento orizzontale, la zavorra è connessa alla cassa girostatica mediante un piolo eccentrico, per cui la forza d'inerzia applicata alla zavorra non avrà perciò solamente un effetto nel piano verticale ma anche uno nel piano orizzontale; quest'ultimo tenderà a deviare in questo piano l'asse del giroscopio. Sappiamo già che una forza deviatrice orizzontale provoca una deviazione del giroscopio, e questa deviazione, che compare improvvisamente ad ogni variazione di rotta o di velocità, e che scompare non appena la nave ha assunto la nuova andatura, è una vera e propria deviazione balistica, che si aggiunge a quella dipendente dalle variazioni del moto della nave, e che, per la sua origine, viene chiamata *deviazione balistica di smorzamento*.

La grandezza di questa deviazione è di poco superiore al grado, per cui, nelle bussole di precisione non la si può ritenere trascurabile. In queste bussole si provvede perciò alla sua eliminazione sopprimendo temporaneamente, durante ogni accostata ed ogni variazione di velocità, l'eccentricità del piolo di connessione fra zavorra e cassa girostatica in modo da riportarlo esattamente sulla verticale del centro di gravità dello strumento. Al termine dell'accostata, o dopo la ripresa della nuova velocità, il piolo di collegamento è riportato nella sua pozione eccentrica (a levante della verticale) per riprendere la sua funzione di smorzamento delle oscillazioni. Questi spostamenti del piolo eccentrico sono eseguiti per mezzo di un piccolo congegno elettromeccanico che si chiama *eliminatore dello smorzamento* e che si può manovrare a distanza dal ponte di comando della nave.

Nella bussola Anschutz tri-girostatica e bi-girostatica la deviazione balistica di smorzamento si manifesta lo stesso, perché, per le forze d'inerzia che si destano ad ogni variazione di andatura, l'olio del truogolo destinato allo smorzamento delle oscillazioni è sollecitato a fluire da

Sud verso Nord, oppure viceversa. Questo spostamento di olio crea una coppia deviatrice nel piano verticale, e quindi in definitiva una deviazione che si aggiunge a quella provocata dalla variazione di rotta o di velocità della nave.

E' vero che, grazie alla lentezza con cui l'olio fluisce da un compartimento all'altro, e alla breve durata delle forze d'inerzia, il passaggio dell'olio avviene in misura limitata, ma lo squilibrio del liquido nei compartimenti del truogolo dura a lungo perché il ritorno dell'olio è anch'esso ritardato.

In definitiva anche queste bussole manifestano una deviazione balistica di smorzamento, analoga a quella della *Sperry*, e che deve essere possibilmente compensata, almeno nelle bussole di alta precisione. A questo scopo, la Ditta *Anschutz* aveva progettato, e la *Microtecnica* ha realizzato, un *eliminatore di smorzamento* che provvede, con comando a mano, a sospendere il passaggio dell'olio fra i compartimenti Nord e Sud del truogolo durante tutto il periodo in cui varia la rotta o la velocità della nave. Questo congegno è fornito per le bussole di precisione, e non per quelle che servono per i soli usi della navigazione.

10.12.6 - Deviazioni balistiche nelle bussole a zavorra liquida

Abbiamo considerato finora il caso delle girobussole costituite essenzialmente da un giroscopio sospeso pendolarmente, come sono la bussola *Sperry* a zavorra solida e tutte le bussole *Anschutz*, nelle quali l'elemento sensibile ha il centro di gravità al disotto del punto di sospensione.

Nelle girobussole a zavorra liquida, cioè nelle *Brown* e nelle *Sperry* dotate di balistico a mercurio, il fenomeno delle deviazioni balistiche descritto nei paragrafi precedenti esiste ugualmente, ma la sua origine è un poco diversa. In tutte queste bussole, infatti i recipienti che contengono il liquido della zavorra sono disposti in modo che il loro centro di gravità coincida praticamente col centro della cassa girostatica. Le forze d'inerzia, perciò si manifestano per effetto di una accelerazione qualunque della nave, non provocano alcun effetto deviatore dell'asse girostatico come invece avviene nelle bussole a zavorra solida. Tuttavia, come si è detto, le deviazioni balistiche si manifestano ugualmente perché le forze d'inerzia tendono a far defluire una parte del liquido-zavorra da un recipiente all'altro, disturbando così la posizione d'equilibrio del giroscopio; la correzione delle deviazioni balistiche è, nelle bussole a zavorra liquida, meno precisa che in quelle a zavorra solida, a causa del ritardo nel passaggio del liquido (olio o mercurio) da una faccia all'altra della cassa girostatica.

10.12.7 – Deviazioni balistiche dovute ad asimmetria delle masse

Quando in una girobussola sono presenti delle asimmetrie delle masse il moto di rollio e beccheggio influenza la direttività dell'asse di spin $\dot{\Omega}$. Se prendiamo in considerazione il moto di rollio intorno all'asse longitudinale, le masse asimmetriche m , considerate per semplicità come riportate in figura 10.33, quando non sono disposte su tale asse, sono soggette ad una forza centrifuga rispetto allo stesso asse di espressione:

$$\begin{aligned} F &= ml\dot{\alpha}^2 \\ OP &= l = r\sin\beta \\ OB &= l\cos\beta \end{aligned} \quad (10.49)$$

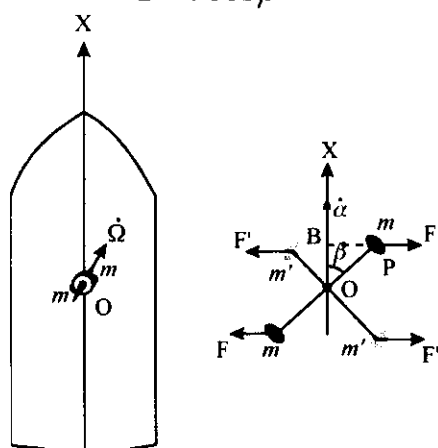


Figura 10.33 – Azione delle masse (m) asimmetriche

A causa del rollio nasce la coppia di equazione di modulo C :

$$\begin{aligned} |C| &= |F \times OB| = [2r\cos\beta][mrs\sin\beta]\dot{\alpha}^2 = \\ &= mr^2\sin 2\beta\dot{\alpha}^2 = I\dot{\alpha}^2\sin 2\beta \end{aligned} \quad (10.50)$$

il cui vettore è sull'asse Z e tende a portare il sistema MM di massa m e l'asse di spin $\dot{\Omega}$ nel piano di oscillazione YZ .

Le case costruttrici, per compensare questa asimmetria, dispongono delle ulteriori masse, per semplicità nella figura sono rappresentate da M_1M_1 , dette masse quadrantal, in posizione simmetrica rispetto all'asse di rotazione, in modo da generare una ulteriore coppia di segno contrario C' di modulo:

$$|C'| = -m_1r_1^2\dot{\alpha}^2\sin 2(90 - \beta) = -I_1\dot{\alpha}^2\sin 2\beta \quad (10.51)$$

L'uguaglianza delle due coppie si ottiene imponendo l'uguaglianza dei momenti di inerzia I ed I_l rispetto all'asse X di rollio, ovvero rispetto ad r ed r_l . Tale compensazione è valida anche per movimenti di beccheggio intorno all'asse trasversale di sospensione cardanica.

10.12.8 – Deviazioni balistiche dovute alla sospensione cardanica

L'inclinazione del piano contenente la sospensione cardanica produce una deviazione molto simile dal punto di vista concettuale a quella che si ha, quando si misura un rilevamento con il piano dell'apparecchio azimutale inclinato rispetto all'orizzonte.

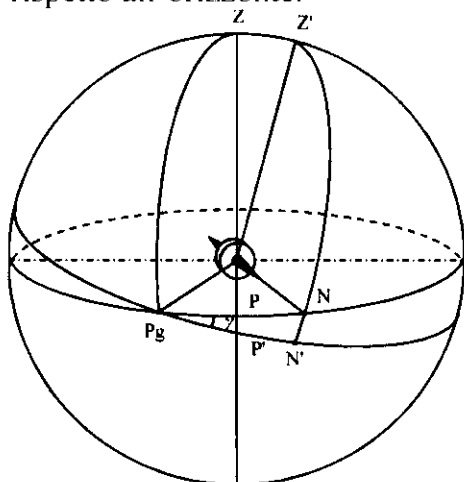


Figura 10.34 – Inclinazione del sistema cardanico

Per studiare questa deviazione consideriamo la sfera di figura 10.34.3.6 con il piano orizzontale coincidente con la sospensione cardanica e sia P l'arco che la girobussola forma con la direzione del nord (N); a causa di una inclinazione γ del piano contenente la sospensione cardanica questo arco diventa P' .

Sia CP_n la direzione dell'asse longitudinale della nave e CN e CN' le direzioni dell'asse del giroscopio nelle due situazioni citate. A nave inclinata la girobussola fornisce una prora P_g con una deviazione $\delta = P - P'$ che può essere calcolata per mezzo della seguente relazione trigonometrica:

$$\tan \delta = \tan(P - P') = \frac{\tan P - \tan P'}{1 + \tan P \tan P'}$$

La $\tan P'$ si ricava considerando il triangolo sferico P_rNN' rettangolo in N' :

$$\tan P' = \tan P \cos \gamma \quad ; \quad \tan \delta = \frac{(1 - \cos \gamma) \tan P}{1 + \tan^2 P \cos \gamma} \quad (10.52)$$

per la quale si calcola il valore massimo derivando rispetto a $\tan P$:

$$\frac{d(\tan \delta)}{d(\tan P)} = \frac{(1 - \cos \gamma)(1 - \tan^2 P \cos \gamma)}{(1 + \tan^2 P \cos \gamma)^2} \quad (10.53)$$

e trascurando il caso banale $\gamma = 0$ (inclinazione nulla), si annulla la derivata prima per $\tan P_{max} = \sqrt{\cos \gamma}$ valore che va sostituito nella (3.21) per ottenere la deviazione massima:

$$\delta_{max} = \tan^{-1} \left[\pm \frac{1 - \cos \gamma}{2\sqrt{\cos \gamma}} \right] \quad (10.54)$$

La (10.54) trovata permette di ottenere una valutazione quantitativa della deviazione prodotta da un'inclinazione della sospensione cardanica; per un angolo di 10° ed una prora di 45° si ottiene una deviazione di 0.4° , valore quest'ultimo trascurabile per una bussola commerciale di navigazione.

10.12.9 - Deviazioni balistiche dovute al rollio e al beccheggio

Ogni bussola giroscopica è sospesa cardanicamente in modo che la sua sospensione, quando la nave sbanda, rimane sempre perfettamente orizzontale. Quando però la nave rolla o beccheggia, poiché gli assi secondo cui avvengono questi movimenti non passano in genere per il punto di sospensione della bussola, si creano delle accelerazioni di varia grandezza e direzione che tendono a spostare la bussola dalla verticale e perturbare la sua posizione di equilibrio.

Lo studio accurato di questo fenomeno è importante perché le deviazioni dovute ai vari movimenti di oscillazione della nave erano nei primi tipi di bussole giroscopiche assai forti; le girobussole sono diventate di uso pratico soltanto quando si è riusciti ad eliminare, almeno in parte, tali deviazioni. Osserviamo anzitutto che, nei riguardi della bussola gi-

roscopica, il rollio per rotta Nord o Sud è equivalente al beccheggio per rotta Est o Ovest e che, quando la nave procede per rombi intercardinali, i due movimenti hanno effetti simili se non ugualmente grandi e dello stesso segno. Parleremo quindi d'ora innanzi del solo movimento di rollio, intendendo che le stesse cose si potrebbero ripetere per il beccheggio, spostando di 90° l'asse di oscillazione del movimento.

Per semplicità di ragionamento consideriamo l'effetto dei singoli movimenti della nave su una bussola mono girostatica del tipo zavorrato.

10.12.10 – Deviazione balistiche dovute al rollio

Il movimento di rollio di una nave può essere espresso da una relazione sinusoidale del tipo:

$$\theta = \theta_o \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (10.55)$$

con θ l'angolo istantaneo di rollio, θ_o il valore massimo di θ , T il periodo completo di una oscillazione e t il tempo contato a partire dalla posizione della nave a ponti orizzontali. Dalla (10.55) è possibile ricavare sia la velocità angolare che l'accelerazione del moto di rollio. La velocità e l'accelerazione angolare sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \theta_o \cos\frac{2\pi}{T}t, \quad \ddot{\theta} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \theta_o \sin\frac{2\pi}{T}t, \quad (\dot{\theta})_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \theta_o$$

con $\ddot{\theta}_{max}$ il massimo valore dell'accelerazione angolare che si verifica a fine rollata. Sia, allora, h la distanza della girobussola dall'asse di rollio; il giroscopio è soggetto ad una accelerazione a il cui valore massimo è:

$$a_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \gamma_o h \quad (10.56)$$

L'accelerazione, agendo sulla massa del giroscopio, genera una forza e quindi coppia di equazione:

$$C = m a_{max} l = \frac{p}{g} a_{max} l \quad (10.57)$$

a) rollio con prora Nord-Sud

Le figure 10.35 e 10.36 illustrano il movimento di un giroscopio zavorrato soggetto ad un moto di rollio con rotta nord. Il giroscopio, come per il caso in precedenza considerato, è posto alla distanza h dall'asse di rotazione (O_1 in sezione) nella posizione normale di funzionamento e nelle due posizioni di massima angolazione θ_0 ; durante la rollata il giroscopio è soggetto alla coppia $\pm C$ data dalla (10.57).

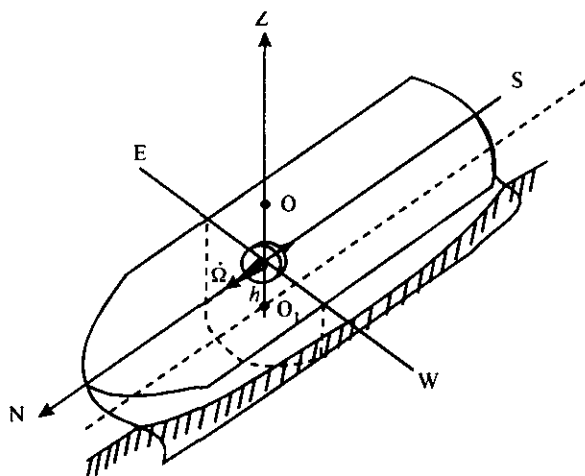


Figura 10.35 – Rollio con prora Nord - Sud

Tale coppia, come si può facilmente verificare dalle rappresentazioni delle sezioni trasversali riportate in figura 10.36, è individuata da un vettore parallelo all'asse di spin che si somma o si sottrae alla velocità di rotazione $\dot{\Omega}$ del giroscopio; il rollio non produce alcun moto di precessione ma ha l'effetto di produrre piccolissime variazioni nella velocità $\dot{\Omega}$ del giroscopio. Con questa prora della nave, pertanto, le accelerazioni prodotte dal rollio della nave non producono alcuna deviazione sulla girobussola.

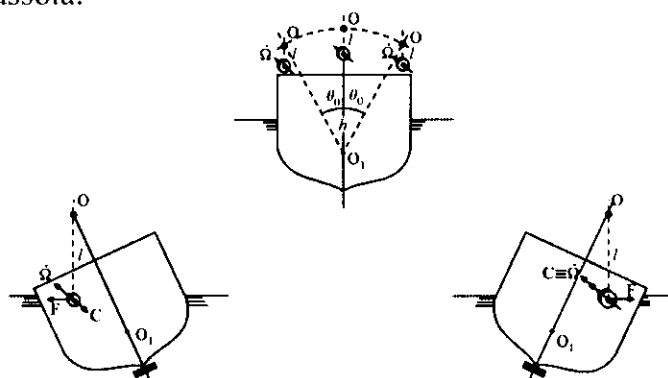


Figura 10.36 – Rollio Nord - Sud: Sezioni trasversali viste da Nord

b) rollio con prora Est-Ovest

Le figure 3.9 e 3.10 illustrano il movimento di un giroscopio zavorrato soggetto ad un moto di rollio con rotta Est.

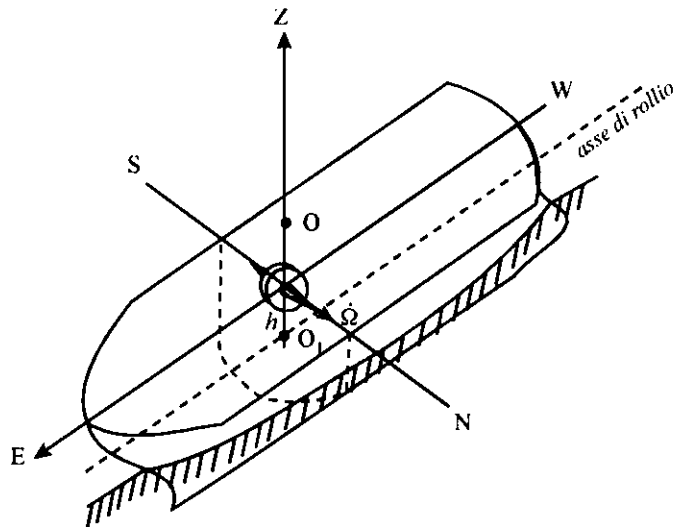


Figura 10.37 – Rollio con prora Est - Ovest

La coppia (10.57), in questa situazione, essendo perpendicolare al vettore di spin $\dot{\Omega}$, produce una precessione $\dot{\gamma}$ che può essere valutata tenendo presente la relazione fondamentale dei giroscopi (10.2):

$$\dot{\gamma}_{max} = \frac{C}{I\dot{\Omega}} = \frac{pl}{I\dot{\Omega}g} a_{max} = \frac{pl}{I\dot{\Omega}g} \frac{4\pi^2}{T^2} \theta_o h \quad (10.58)$$

con il moto di rollio espresso dalla relazione simile alla (10.55):

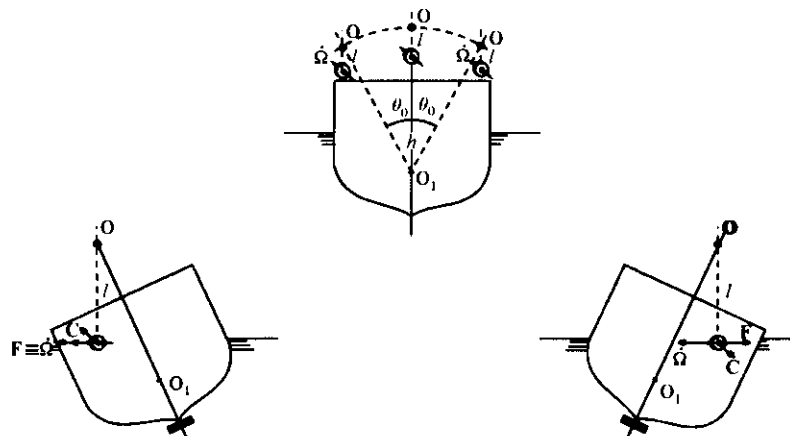


Figura 10.38 – Rollio Est - Ovest: Sezioni trasversali viste da Est

$\gamma = \gamma_o \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ e di velocità $\dot{\gamma} = \frac{2\pi}{T} \gamma_o \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ e di valore massimo:

$\dot{\gamma}_{max} = \frac{2\pi}{T} \gamma_o$. L'uguaglianza di quest'ultima espressione con la (10.58)

fornisce la deviazione massima balistica prodotta dal rollio:

$$\gamma_o = \frac{2\pi plh\theta_o}{TgI\Omega} \quad (10.59)$$

il cui valore quantitativo può essere valutato assegnando gli elementi presenti nella (10.59). Infatti, ponendo:

$$\frac{pl}{I\Omega} = \frac{8 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^6} \left[\frac{\text{dinecm}}{\text{gr cm}^2 \text{ s}^{-1}} \right], \quad Pr = 90^\circ, \quad T = 10^s, \quad \theta_o = 10$$

e supponendo la girobussola distante dall'asse di rollio 3 m si ottiene il seguente valore:

$$\gamma_o = \frac{2\pi}{10} \frac{8 \cdot 10^2}{981} \frac{300 \cdot 10}{4 \cdot 10^6} = 0.038^\circ = 2'$$

valore molto piccolo rispetto ad altre deviazioni della girobussola per cui si può affermare che le deviazioni balistiche, nelle girobussole commerciali, prodotte dal rollio e dal beccheggio con prore cardinali sono trascurabili.

c) rollio con prore intercardinali: deviazioni balistiche quadrantali

Gli effetti del rollio per prore intercardinali *NE*, *SE*, *SW*, *NW* sono molto vistosi ed hanno rappresentato un serio problema nell'uso delle girobussole a bordo delle navi come strumento di navigazione.

Consideriamo una nave con prora *NE*. L'asse di rollio coinciderà con la direzione *NE-SW* come è illustrato in figura 10.39 e con l'asse di spin diretto verso il nord; *O* e *O_l* il centro sospensione del giroscopio e centro di rotazione sull'asse di rollio distanti rispettivamente di *l* ed *h* dal centro di rotazione del giroscopio; *F* è la forza orizzontale che nasce per la presenza dell'accelerazione centrifuga prodotta dal rollio.

La figura 10.40, invece, mostra le varie posizioni del giroscopio sospeso (zavorrato) a nave sbandata dell'angolo massimo θ_o .

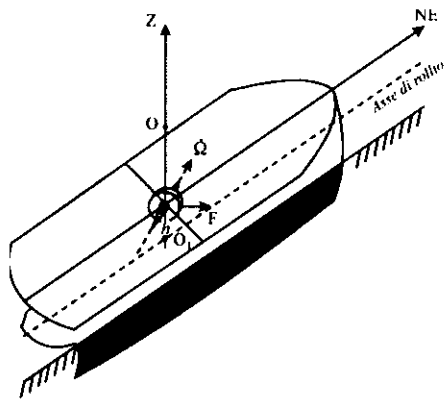


Figura 10.39 – Rollio con prora intercardinale (NE – SW)

In tali posizioni estreme di sbandata l'accelerazione massima è data ancora dalla (10.56) che genera a sua volta la forza F in direzione orizzontale e trasversale:

$$F = ma = \frac{\rho}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} \theta_0 h \sin \frac{2\pi}{T} t \quad (10.60)$$

che va scomposta nelle due componenti in funzione della prora:

$$\begin{aligned} F_{E-W} &= \frac{\rho}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} \theta_0 h \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cos Pr \\ F_{N-S} &= \frac{\rho}{g} \frac{4\pi^2}{T^2} \theta_0 h \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \sin Pr \end{aligned} \quad (10.61)$$

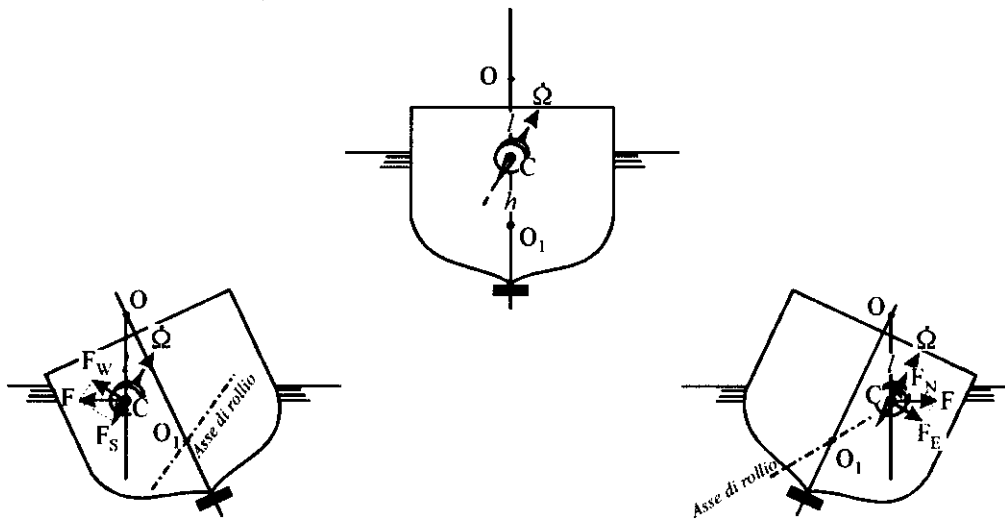


Figura 10.40 – Rollio NE-SW: Sezioni trasversali viste da poppa

La prima delle (10.61), che indichiamo con F_E e diretta per Est (sezione con sbandamento sulla dritta), non produce alcuna deviazione perché la coppia C che genera ha il vettore è nella stessa direzione e verso dell'asse di spin ($\dot{\Omega}$); come nei casi precedenti, il parallelismo fra $\dot{\Omega}$ e C non genera precessione; tuttavia la forza F_E ha l'effetto di disporre il sistema giroscopico zavorrato lungo una verticale apparente che forma l'angolo ε con la verticale vera come riportato in figura 10.41. Risulta ovvio che analogo angolo si verifica con sbandata sulla sinistra ($-\varepsilon$) prodotto dall'azione della F_W e genera una coppia che ha stessa direzione ma verso opposto di $\dot{\Omega}$.

La seconda componente delle (10.61), indicata con F_N , è diretta verso Nord, risulta fuori dalla verticale e produce due effetti:

- una coppia C_D , nel piano verticale diretta ad Est è produce lo stesso effetto studiato dal rollio con prora Est;
- una rotazione antioraria del sistema attorno alla verticale; che produce una forte deviazione balistica.

Per valutare questa deviazione, consideriamo il giroscopio nella posizione opposta e di fine rollata (v. figura 10.42):

In questa posizione si ha: $F_W = -F_E$ e $F_S = -F_N$; queste forze producono le due seguenti azioni:

- una coppia agente nel piano verticale, diretta per Ovest ed uguale a $-C_D$ ed il cui effetto è del tutto trascurabile come la (10.59);
- una rotazione, anch'essa antioraria, del sistema intorno alla verticale.
- $-F_W$ genera l'angolo $-\varepsilon$ fra la verticale vera e quella apparente;
- F_S diretta per Sud produce come F_N altri due effetti:
 - una coppia agente nel piano verticale, diretta per Ovest ed uguale a
 - $-C_D$ che produce una precessione ma di effetto trascurabile come la (10.59);
 - una rotazione, anch'essa antioraria, del sistema intorno alla verticale ($-\varepsilon$)

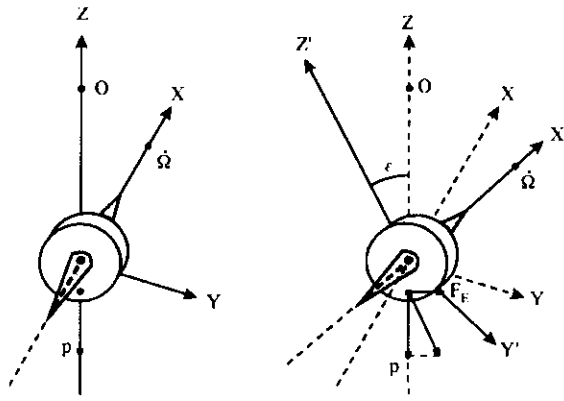


Figura 10.41 – Equilibrio del giroscopio sotto l'azione della forza F_E e della forza peso p .

La coppia $C_D(F_N, F_S)$, rappresentata in figura 10.42, è generata sia da F_N che da F_S ; essa causa una notevole deviazione balistica.

È importante allora farne una valutazione quantitativa; la forza F_N (F_S), applicata nel giroscopio zavorrato dista dalla verticale della quantità:

$$\Delta = l \sin \epsilon \cong l \epsilon \quad (10.62)$$

con l , come abbiamo già introdotto, la distanza fra il centro di sospensione O ed il baricentro G .

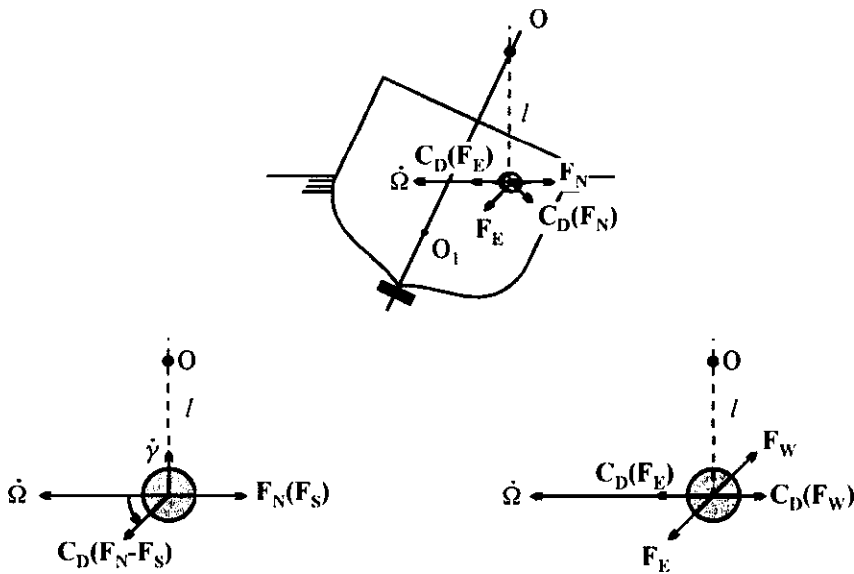


Figura 10.42 – Composizione delle coppie C_D

$$\Delta = l \sin \varepsilon \cong l \varepsilon$$

L'angolo ε può essere calcolato dalla geometria di figura 10.41:

$$\tan \varepsilon \cong \varepsilon = \frac{F_E}{p} = \frac{4\pi^2 h}{g T^2} \theta_o \cos(\text{Pr}) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (10.62)$$

Essendo sia F_N che il braccio Δ appartenenti al piano orizzontale, la F_N genera una coppia C diretta verticalmente e data da:

$$C = F_N \times \Delta = F_N l \varepsilon = \left(\frac{4\pi^2 h}{g}\right)^2 \frac{\theta_o^2}{T^4} \sin(\text{Pr}) \cos(\text{Pr}) \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$C = J \frac{\theta_o^2}{T^4} \sin(\text{Pr}) \cos(\text{Pr}) \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \text{ con } J = \left(\frac{4\pi^2 h}{g}\right)^2 \quad (10.63)$$

La coppia C produce una velocità $\dot{\gamma}$ intorno all'asse Z che si oppone alla rotazione del piano orizzontale γw_1 prodotta dalla rotazione terrestre. L'equilibrio fra le due rotazioni si raggiunge per un dato angolo γ_c tale che valga la seguente relazione:

$$\dot{\gamma} = \frac{C}{I \dot{\Omega}} = \gamma_c w_1$$

dalla quale si può ricavare l'angolo di equilibrio γ_c :

$$\gamma_c = \frac{C}{I \dot{\Omega} w_1} = A \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (10.64)$$

$$A = \frac{J \sin(\text{Pr}) \cos(\text{Pr}) \theta_o^2}{I \dot{\Omega} w_1 T^4}$$

che può essere ulteriormente scritta nel modo seguente:

$$\gamma_c = \frac{A}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \right) \quad (10.65)$$

Osserviamo che la deviazione massima espressa da γ_c dipende:

- dalla quantità $\frac{A}{2}$ costante che dipende da:

- caratteristiche del giroscopio;

- dalla sua posizione a bordo della nave;
- dalla prora della nave;
- dalle caratteristiche del rollio.

- dalla componente armonica di frequenza doppia di quella del rollio.

Il valore della deviazione può essere valutato assegnando ai parametri presenti nelle (10.65) i seguenti valori già prima utilizzati per i calcoli di deviazione giroscopica:

$$\begin{aligned}
 pl &= 8 \cdot 10^4 \text{ (dine cm)} , & I\dot{\Omega} &= 4 \cdot 10^6 \text{ (gr cm}^2 \text{ s}^{-1}) , & g &= 981 \text{ (cm s}^{-2}) \\
 T &= 10 \text{ (s)} , & w &= 72.9 \cdot 10^{-6} \text{ (rad s}^{-1}) , & \phi &= 40 \text{ (}^\circ) \\
 Pr &= 45 \text{ (}^\circ) , & \theta_0 &= 10 \text{ (}^\circ) = 0.17 \text{ (rad)} , & h &= 300 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

la massima deviazione si ottiene quando nella (10.65) si pone $t = \frac{T}{4}$; per questo istante del rollio la deviazione massima è data dal valore di A che va calcolata con i valori prima assegnati:

$$\delta = \gamma_e = A = 0.08 \text{ (rad)} = 4.6 \text{ (}^\circ)$$

valore molto elevato se confrontato con il valore massimo di 2' ricavato per lo stesso giroscopio, nelle medesime condizioni, ma con prora Est-Ovest. Questo valore dimostra come la deviazione balistica per rotte intercardinali (*NE-SW* e *NW-SE*) prodotte dal moto di rollio sia importante ai fini dell'uso della girobussola a bordo delle navi.

La compensazione di questa deviazione per le girobussole molto avanzate è ottenuta stabilizzandola intorno all'asse Est-Ovest per mezzo di un altro giroscopio il cui effetto è quello di mantenere il baricentro del sistema pendolare lungo la verticale vera, annullando in questo modo l'angolo ε . Nelle bussole commerciali ed usate a bordo delle navi mercantili, invece, si usa ammortizzare in maniera viscosa la coppia pl . Si ha così il vantaggio che il sistema non risente l'azione di accelerazioni prodotte da oscillazioni il cui periodo è inferiore alla costante di tempo del sistema zavorrante rispetto alla coppia che produce la deviazione balistica.

Nelle girobussole *Sperry*, con balistico a mercurio, la costante di tempo con cui il mercurio passa dall'una altra vaschetta è molto breve rispetto al periodo di orientamento dell'asse di spin ma abbastanza lungo rispetto a quello del rollio ottenendo così l'effetto orientante ed annullando la deviazione quadrantale.

Nelle girobussole controllate da motore di coppia, l'elemento sensibile pendolare risente delle accelerazioni per meridiano quando già il motore ad asse verticale ha subito l'azione dell'accelerazione prodotta da Est-Ovest. In queste girobussole si interviene rendendo viscoso lo smorzamento pendolare del sistema.

10.13 – Le girobussole - Descrizione di alcuni tipi di giostati.

I diversi tipi di giostati sospesi realizzati nelle girobussole, zavorrati o anti zavorrati, hanno contraddistinto sin dall'inizio la girobussola di *Sperry* da quella di *Anschutz*. La prima bussola giroscopica, costruita nel 1908 da *Anschutz*, era del tipo sospeso con il giroscopio connesso ad un galleggiante (1) che pescava in un mortaio (2) ripieno di mercurio. Il giroscopio (3) era contenuto in una cassa (4) fissata rigidamente al di sotto del galleggiante circolare che pescava nel mortaio ed al quale era fissata la rosa (5), (figura 10.43).

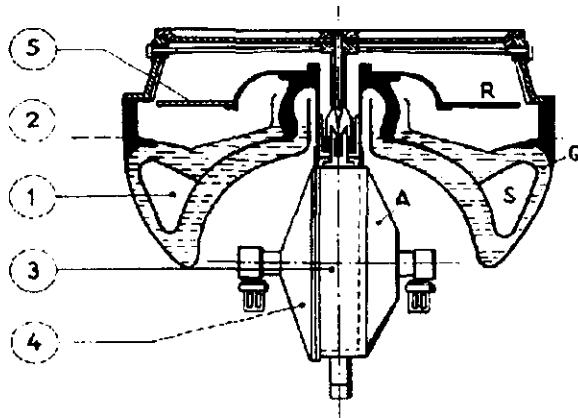


Figura 10.43 - Girobussola zavorrata tipo *Anschutz*

In virtù di questa realizzazione il giroscopio aveva libertà di movimento nello spazio, anche se il movimento in altezza era piuttosto limitato. Poiché il centro di gravità giaceva al disotto del centro di spinta e sulla stessa verticale, la coppia C_a formata dal peso e dalla spinta tendeva continuamente a mantenere i due punti sulla verticale, come in un pendolo, ed a rendere l'asse del giroscopio orizzontale, realizzando così un giroscopio del tipo zavorrato.

Nel primo tipo di girobussola costruito in America dalla ditta *Sperry* e denominata Mark I, il carattere di giroscopio sospeso era conferito dalla zavorra solida applicata inferiormente alla cassa contenente il giroscopio (v. figura 10.44).

Questa girobussola era composta dalle seguenti parti: elemento sensibile (1), formato dalla cassa contenente il giroscopio e dalla zavorra solida (4); anello verticale (5) portante su appositi perni orizzontali (2) l'elemento sensibile e nella parte inferiore un perno di blocco (9); cerchio fantasma (6) formante un pezzo unico con la rosa; sospensione filare (3) che faceva capo tramite apposito cuscinetto (7), alla rosa che sorreggeva l'elemento sensibile; sospensione (8), con cerchio orizzontale della sospensione cardanica. Il giroscopio contenuto nella cassa (1) aveva tre gradi di libertà, il centro di gravità del sistema coincideva col centro del giroscopio, ma con l'applicazione del peso aggiuntivo (4) era ridotto il moto in altezza del suo asse assimilando così il funzionamento a quello del giroscopio zavorrato. Infatti, la zavorra tendeva continuamente a riportare orizzontale l'asse del giroscopio che acquistava così il moto di precessione orizzontale e di conseguenza la possibilità di orientarsi

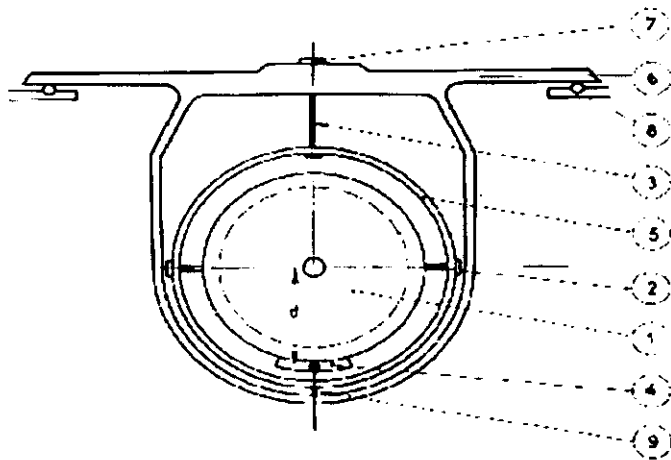


Figura 10.44 - Girobussola sospesa tipo *Sperry*

Come già prima trovato l'asse di spin della girobussola, come già studiato, tende ad orientarsi lungo il meridiano compiendo delle oscillazioni intorno alla posizione d'equilibrio, durante le quali descrive curve ellittiche più o meno ampie a seconda della latitudine e distribuite in parte sopra, in parte sotto al piano orizzontale; inoltre, come più volte sottolineato, se le oscillazioni venissero smorzate solamente per effetto degli attriti e della resistenza del mezzo in cui ruotano la loro durata risulterebbe talmente lunga da rendere poco pratico l'uso delle bussole giroscopiche. Per ovviare a tale problema si ricorre a sistemi di smorzamento meccanici con i quali viene consentito all'asse di disporsi nella posizione di equilibrio in un tempo relativamente breve; Tali sistemi producono movimenti di precessione per i quali l'asse del giroscopio

tende continuamente ad avvicinarsi alla posizione di equilibrio. Essi sono realizzati producendo delle coppie di forze agenti sull'asse del giroscopio o nel piano orizzontale C_{so} , come nel caso delle girobussole *Sperry*, o nel piano verticale C_{sv} , come nelle girobussole *Anschutz* e *Microtecnica*.

Per renderci conto di come è possibile generare delle coppie di smorzamento mettiamo a confronto la girobussola *Sperry* MK XIV e la girobussola *Microtecnica* MB-7.

10.14 – Girobussola SPERRY

10.14.1 – Descrizione della Girobussola SPERRY MK XIV

Questa girobussola è costituita da un giroscopio ruotante con il minimo attrito con l'asse di spin $\dot{\Omega}$ coincidente con l'asse orizzontale X , internamente alla cassa imperniata sull'asse orizzontale Y (ortogonale al primo) mediante appositi cuscinetti e sostenuta dal cerchio verticale. Il cerchio verticale è sospeso tramite fili rigidi non torcenti ed è guidato attraverso appositi cuscinetti per permettere una libera oscillazione, di limitata ampiezza, intorno all'asse verticale Z . Il cerchio fantasma ha superiormente un gambo cavo nell'interno del quale passa la sospensione filare facente capo alla parte superiore del gambo e porta gli anelli collettori su cui strisciano le spazzole per il collegamento elettrico. Assicurata rigidamente al gambo del fantasma c'è una grande ruota dentata (ingranaggio di azimut) con 360 denti, uno per ogni grado d'azimut, su cui è montata la rosa della bussola. Tale ruota dentata è posta in rotazione dal motorino d'azimut ed è in grado di far ruotare il cerchio fantasma. Il motorino d'azimut è fissato su una crociera sulla quale c'è l'anello su cui è ricavata la linea di fede; la funzione del motore d'azimut è quella di comunicare direttamente alle ripetitrici della girobussola ogni movimento eseguito dalla rosa. Il *giroscopio*, la *cassa*, il *cerchio verticale*, il *cerchio fantasma* e l'*elemento di controllo* (costituito da quattro serbatoi riempiti in parte da mercurio e collegati tra loro mediante due tubicini simmetricamente disposti rispetto all'asse del giroscopio) nel loro insieme compongono la girobussola; tutte le altre parti costituiscono dei meccanismi atti a riprodurre fedelmente i suoi movimenti e trasmetterli alla rosa.

Per trasmettere questi movimenti è utilizzato un trasformatore fissato al cerchio verticale su una speciale armatura ed è noto come *motore di inseguimento* dato che trascina il cerchio fantasma sul quale è montata la rosa graduata; il tutto allo scopo di permettere al cerchio fantasma di seguire il cerchio verticale e quindi l'elemento sensibile.

Ciò permette alla rosa di orientarsi senza interferire nella libertà di movimento dell'elemento sensibile, riducendo al minimo le resistenze di attrito delle parti in movimento. Quando si mette in moto la girobussola l'asse del giroscopio, per effetto della rotazione terrestre, apparentemente si solleva e il mercurio contenuto nei serbatoi di levante (considerando l'asse inizialmente diretto per Est-Ovest) passa in quelli di ponente e, causa la connessione eccentrica, si producono due coppie, una agente sul piano verticale C_{α} che produce il moto di precessione orizzontale dell'asse verso il Nord ed una agente sul piano orizzontale C_{ω} che provoca una precessione verticale, sempre diretta verso l'orizzonte che fa smorzare l'oscillazione dell'asse.

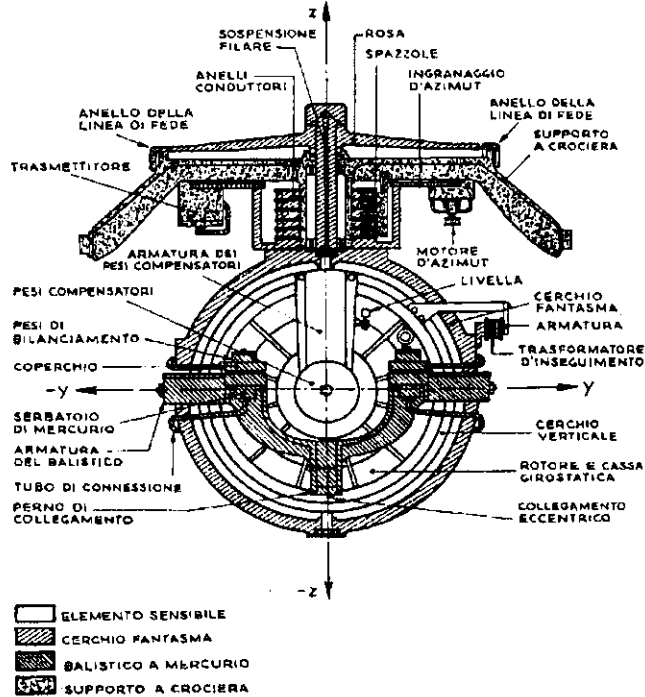


Figura 10.45 - Schema di una girobussola *Sperry*

10.14.2 - Coppia di smorzamento nella girobussola *SPERRY*

L'asse del giroscopio, dopo aver compiuto delle oscillazioni ellittiche, raggiunge la posizione di equilibrio secondo la direzione meridiana ($N-S$) leggermente sopraelevato, nell'emisfero Nord, e depresso, nell'emisfero Sud, rispetto al piano orizzontale. Il moto ellittico è volutamente smorzato mediante un'apposita coppia opportunamente introdotta nel sistema giroscopico dato che, come più volte detto, le sole re-

sistenze di attrito (interne ed esterne) non sono capaci di smorzare rapidamente le oscillazioni dell'asse di spin $\dot{\Omega}$. Nelle girobussole *Sperry* il sistema meccanico di smorzamento è stato realizzato collegando il sistema balistico di mercurio eccentricamente alla cassa giroscopica (v. figure 10.46° e 10.46b).

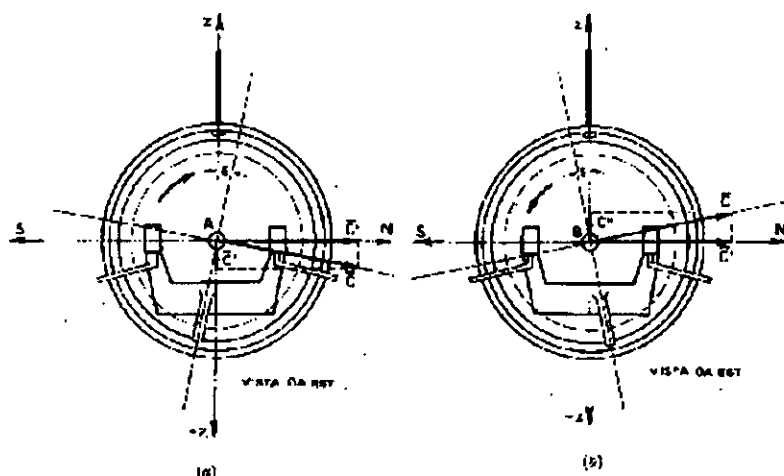


Figura 10.46 – Scomposizione della coppia di smorzamento

La connessione è fatta mediante un piolo di collegamento leggermente spostato ad Est. A causa del collegamento eccentrico la coppia C , prodotta dalla rotazione dell'orizzonte intorno alla linea N-S, dovuta C_u allo scorrimento del mercurio nei serbatoi, viene ad agire su un piano inclinato dell'angolo ε rispetto a quello verticale, in modo che il vettore coppia si scompone secondo gli assi orizzontale e verticale in due vettori coppie $\bar{C}'(C_u)$ e $\bar{C}''(C_{sv})$.

La coppia C' , agente sul piano verticale, produce il moto di precessione orizzontale che porterà alla fine del moto l'asse del giroscopio lungo il meridiano; mentre quella agente sul piano orizzontale $C'' = C \sin \gamma$, produce un moto di precessione verticale che smorza con una certa rapidità le oscillazioni dell'asse del giroscopio. La coppia di smorzamento C' , applicata al piano orizzontale, si oppone sempre al moto ellittico acquistato dall'asse del giroscopio, smorzando il moto stesso (v. figura 10.47). Sotto l'azione della velocità di precessione verticale prodotta dalla coppia di smorzamento, l'asse del giroscopio segue il moto risultante dovuto alla composizione della velocità ellittica (V_e) e dalla velocità di precessione verticale (V), la quale per il principio del parallelismo delle rotazioni tende a portare l'asse di spin $\dot{\Omega}$ (asse $A-B$ della figura 10.47, perpendicolare al piano del foglio) sul vettore \bar{C}'' .

Nel punto A' della curva l'asse del giroscopio segue una traiettoria tangente al nuovo vettore risultante V' , meno inclinato rispetto alla tangente alla traiettoria ellittica. Dopo una semi oscillazione l'asse del giroscopio, inizialmente orientato su H , raggiunge la posizione H' .

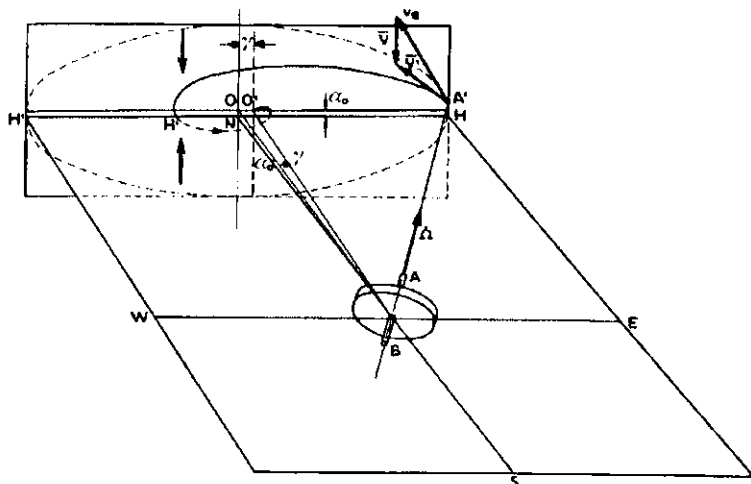


Figura 10.47 – Ellisse di orientamento

Dalla figura 10.46b si nota che il vettore \bar{C}'' ha cambiato il verso rispetto alla posizione iniziale di figura 10.46a, infatti è diretto secondo il semiasse verticale positivo Z ; quindi, sempre per il principio del parallelismo delle rotazioni, il vettore $\bar{\Omega}$ tenta di raggiungerlo, seguendo questa volta, un moto di precessione verticale di senso contrario al primo. Concludendo si può rilevare che a causa del collegamento eccentrico la coppia di smorzamento cambia senso, non direzione, ogni volta che l'asse del giroscopio attraversa il piano orizzontale ($H-H'$), creando così un moto di smorzamento sempre verso l'orizzonte; l'estremo A dell'asse del giroscopio è riportato prontamente nel piano orizzontale e la curva da esso descritta è una specie di spirale ellittica che si avvicina indefinitamente al meridiano. Sotto l'azione della coppia di smorzamento la posizione di equilibrio del giroscopio non coincide con la linea meridiana $N-S$; infatti, a causa della coppia C'' , la velocità di precessione non uguaglia più la componente

$$\dot{\gamma} = \frac{pl}{I\Omega} \sin\alpha \quad (10.66)$$

della velocità di rotazione terrestre $w_2 = w \sin\phi$, anzi rimane indietro rispetto al meridiano deviando verso Est di un angolo γ nell'emisfero Nord e verso Ovest nell'emisfero Sud. L'asse del giroscopio acquista una nuova posizione di equilibrio quando:

$$w \cos \phi \sin \gamma = \frac{C''}{I \dot{\Omega}} = \frac{C_{sv} \sin \alpha}{I \dot{\Omega}}$$

Sapendo che: $\sin \alpha_0 = \frac{I \dot{\Omega}}{pl} w_2 = \frac{I \dot{\Omega}}{pl} w \sin \phi$ e: $C = pl \sin \alpha_0$,

sostituendo e semplificando si ha :

$$\sin \gamma = \sin \alpha_0 \tan \phi \quad (10.67)$$

Quest'ultima espressione rappresenta la deviazione di smorzamento, funzione della latitudine e della costante $\sin \alpha_0$. Dalla discussione risulta che in latitudine Nord la deviazione è positiva o Est, all'equatore è nulla, mentre nell'emisfero meridionale è negativa o Ovest; essa aumenta con la tangente di ϕ . Possiamo, dunque, dire che a causa della coppia di smorzamento, agente nel piano orizzontale C_{so} , l'asse del giroscopio si orienta deviato di un angolo γ rispetto al meridiano per annullare l'azione della coppia di smorzamento. Nella posizione di equilibrio l'asse di spin è inclinato di un angolo α_0 rispetto all'orizzonte; in questa posizione è sempre in grado di inseguire il meridiano ruotando intorno alla verticale con velocità ($w_2 = w \sin \phi$).

10.15 – La girobussola *MICROTECNICA*

10.15.1 – Descrizione della girobussola *MICROTECNICA MB-7*

Questa girobussola si può ritenere costituita dai seguenti elementi principali : *sfera del giroscopio o elemento sensibile, sfera d'inseguimento* su cui è fissa la rosa, *sistema d'inseguimento* tra l'elemento sensibile e la sfera esterna, *elemento di sostegno e moto ventilatore*, più una serie di altri elementi riportati in figura 10.48 e nella quale sono stati riportati i seguenti elementi con i quali è assemblata la girobussola.

In questo tipo di girobussola è stato realizzato il principio di giroscopio zavorrato; infatti l'elemento sensibile, immerso nel liquido portante e conduttore, ha il centro di gravità al di sotto del centro di spinta; quando gli assi dei due giostati si innalzano o si abbassano rispetto all'orizzonte, per effetto della rotazione terrestre, nasce la coppia rad-drizzante nel piano verticale C_{sv} , che genera il movimento di precessione dell'elemento sensibile verso il Nord.

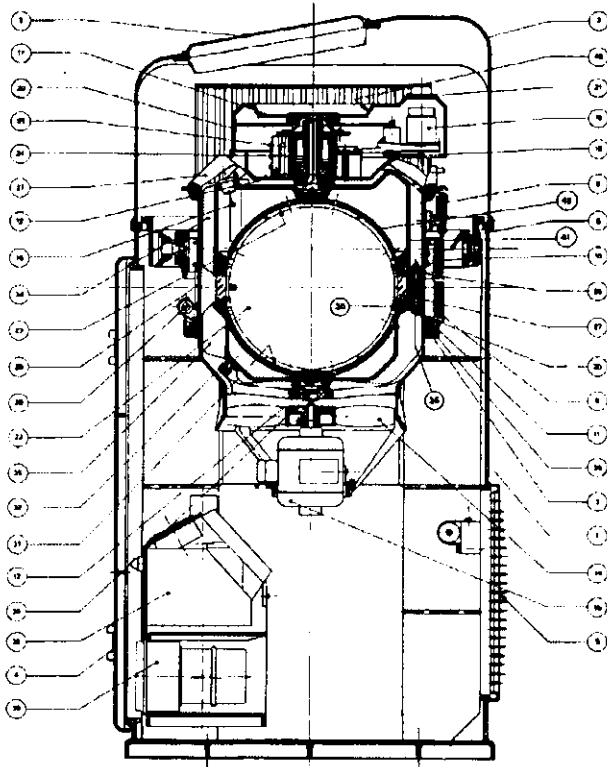


Figura 10.48 - Schema di una girobussola Microtecnic

(1) Chiesuola. (2) Cappa superiore della chiesuola. (3) Finestra di lettura. (4) Portelle anteriori chiesuola. (5) Intelaiatura posteriore ad alette. (6) Sospensione cardanica. (7) Anello portante. (8) Sospensione elastica (molle a spirale superiore). (9) Sospensione elastica (molle a spirale inferiore). (10) Molle a balestra. (11) Convogliatore dell'aria. (12) Cuscinetto d'inseguimento superiore. (13) Cuscinetto d'inseguimento inferiore. (14) Ventola di raffreddamento. (15) Motoventilatore. (16) Termostato di comando motoventilatore. (17) Rosa graduata. (18) Treno degli ingranaggi. (19) Sincro d'inseguimento. (20) Involucro metallico di protezione. (21) Livella a bolla d'aria. (22) Sfera dei giroscopi (elemento sensibile). (23) Calotta conduttrice superiore. (24) Semiasse superiore. (25) Collettore ad anelli. (26) Fascia conduttrice semisfera superiore. (27) Anello centrale plexiglass. (28) Finestra per lettura diretta. (29) Lampada. (30) Fascia conduttrice semisfera inferiore. (31) Calotta conduttrice inferiore. (32) Foro con tappo a vite. (33) Semiasse inferiore. (34) Alette di refrigerazione (superiori). (35) Alette di refrigerazione (inferiori). (36) Perni di unioni delle parti. (37) Uscita aria di raffreddamento. (38) Amplificatore. (39) Gruppo reversibile trasmettitori. (40) Linea di fede. (41) Mortaio. (42) sfera esterna.

In realtà l'orientamento dell'elemento sensibile è dato dall'effetto risultante dei due girostati combinato con la rotazione terrestre $w_1 = w \cos \phi$ e con l'azione del sistema di smorzamento a trugolo ad olio. L'elemento sensibile è contenuto nella sfera d'inseguimento ed è sempre seguita da questa. Tale sfera esterna (detta anche *fantasma*) contiene liquido portante entro il quale è immerso l'elemento sensibile, li-

bero di ruotare perché sostenuto dalla spinta idrostatica e dalla reazione prodotta dalla bobina di repulsione posta all'interno della sfera dei giroscopi. La rosa della bussola è portata dalla sfera esterna, la quale segue l'elemento sensibile ruotando su cuscinetti a sfere con il minimo attrito. Il sistema d'inseguimento tra la sfera esterna e l'elemento sensibile avviene tramite appositi circuiti elettrici e sincronizzazione d'inseguimento.

10.15.2 - Coppia di smorzamento nella girobussola MICROTECNICA

La sfera galleggiante contiene, oltre ai due giroscopi montati entro una apposita gabbia, la bobina di repulsione e il truogolo di smorzamento delle oscillazioni posti nella parte superiore dell'elemento sensibile. Il truogolo (v. figura 10.49), è diviso in due scompartimenti stagni, in *N* ed *S*, a loro volta divisi in quattro settori collegati tra loro mediante spezzoni di tubo di piccolo diametro entro i quali sono infilati dei fili metallici.

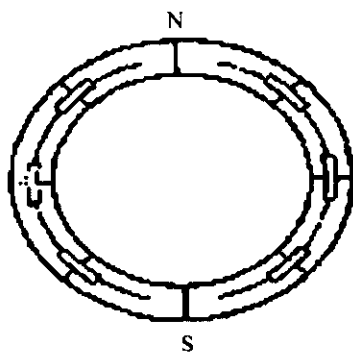


Figura 10.49 - Circuito di smorzamento

Con l'olio contenuto nel truogolo si realizza un sistema di smorzamento a coppia verticale C_{sv} , figura 10.50, e di conseguenza un moto di precessione orizzontale, il cui verso è sempre rivolto al piano del meridiano.

Supponiamo che il giroscopio sia orientato sul punto B'' situato ad Est del meridiano (v. figura 10.50) e leggermente sollevato rispetto all'orizzonte (H, H'): sotto l'azione dell'inerzia giroscopica e del moto di precessione orizzontale prodotto dalla zavorra p , il suo asse segue il movimento sull'orbita ellittica con velocità V_c , ma a causa della presenza senza della coppia di smorzamento C_{sv} prodotta dall'olio occupante i

settori N del truogolo, si genera un moto di precessione orizzontale di verso antiorario e di velocità \bar{V} ; di conseguenza l'estremo B dell'asse del giroscopio segue un moto risultante, somma vettoriale del moto ellittico e del moto di precessione orizzontale di smorzamento, che nel piano su cui è tracciata la traiettoria dell'asse è rappresentato dal vettore \bar{V}' . L'estremo dell'asse allora si sposta tangenzialmente a questo nuovo vettore (\bar{V}') dirigendosi verso il meridiano con maggiore velocità e con minore inclinazione rispetto all'orbita ellittica.

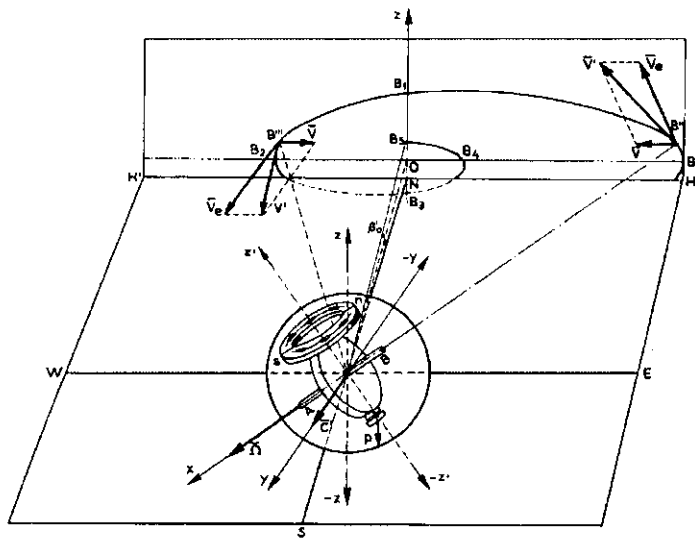


Figura 10.50 - Curva di smorzamento nella giubussola Microtecnica

Se T rappresenta il tempo che impiega il giroscopio a compiere una oscillazione completa dato dalla D.30 e qui di seguito fornito dalla (4.3); dopo $T/4$ l'asse del giroscopio, partito dal punto B' con l'olio nei settori N , si trova in B_1 .

$$T_s = \frac{2\pi}{b} = 2\pi \sqrt{\frac{plw_i}{H} - \frac{plC_{sv}}{4H^2}} \quad (10.68)$$

In questo punto l'asse del giroscopio passa in meridiano sollevato rispetto all'orizzonte di un certo angolo, mentre l'olio contenuto nel truogolo si è distribuito uniformemente negli otto compartimenti in modo che la coppia C_{sv} di smorzamento è nulla; essa inizia a manifestarsi nuovamente, col verso cambiato, man mano che l'estremo B dell'asse passa ad Ovest del meridiano. Infatti, il verso della coppia verticale di smorzamento C_{sv} e del moto di precessione orizzontale V sono cambiati

, perché l'olio ora defluisce nei settori N del truogolo anche nel punto B''' ; l'estremità B dell'asse del giroscopio segue il moto risultante del moto ellittico e da quello di precessione dovuto alla coppia di smorzamento. In questa posizione la coppia prodotta dalla zavorra p e la coppia di smorzamento ha versi contrari, perché la zavorra provoca una rotazione antioraria del giroscopio intorno all'asse y , mentre la coppia di smorzamento provoca una rotazione oraria. L'asse del giroscopio, seguendo il suo moto tangente alla risultante dei due movimenti, dopo un altro quarto di periodo dalla posizione B_1 giunge in B_2 e poi in B_3 con l'asse depresso rispetto all'orizzonte, ma in meridiano. In questa posizione la coppia di smorzamento è ancora nulla, perché durante il movimento, eseguito nell'ultimo intervallo $T/4$, l'olio contenuto nel truogolo si è distribuito nuovamente su tutti i settori. Da questa posizione l'estremo dell'asse passa da Est della linea meridiana, mentre l'olio scorre lentamente nei settori Nord; dopo un altro quarto di periodo giunge in B_4 , dove si riproduce il moto corrispondente a quello della posizione B' ; dopo di che in un intervallo di tempo uguale a $T/4$ l'asse giunge in B_5 , assumendo la posizione di equilibrio. Si ritiene perciò che il tempo impiegato dall'asse del giroscopio per percorrere i singoli tratti della traiettoria spiraliforme sia, con una certa approssimazione, uguale ad un quarto di periodo (T).

L'asse del giroscopio si stabilizza sollevato rispetto al meridiano di un certo angolo α_0 , leggermente diverso da quello corrispondente alla posizione di equilibrio determinata quando nel giroscopio non esisteva la coppia di smorzamento.

Dal movimento spiraliforme seguito dall'asse giroscopico intorno alla linea meridiana l'olio è fatto defluire attraverso i tubi dagli scompartimenti N a quelli S o viceversa, con un certo ritardo rispetto al deflusso naturale; infatti, se deflusso avvenisse senza ritardo, accadrebbe che l'olio si raccoglierebbe negli scompartimenti indicati con S , quando l'estremo dell'asse B è sollevato sull'orizzonte, negli scompartimenti indicati con N , quando l'estremo B è depresso, mentre sarebbe equamente distribuito in tutti i settori se l'asse fosse orizzontale. È evidente che in tali condizioni il senso della coppia smorzante prodotta dall'olio si invertirebbe quando l'asse del giroscopio è sul piano orizzontale, producendo, in tale istante, l'inversione nel senso della precessione orizzontale che dovrebbe smorzare le oscillazioni.

Tale comportamento non raggiungerebbe lo scopo a cui la coppia è destinata, perché dovendo questa ridurre un moto di precessione tendente a portare l'asse sempre verso il meridiano (verso ponente quando l'asse

è a levante e verso levante quando l'asse è a ponente) il senso di essa deve necessariamente invertirsi quando l'asse raggiunge il meridiano e non l'orizzonte. Ecco la necessità di regolare il deflusso dell'olio in modo che esso avvenga con un ritardo calcolato. Il liquido si deve perciò trovare equamente distribuito nei settori N e S quando l'asse del giroscopio è in meridiano, cioè in B_1 , B_3 e B_5 , perché in tale istante la coppia di smorzamento si inverte. E' a tale scopo che i tubicini colleganti i vari settori del truogolo portano dei fili metallici la cui funzione è proprio quella di ritardare il deflusso dell'olio. Regolando le dimensioni dei fili all'atto del montaggio dell'elemento sensibile si può ottenere che il ritardo nella inversione del senso della coppia di smorzamento sia esattamente di $1/4$ di periodo. Si ottiene così una coppia il cui senso è sempre tale da produrre una precessione orizzontale che avvicini l'asse al meridiano.

Si è supposto che in B_3 l'asse del giroscopio si stabilizzi in meridiano; ora, avviene che l'olio contenuto nel truogolo defluisce nei settori s provocando una coppia verticale in contrasto con la coppia raddrizzante dovuta alla zavorra; perciò per mantenersi orientato, l'asse del giroscopio dovrà assumere una inclinazione maggiore rispetto all'orizzonte. Questa maggiore inclinazione è necessaria perché la precessione dell'asse del giroscopio abbia una velocità eguale alla velocità di rotazione del piano dell'orizzonte intorno alla velocità $w_2 = w \sin \phi$, non provocando così alcun moto di precessione.

10.16 - Fattore di smorzamento

In APPENDICE D sarà definita l'equazione della spirale logaritmica

$$\rho = (\gamma_0 - \gamma_e) e^{-v \frac{T_s}{2\pi} \theta(t)} \quad (10.69)$$

dell'asse di spin sotto l'azione della coppia di smorzamento ed il fattore di smorzamento come rapporto tra due ampiezze di oscillazioni e qui di seguito riportata (rel. D.44):

$$\Phi = \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-v(t_2-t)} = e^{-\frac{C_w T_s}{4H}} \quad (10.70)$$

Con i sistemi ora descritti lo smorzamento delle oscillazioni è considerevolmente accelerato. L'efficacia di questi sistemi è espressa mediante il fattore di smorzamento che è il rapporto fra l'ampiezza di una semi

oscillazione e quella della semi oscillazione successiva. Il fattore di smorzamento è all'incirca uguale a 3, il che significa che alla fine di ogni semi oscillazione la distanza dell'asse del giroscopio dal meridiano si riduce a circa $1/3$ della distanza all'inizio di quella semi oscillazione stessa. Se per esempio l'asse del giroscopio è deviato di 90° verso Est ed il periodo di oscillazione è di 85^m , periodo di Schuler, dopo la prima semi oscillazione arriverà a 33° , dopo la seconda semi oscillazione arriverà a 10° in un periodo di 85^m ; e successivamente a $356^\circ,6$ alla terza semi oscillazione e ad $1^\circ,1$ alla fine della quarta, dopo altri 85^m ; alla quinta semi oscillazione l'asse si orienterà sulla direzione corrispondente a $0^\circ,4$, dopo altri $42^m,5$. Da ciò si può rilevare che se il periodo di oscillazione dell'asse del giroscopio è di 85^m , il tempo necessario affinché la girobussola si orienti è di circa 4^h . Se, ad esempio, l'asse è deviato inizialmente di 30° ad Est, dopo la prima semi oscillazione arriverà a $10^\circ W$, dopo la seconda a $3^\circ,3 E$ e successivamente a $1^\circ,1$ ecc., finché si fermerà nella posizione d'equilibrio O (v. figura 10.51).

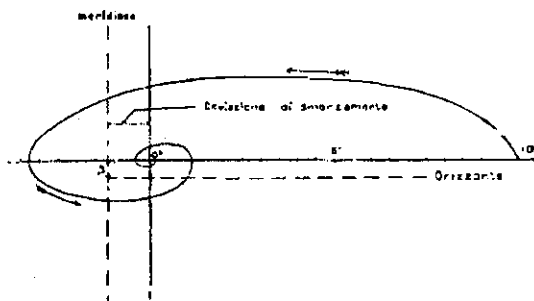


Figura 10.51 – Curva di smorzamento girobussola *Sperry*

La figura 10.51 mostra la curva descritta dalla estremità Nord dell'asse di una girobussola *Sperry* nell'orientarsi in meridiano: essa ha la forma di una spirale ellittica nella quale l'ampiezza delle spire va rapidamente riducendosi. Si noti come la posizione di equilibrio risulti alquanto scostata dal meridiano a causa della deviazione di smorzamento.

È importante tenere presente che pur con l'effetto dello smorzamento l'asse del giroscopio impiega sempre un certo tempo per orientarsi in meridiano. Tale tempo dipende evidentemente dalla posizione iniziale dell'asse e dalla durata di un'oscillazione; quando l'asse di spin parte da 90° dal meridiano il tempo di orientamento è di circa $1,5^h$ nella *Sperry* e di circa 2^h per le *Anschutz* e *Microtecnica*, per cui occorre, in genere, un tempo di 3^h o 4^h perché la girobussola possa considerarsi orientata. Per questo motivo conviene che la girobussola sia messa in moto almeno 5^h o 6^h prima della partenza della nave.

10.A.1 – Quantità di moto, momento della quantità di moto e momento di Inerzia

Nella trattazione fisico matematica dei giroscopi occorre prima di tutto richiamare alcune definizioni di meccanica razionale: *la quantità di moto (Q), il momento della quantità di moto (H) ed il momento di inerzia (I).*

a) La quantità di moto di un punto materiale è il prodotto della massa per la sua velocità $Q=mv$; da questa equazione è possibile ricavare una relazione che lega la forza applicata alla variazione della quantità di moto; infatti derivando l'equazione della quantità di moto si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{dQ}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma = F \quad , \quad F = \frac{dQ}{dt} \quad (10.A.1)$$

per cui la variazione della quantità di moto è uguale alla forza applicata.

b) il momento della quantità di un punto materiale (vedi figura 10.A.1), di massa m , rotante attorno all'asse OK è rappresentato dal vettore H definito dal prodotto vettoriale del vettore quantità di moto Q per la distanza r dall'asse OK :

$$H = r \times Q \quad (10.A.2)$$

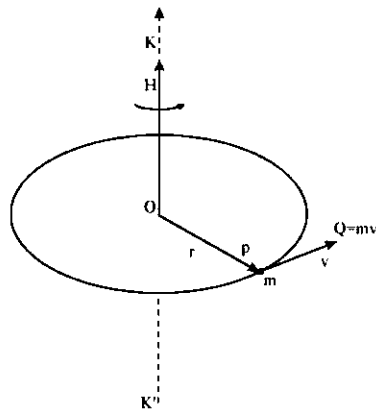


Figura 10.A.1 – Massa elementare ruotante

Per il caso semplicistico di un punto materiale ruotante attorno all'asse, il momento H è dato semplicemente dal prodotto rQ coinci-

dente in direzione e verso con l'asse di rotazione OK . Da questa relazione è possibile ricavare una importante equazione che lega la variazione del momento della quantità di moto con la coppia C . Infatti se si deriva rispetto al tempo la (10.A.2) si ha:

$$\frac{dH}{dt} = r \frac{dQ}{dt} = rF = C, \quad C = \frac{dH}{dt} \quad (10.A.3)$$

relazione importante perché lega la coppia C con la variazione di H . Queste relazioni possono essere estese anche ai corpi di dimensioni finite.

Si consideri, allora, un corpo a forma di disco ruotante attorno al suo asse principale di simmetria KK' (vedi figura 10.A.2). Una particella del disco di massa dm , posta alla distanza r dall'asse di rotazione, avrà come momento della quantità di moto H la seguente espressione:

$$dH = r \times (dm \cdot v)$$

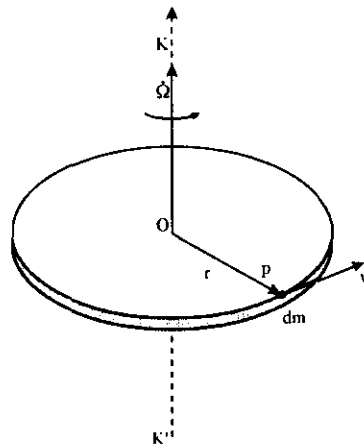


Figura 10.A.2 – Disco ruotante

in cui dH è un vettore parallelo all'asse KK' con il verso definito dalla regola della mano destra 10.A. Il modulo di dH è dato da:

$$dH = r dm v = \dot{\Omega} r^2 dm$$

avendo indicato con $\dot{\Omega}$ il vettore velocità angolare del disco ruotante. Il disco avrà allora un momento della quantità di moto H , nella direzione dell'asse KK' e di modulo:

$$H = \int_V dH = \dot{\Omega} \int_V r^2 dm = \dot{\Omega} \int_V r^2 \rho dV = \dot{\Omega} I \quad (10.A.4)$$

con I momento d'inerzia del disco rotante rispetto all'asse di rotazione KK' ; quindi il momento della quantità di moto uguaglia il prodotto della velocità angolare del disco per il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione. Se, allora, pensiamo di applicare una forza F , tangente e complanare al disco, essa determina una coppia C di modulo $C=rF$, per cui tenendo presente la (10.A.3) e la (10.A.4) si ottiene la seguente equazione:

$$C = I\ddot{\Omega} \quad (10.A.5)$$

valida per l'intero disco a condizione che H sia relativo a tutto il disco ed avendo indicato con $\ddot{\Omega}$ l'accelerazione angolare.

Le relazioni ricavate, per le condizioni descritte, forniscono l'importante relazione fra la coppia applicata, il momento di inerzia e l'accelerazione angolare del disco rispetto all'asse di rotazione KK' .

10.A.2 – Equazione di *Eulero*

Sia $OXYZ$ una terna di riferimento con centro O coincidente con il centro del disco rotante; le relazioni (10.A.4) e (10.A.5) possono essere scomposte, rispetto alla terna di riferimento, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} H &= I_x \dot{\Omega}_x + I_y \dot{\Omega}_y + I_z \dot{\Omega}_z \\ C &= C_x i + C_y j + C_z k \end{aligned} \quad (10.A.5)$$

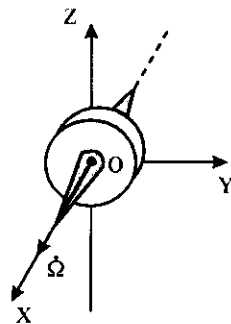


Figura 10.A.3 – Giroscopio libero

nella quale (I_x, I_y, I_z) , (C_x, C_y, C_z) e $(\dot{\Omega}_x, \dot{\Omega}_y, \dot{\Omega}_z)$ sono le componenti dei momenti di inerzia I , della coppia C , della velocità angolare $\dot{\Omega}$ e (i, j, k) i versori della terna di riferimento.

Le equazioni di Eulero per i corpi rotanti si ottengono applicando le seguenti formule di Poisson:

$$\frac{di}{dt} = \dot{\Omega} \times i, \quad \frac{dj}{dt} = \dot{\Omega} \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \dot{\Omega} \times k$$

all'ultima delle (10.A.3); dopo alcuni passaggi si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} C_x &= I_x \ddot{\Omega}_x - (I_y - I_z) \dot{\Omega}_y \dot{\Omega}_z \\ C_y &= I_y \ddot{\Omega}_y - (I_z - I_x) \dot{\Omega}_z \dot{\Omega}_x \\ C_z &= I_z \ddot{\Omega}_z - (I_x - I_y) \dot{\Omega}_x \dot{\Omega}_y \end{aligned} \quad (10.A.6)$$

10.A.3 – Relazioni fondamentali dei giroscopi.

Consideriamo un giroscopio composto da un disco rotante (rotore) ed una cassa fissa (statore); indichiamo con $OXYZ$ una terna solidale al rotore e con $Oxyz$ una terna solidale alla cassa che contiene il rotore ma che può muoversi rispetto allo spazio inerziale; l'asse X coincida con x ed il piano YZ ruoti attorno ad $X \equiv x$ (*asse di spin*).

Inizialmente la configurazione è quella di figura (10.A.4): l'asse del giroscopio è diretto per x mentre gli assi Y e Z sono ruotati di Ω rispetto a y e z . La coppia C , riferita alla terna fissa, è espressa dalla relazione

$$C = C_x i + C_y j + C_z k$$

mentre, rispetto alla terna mobile avrà le seguenti componenti espressi dalla seguente espressione matriciale:

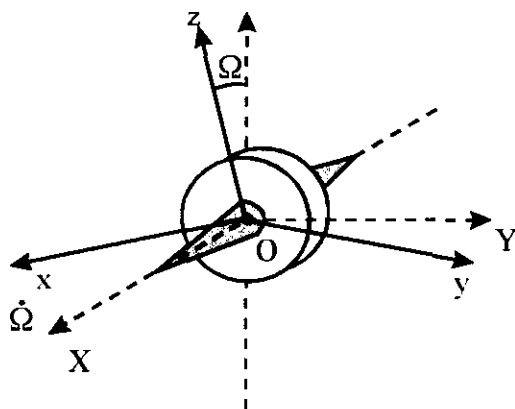


Figura 10.A.4 – Giroscopio libero riferito a due sistemi di riferimento

$$C_{OXYZ} = \begin{Bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{Bmatrix} = R_x(-\Omega) C_{Oxyz} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega & \sin\Omega \\ 0 & -\sin\Omega & \cos\Omega \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} = \quad (10.A.7)$$

$$= \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \cos\Omega + C_z \sin\Omega \\ -C_y \sin\Omega + C_z \cos\Omega \end{Bmatrix}$$

Le componenti di $\dot{\Omega}$ rispetto alla terna $OXYZ$ si ottengono applicando la stessa rotazione matriciale:

$$\dot{\Omega}_{OXYZ} = \begin{Bmatrix} \dot{\Omega}_X \\ \dot{\Omega}_Y \\ \dot{\Omega}_Z \end{Bmatrix} = R_x(-\Omega) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega & \sin\Omega \\ 0 & -\sin\Omega & \cos\Omega \end{vmatrix} = \quad (10.A.8)$$

$$= \begin{Bmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \cos\Omega + \dot{\Omega}_z \sin\Omega \\ -\dot{\Omega}_y \sin\Omega + \dot{\Omega}_z \cos\Omega \end{Bmatrix}$$

inoltre, per il momento di inerzia applicato al giroscopio in rotazione e ricordando che per il disco rotante l'ellissoide di inerzia è rotondo, possiamo scrivere le seguenti condizioni:

$$I_X = I \quad , \quad I_Y = I_Z = I_1 \quad (10.A.9)$$

$$C_y = C_\alpha \quad , \quad C_z = C_\gamma$$

ed inoltre

$$\dot{\Omega}_x = \dot{\Omega} \quad , \quad \frac{d\dot{\Omega}_x}{dt} = \ddot{\Omega}$$

$$\dot{\Omega}_y = \dot{\alpha} \quad , \quad \frac{d\dot{\Omega}_y}{dt} = \ddot{\alpha} \quad (10.A.10)$$

$$\dot{\Omega}_z = \dot{\gamma} \quad , \quad \frac{d\dot{\Omega}_z}{dt} = \ddot{\gamma}$$

per cui le relazioni (10.A.8) si possono scrivere nel seguente modo:

$$\dot{\Omega}_{OXYZ} = \begin{Bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\alpha} \cos \Omega + \dot{\gamma} \sin \Omega \\ -\dot{\alpha} \sin \Omega + \dot{\gamma} \cos \Omega \end{Bmatrix} \quad (10.A.11)$$

Dopo queste semplificazioni è possibile trasformare le equazioni di *Eulero* riferendole alla terna *Oxyz* sostituendo nelle (10.A.6) le relazioni (10.A.9), (10.A.10) e (10.A.11):

$$C_x = I\ddot{\Omega} \quad (10.A.12)$$

$$C_z \sin \Omega + C_y \cos \Omega = I_1 \left[\begin{array}{l} \dot{\Omega} \dot{\gamma} \cos \Omega + \dot{\gamma} \sin \Omega + \\ -\dot{\alpha} \dot{\Omega} \sin \Omega + \ddot{\alpha} \cos \Omega \end{array} \right] + \quad (10.A.13)$$

$$+ (I - I_1) [\dot{\Omega} \dot{\gamma} \cos \Omega - \dot{\Omega} \dot{\alpha} \sin \Omega]$$

$$C_z \cos \Omega - C_y \sin \Omega = I_1 \left[\begin{array}{l} -\dot{\Omega} \dot{\gamma} \sin \Omega + \dot{\gamma} \cos \Omega + \\ -\dot{\alpha} \dot{\Omega} \cos \Omega + \ddot{\alpha} \sin \Omega \end{array} \right] - \quad (10.A.14)$$

$$+ (I - I_1) [\dot{\Omega} \dot{\gamma} \sin \Omega + \dot{\Omega} \dot{\alpha} \cos \Omega]$$

Le tre equazioni trovate rappresentano le equazioni del moto del giroscopio; la (10.A.13) e la (10.A.14) possono essere ulteriormente semplificate. La (10.A.13) si semplifica moltiplicata la (10.A.13) per $\cos \Omega$ e sottraendola alla (10.A.14) dopo averla moltiplicata per $\sin \Omega$:

$$C_y = I_1 (\dot{\Omega} \dot{\gamma} + \ddot{\alpha}) - (I_1 - I) \dot{\Omega} \dot{\gamma}$$

la (10.A.14) si semplifica sommando la (10.A.13) moltiplicata per $\sin \Omega$ e la (10.A.14) per $\cos \Omega$:

$$C_z = I_1 (\ddot{\gamma} - \dot{\Omega} \dot{\alpha}) - (I - I_1) \dot{\Omega} \dot{\alpha}$$

dopo queste semplificazioni si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{aligned}
 C_x &= I\ddot{\Omega} \\
 C_y &= I_1\ddot{\alpha} + I\dot{\Omega}\dot{\gamma} = C_\alpha \\
 C_z &= I_1\ddot{\gamma} - I\dot{\Omega}\dot{\alpha} = C_\gamma
 \end{aligned}
 \tag{10.A.15}$$

Queste relazioni, ovviamente, sono riferite alla terna $Oxyz$ solidale alla cassa del giroscopio (terna fissa). Se non si applicano coppie all'asse x allora la $I\ddot{\Omega}$ è nulla e la velocità angolare del giroscopi $\dot{\Omega}$ è costante. Condizione questa mantenuta nelle girobussole;. Dopo, richiamando la (10.A.4), le equazioni (10.A.15) si semplificano ulteriormente:

$$\begin{aligned}
 C_\alpha &= I_1\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} \\
 C_\gamma &= I_1\ddot{\gamma} - H\dot{\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{10.A.16}$$

Il sistema (10.A.16) fornisce le equazioni del moto del giroscopio soggetto a forze esterne: i primi termini a secondo membro rappresentano le forze di inerzia che per definizione comprendono anche la cassa del giroscopio; i secondi termini, sempre a secondo membro, rappresentano le forze giroscopiche che dipendono essenzialmente dal momento di inerzia principale I .

10.B.1 – Equazioni del moto del giroscopio

Consideriamo un giroscopio che attraverso un sistema meccanico di giunti cardanici ad attrito nullo e posto in condizione di ruotare intorno agli assi Y e Z (con X asse di spin) ed applichiamo al sistema rotante una sola coppia costante C_α il cui vettore è diretto per Y . La coppia può essere generata applicando un peso p sull'asse X alla distanza l dal centro di rotazione coincidente con il baricentro del sistema rotante.

Per queste condizioni è valido il sistema di equazione differenziali (10.A.16) studiato in APPENDICE A:

$$\begin{aligned} C_\alpha &= I_1 \ddot{\alpha} + H \dot{\gamma} \\ 0 &= I_1 \ddot{\gamma} - H \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (10.B.1)$$

in cui è stato posto $C_\gamma = 0$. Per integrare il sistema di equazioni differenziali (10.B.1), si impongono le seguenti condizioni iniziali al contorno:

$$t = 0; \alpha = 0; \gamma = 0; \dot{\alpha} = 0; \dot{\gamma} = 0$$

dalle quali si ottengono i seguenti integrali primi che saranno calcolati in APPENDICE C e qui di seguito riportati:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{C_\alpha}{H} (1 - \cos Kt) \\ \dot{\alpha} &= \frac{C_\alpha}{H} \sin Kt \end{aligned} \quad (10.B.2)$$

Si può osservare che K , in virtù delle condizioni poste: $K = \frac{H}{I_1}$ e

$H = I_1 \dot{\Omega}$, può essere considerato come una pulsazione che possiamo indicare con ω_o . Pertanto le equazioni del sistema (10.B.2) possono essere scritte nella seguente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{C_\alpha}{H} (1 - \cos \omega_0 t) \\ \dot{\alpha} &= \frac{C_\alpha}{H} \sin \omega_0 t\end{aligned}\tag{10.B.3}$$

per le quali è possibile, allora, definire il periodo delle funzioni armoniche:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{I_1}{I\dot{\Omega}}\tag{10.B.4}$$

La seconda equazione delle (10.B.3) fornisce la velocità angolare di un moto noto come *Nutazione*; essa assume valori positivi e negativi con una frequenza elevatissima dovuta alla presenza di $\dot{\Omega}$ (velocità di rotazione del giroscopio attorno al proprio asse). Inoltre, essendo $-\frac{C_\alpha}{H} \leq \dot{\alpha} \leq \frac{C_\alpha}{H}$ si può parlare di *vibrazione* e porre in prima approssimazione $\dot{\alpha} = 0$. La prima equazione della (10.B.3), invece, rappresenta la velocità angolare di *precessione*, il cui valore oscilla con rapidità fra $0 \leq \dot{\gamma} \leq \frac{2C_\alpha}{H}$; perciò, in pratica le (10.B.3) si possono esprimere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{C_\alpha}{H} \\ \dot{\alpha} &= 0\end{aligned}\tag{10.B.5}$$

Inoltre, possiamo dire che, il senso di $\dot{\gamma}$ è tale da portare il vettore H a sovrapporsi alla coppia C (parallelismo delle rotazioni). Dalle (10.B.5) si vede, inoltre, che l'assenza di una coppia C annulla le due velocità angolari: $\dot{\gamma} = 0$ e $\dot{\alpha} = 0$ per cui il giroscopio rimane immobile rispetto allo spazio inerziale (rigidità giroscopica).

Le equazioni del moto, infine si ottengono integrando le (10.B.3); per la nutazione si ha:

$$\alpha = -\frac{C_\alpha}{H} \frac{I}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \alpha_0\tag{10.B.6}$$

il valore della costante α_0 si ottiene in termini delle condizioni iniziali: per $t=0$ $\alpha = 0$; questa condizione permette di definire la seguente relazione:

$$\alpha_o = \frac{C_\alpha}{H} \frac{1}{\omega_0}$$

Operando l'integrazione della seconda di (10.B.3) e con le stesse condizioni iniziali si ha:

$$\gamma = \frac{C_\alpha}{H} t - \frac{C_\alpha}{H} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (10.B.7)$$

L'equazione (10.B.7), tenendo presente le semplificazioni operate precedentemente nelle (10.B.5), si scrive nella seguente semplice equazione:

$$\gamma = \dot{\gamma} t \quad (10.B.8)$$

relazione importante perché afferma che il giroscopio soggetto alla coppia generata dal peso p applicato sull'asse di spin ruota indefinitamente su un piano contenente la coppia C_α e l'asse di spin $\dot{\Omega}$.

10.C.1 – Risoluzione del sistema di equazioni differenziali

In APPENDICE A è stato trovato il sistema di equazioni differenziali (10.A.16) che definisce i moti del giroscopio. Per trovare le equazioni del moto dobbiamo integrare il sistema fissando le condizioni iniziali.

Supposto di applicare una coppia costante da assegnare al primo membro della prima equazione del sistema (10.A.16) di seguito riportato:

$$C_\alpha = pl$$

$$\begin{aligned} C_\alpha &= I_1 \ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} \\ C_\gamma &= I_1 \ddot{\gamma} - H\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (10.C.1)$$

e di essere nullo il primo membro della seconda equazione. Con queste ipotesi si valgono le seguenti condizioni iniziali:

$$t = 0; \alpha = 0; \gamma = 0; \dot{\alpha} = 0; \dot{\gamma} = 0$$

Derivando la prima equazione differenziale del sistema (10.C.1) rispetto al tempo e considerando la sua seconda equazione si ottiene:

$$\ddot{\alpha} + K^2 \dot{\alpha} = 0 \quad (10.C.2)$$

con $K = \frac{H}{I_1}$. Per risolvere la (10.C.2) scriviamo la sua equazione caratteristica:

$$a^3 + K^2 a = 0$$

che ha come soluzione le seguenti radici:

$$a_1 = iK; \quad a_2 = -iK; \quad a_3 = 0$$

con $i = \sqrt{-1}$.

L'integrale generale risulta essere:

$$\alpha = A_1 e^{iKt} + A_2 e^{-iKt} + A_3 \quad (10.C.3)$$

che permette, derivandola, di trovare anche la seguente velocità angolare:

$$\dot{\alpha} = iK e^{iKt} + iK e^{-iKt} \quad (10.C.4)$$

nella quale occorre definire le costanti di integrazione. Riprendendo le condizioni iniziali che per $t = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = 0$ si ha che $iKA_1 = iKA_2 = A$. Dopo di che la (10.C.4) si scrive nel seguente modo:

$$\dot{\alpha} = A(e^{iKt} - e^{-iKt}) = 2iA \sin Kt = A' \sin Kt \quad (10.C.5)$$

Passiamo ora ad integrare la seconda equazione della (10.C.1) ricordando la condizione $C_\gamma = 0$:

$$\ddot{\gamma} = \frac{H}{I_1} \dot{\alpha} = KA' \sin Kt$$

che integrata rispetto al tempo da:

$$\dot{\gamma} = -A' \cos Kt + A'' \quad (10.C.6)$$

con le costanti di integrazione definite dalle condizioni al contorno: $A'' = A''$ per cui la (10.C.6) si può scrivere nella seguente forma:

$$\dot{\gamma} = A'(1 - \cos Kt) \quad (10.C.7)$$

Per ottenere l'espressione di A' deriviamo rispetto al tempo la relazione (10.C.5):

$$\ddot{\alpha} = KA \cos Kt$$

che va sostituita assieme alla (10.C.7) nella prima delle (10.C.1):

$$C_\alpha = I_1 KA' \cos Kt - I_1 KA \cos Kt + I_1 KA' = I_1 KA' = I_1 HA' \\ A' = \frac{C_\alpha}{H} \quad (10.C.8)$$

Sostituendo l'espressione di A' trovata nelle equazioni (10.C.5) e (10.C.7) si ottengono gli integrali primi del sistema (10.C.1):

$$\dot{\gamma} = \frac{C_\alpha}{H} (1 - \cos Kt) \\ \dot{\alpha} = \frac{C_\alpha}{H} \sin Kt \quad (10.C.9)$$

10.D.1 – La rotazione terrestre

La Terra compie un giro completo in un giorno sidereo; la sua velocità angolare, che in seguito sarà sempre indicata con il vettore w , antioraria o diretta, è ben nota sia da osservazioni astronomiche che attualmente da misure atomiche mediante orologi al Cesio. Il suo modulo è definito dalla seguente relazione:

$$w = \frac{2\pi}{\text{giornosidereo}} = \frac{2\pi}{86164} = 7.29212 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} = 15.0411''/\text{h}$$

Il vettore w può essere rappresentato a partire dal centro della Terra con direzione coincidente con l'asse terrestre e verso polo nord. In ogni punto della Terra il vettore w può essere scomposto, come del resto già visto, in due componenti dati dalle seguenti relazioni:

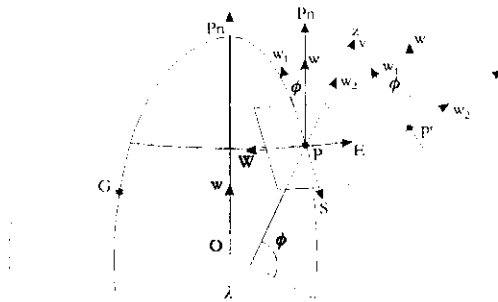


Figura 10.D.1 – Scomposizione del vettore rotazione terrestre

$$w_1 = w \cos \phi \quad \text{e} \quad w_2 = w \sin \phi \quad (10.D.1)$$

di significato noto perché già trattato nel paragrafo 10.7.1 e comunque con w_1 lungo la linea meridiana e w_2 perpendicolare al piano orizzontale contenente il punto considerato.

Consideriamo un giroscopio con il centro O di rotazione coincidente con il centro di rotazione e con l'asse di spin appartenente ad un piano verticale ruotato di un angolo γ rispetto al piano meridiano e l'asse di

spin sollevato dell'angolo α rispetto al piano orizzontale passante per il centro di rotazione G (baricentro del giroscopio). Sia $GXYZ$ la terna di riferimento con l'asse X coincidente con l'asse di spin di velocità $\dot{\Omega}$, l'asse Y appartenente al piano orizzontale e l'asse Z nel piano verticale (v. figura 10.D.2).

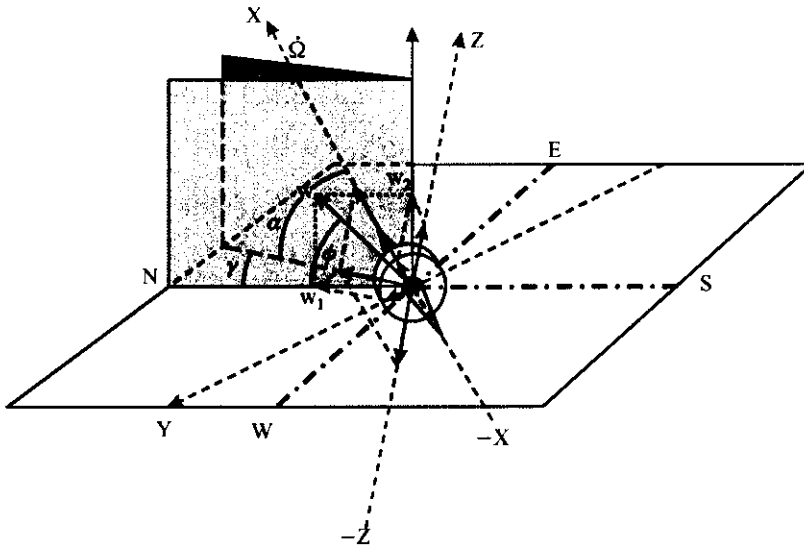


Figura 10.D.2 – Scomposizione di velocità angolare

Dalla scomposizione della velocità angolare terrestre w si possono raggruppare le seguenti velocità lungo gli assi (vedi figura D.3):

- *asse X*: $\dot{\Omega} + w \cos \phi \cos \gamma \cos \alpha + w \sin \phi \sin \alpha \cong \dot{\Omega}$ dato che i rimanenti vettori sono piccoli rispetto alla velocità di spin;
- *asse Y*: $w \cos \phi \sin \gamma \cong \gamma w \cos \phi$ dato che γ è supposto piccolo;
- *asse Z*: $w \sin \phi \cos \alpha - w \cos \phi \cos \gamma \sin \alpha$ facilmente riconducibile a $w \sin \phi$.

Pertanto, dalle considerazioni fatte, si possono considerare agenti sui tre assi le seguenti velocità:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &\Rightarrow X \\
 \gamma w \cos \phi &\Rightarrow Y \\
 w \sin \phi &\Rightarrow Z
 \end{aligned}
 \tag{10.D.2}$$

la seconda e la terza velocità angolare date dalle (10.D.2) esprimono apparentemente il disorientamento che il giroscopio subisce a causa della rotazione terrestre.

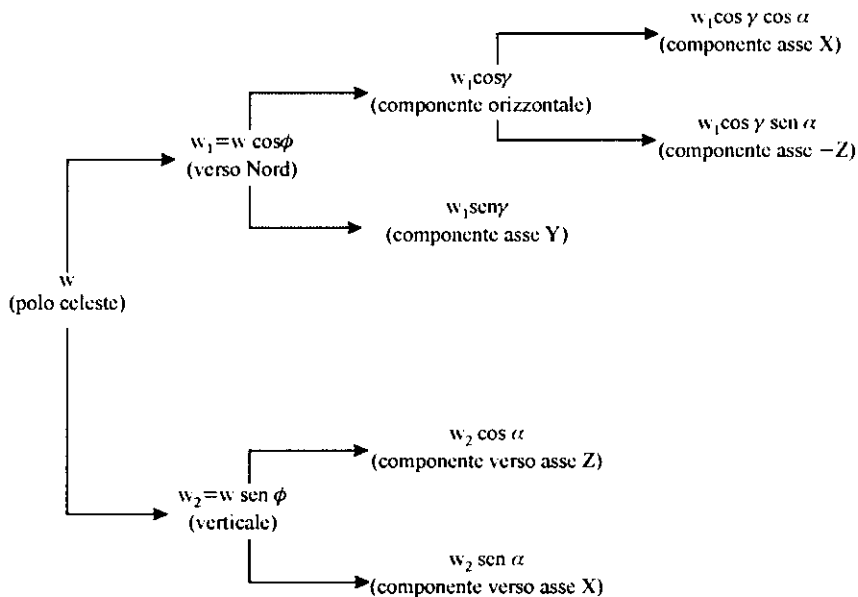


Figura 10.D.3 – Composizione delle velocità angolari

10.D.2 – Giroscopio vincolato al piano orizzontale

Consideriamo l'asse di spin $\dot{\Omega}$ del giroscopio rigidamente vincolato al piano orizzontale ed inclinato dell'angolo γ rispetto alla linea meridiana passante per il centro di rotazione G. Sul giroscopio adesso agisce la velocità angolare terrestre w con le componenti dati dalla (10.D.1). La w_1 va proiettata sull'asse di spin, $w_1 \cos \gamma$, che va a sommarsi alla velocità $\dot{\Omega}$ e comunque non produce alcuno effetto sul giroscopio ($\dot{\Omega} \gg w_1 \cos \gamma$). La w_2 proiettata sull'asse Z produrrebbe una coppia $C_2 = Hw_2$ tendente a portare l'asse di spin fuori dal piano orizzontale; cosa impossibile dato il vincolo rigido posto all'asse di spin di appartenere al piano orizzontale per cui si può porre $C_2 = 0$. Resta da esaminare l'effetto della w_1 proiettata sull'asse Y anch'esso appartenente al piano orizzontale: $w_1 \sin \gamma \cong \gamma w_1$.

Questa componente produce una coppia C_γ che tende a portare H in meridiano con velocità angolare $\dot{\gamma}$. Per quanto già visto l'espressione di questa coppia è data dalla seguente relazione:

$$C_\gamma = -H\gamma w_1 \tag{10.D.3}$$

il segno meno è dovuto al fatto che la coppia tende a far ridurre l'angolo γ . La (10.D.3) fa nascere una velocità $\dot{\gamma}$ appartenente all'asse Z e

quindi una coppia di espressione $C_2 = H\dot{\gamma}$ che tenderebbe a portare l'asse di spin fuori dal piano e che per gli stessi motivi legati al vincolo può considerarsi nulla $C_2 = 0$.

L'equazione 10.D.3 può essere ulteriormente esplicitata dato che il primo membro, per quando trovato nell'APPENDICE A, è dato dal prodotto del momento di inerzia rispetto all'asse $Z(I_1)$ per l'accelerazione $\ddot{\gamma}$ per cui possiamo scrivere:

$$\ddot{\gamma} = -\frac{H}{I_1} \gamma \omega_1 \quad (10.D.4)$$

che può essere ulteriormente semplificata introducendo, come già fatto precedentemente la pulsazione ω_0 , ponendo:

$$\omega_0^2 = \frac{H}{I_1} \omega_1 = \frac{I\dot{\Omega}}{I_1} \omega_1 \quad (10.D.5)$$

per cui la relazione del moto del giroscopio (10.D.3) si può scrivere nel seguente modo:

$$\ddot{\gamma} + \omega_0^2 \gamma = 0 \quad (10.D.6)$$

equazione differenziale del moto del giroscopio la cui soluzione è svolta in APPENDICE E. qui di seguito riportata:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 \cos \omega_0 t \\ \dot{\gamma} &= -\gamma_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (10.D.7)$$

avendo posto per $t=0$ $\gamma = \gamma_0$ e $\dot{\gamma} = 0$. Il periodo di oscillazione T è espresso dalla seguente relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{I\dot{\Omega} \omega \cos \phi}} \quad (10.D.8)$$

La soluzione (10.D.7) stabilisce che il giroscopio vincolato al piano orizzontale e soggetto alla forza di precessione prodotta dalla rotazione del piano orizzontale attorno alla linea meridiana si comporta come un pendolo sospeso di periodo T .

10.D.3 –Giroscopio sospeso

Sulle navi non è possibile ottenere un piano costantemente orizzontale; questa proprietà la si ottiene in due modi:

- abbassando il baricentro del giroscopio (in questo caso il centro di rotazione non coincide con il baricentro);
- utilizzando un motore di coppia che sia in grado di produrre il medesimo effetto della coppia C_α .

nel primo caso il giroscopio si dice *zavorrato*, nel secondo *sospeso*; in entrambi i casi è sempre sottoposto alle azioni combinate generate dalla rotazione terrestre (10.D.1).

Supponiamo ora che, in seguito ad un movimento della nave, il giroscopio ruoti intorno all'asse Y portando l'asse di spin $\dot{\Omega}$ fuori dal piano orizzontale di un angolo α (piccolo). In questo istante il baricentro sarà fuori dalla verticale passante per il centro di rotazione provocando il nascere di una coppia data dalla seguente espressione:

$$C_\alpha = pl \sin \alpha \cong pl \alpha \tag{10.D.9}$$

che produce una precessione dell'asse di spin nel piano XY e quindi attorno all'asse Z con una velocità di precessione approssimativamente data da:

$$\dot{\gamma} = -\frac{C_\alpha}{H} = -\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} \tag{10.D.10}$$

Alla (10.D.10) è stato assegnato il segno meno perché il moto prodotto da $\dot{\gamma}$ si oppone al moto apparente di disorientamento dell'asse di spin $\dot{\Omega}$ prodotto dall'azione della rotazione terrestre, tendendo ad annullare l'angolo γ . Dall'analisi delle coppie e delle velocità presenti si può riassumere la seguente tabella:

Asse\Causa	Giroscopio	Rotazione terrestre	Coppia
X	$\dot{\Omega}$	-	-
Y	-	w_1	-
Z	-	w_2	$\dot{\gamma} = -\frac{C_\alpha}{H} = -\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}}$

per cui le equazioni del moto del giroscopio sono:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \gamma w \cos \phi \\ \dot{\gamma} &= -\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} + w \sin \phi \end{aligned} \tag{10.D.11}$$

Per integrare il sistema di equazioni differenziali (10.D.11), asse-

gniamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\text{per } t=0: \gamma = \gamma_0, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = 0, \quad \alpha = \alpha_0 = \frac{I\dot{\Omega}}{pl} w \sin\phi$$

Deriviamo la seconda equazione rispetto al tempo: $\ddot{\gamma} + \frac{pl}{I\dot{\Omega}} \dot{\alpha} = 0$ e sostituendo l'espressione di $\dot{\alpha}$ data dalla prima equazione del sistema (10.D.11):

$$\ddot{\gamma} + \left(\frac{pl}{I\dot{\Omega}} w \cos\phi \right) \gamma = 0 \quad (10.D.12)$$

la cui equazione caratteristica può scriversi nel seguente modo: $\alpha^2 + m^2 = 0$ con $h^2 = \frac{pl}{I\dot{\Omega}} w \cos\phi$; la soluzione dell'equazione caratteristica fornisce le due seguenti radici: $\alpha_1 = im$, $\alpha_2 = -im$ e l'integrale generale della (10.D.12) può scriversi:

$$\gamma = A_1 e^{imt} + A_2 e^{-imt}, \quad \dot{\gamma} = imA_1 e^{imt} - imA_2 e^{-imt} \quad (10.D.13)$$

per le condizioni iniziali poste l'equazione si ha: $A_1 = A_2 = A$ e l'integrale può esprimersi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \gamma &= A(e^{imt} + e^{-imt}) = A(\cos mt + i \sin mt + \cos mt - i \sin mt) = \\ &= 2A \cos mt \\ \gamma &= \gamma_m \cos \sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}} w \cos\phi} t \end{aligned} \quad (10.D.14)$$

sostituendo la soluzione (10.D.14) nella prima delle (10.D.11) otteniamo: $\dot{\alpha} = \gamma_m w \cos\phi \cos mt$ che integrata da:

$$\alpha = \pm \frac{\gamma_m \cos\phi}{\sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}} w \cos\phi}} \sin \sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}} w \cos\phi} t + \alpha'$$

con α' una costante di integrazione che va calcolata per mezzo delle

condizioni iniziali. Per $t=0$ otteniamo il valore di $\alpha' = \alpha_m = \frac{I\dot{\Omega}}{pl} \sin\phi$ che va, ovviamente sostituita nell'equazione di α . Dopo di che si possono scrivere i due integrali che forniscono il moto del giroscopio soggetto alla coppia di precessione C_α :

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_m \cos \sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi t \\ \alpha &= \alpha_m \pm \gamma_m \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w \cos \phi \sin \left(\sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi t \right) \end{aligned} \quad (10.D.15)$$

entrambe funzioni armoniche di periodo $T = \frac{2\pi}{m} = 2\pi \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{plw \cos \phi}}$.

Le equazioni (10.D.15) descrivono il moto dell'asse di spin del giroscopio. La combinazione dei due moti uno orizzontale e l'altro verticale fornisce una curva chiusa rappresentata da una ellisse che l'asse di spin descrive nel periodo T .

Per dimostrare questa proprietà consideriamo la figura D.4; α e γ rappresentano la nutazione e la precessione dell'asse del giroscopio e la cui proiezione sul piano π parallelo al primo verticale; consideriamo, inoltre il segmento GN unitario. Dalla figura 10.D.4 si possono ricavare le seguenti relazioni trigonometriche:

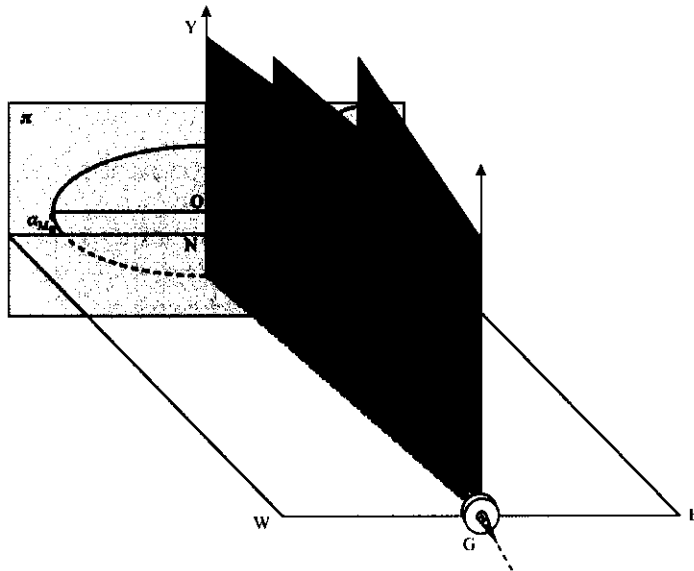
$$\begin{aligned} nH &= \tan \gamma \cong \gamma, \quad GH = \sec \gamma \cong 1, \\ HP &= \sec \gamma \tan \alpha \cong \alpha, \quad nL = \gamma_m, \quad LP_1 = \alpha_m. \end{aligned}$$

Siano (x, y) le coordinate di P sul piano π con la terna di assi (X, Y) così definita: l'asse Y è determinato dall'intersezione del meridiano con il piano π ; l'asse X è terminato dalla parallela alla direzione $E-W$ tracciata su π a distanza da α_m dal piano orizzontale. Con questo sistema di riferimento le coordinate di P hanno le seguenti espressioni:

$$x = \gamma \quad \text{e} \quad y = \alpha - \alpha_m \quad (10.D.16)$$

per cui se nelle (10.D.15) indichiamo con:

$$a = \gamma_m \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w \cos \phi \quad \text{e} \quad K = \frac{pl}{I\dot{\Omega}} \cos \phi$$


Figura 10.D.4 – Ellisse di orientamento

si ottengono le due seguenti equazioni:

$$\gamma = \gamma_m \cos\sqrt{K}t \quad \text{e} \quad \alpha - \alpha_m = a \sin\sqrt{K}t$$

e le coordinate di P possono esprimersi nel seguente modo:

$$\frac{x}{\gamma_m} = \cos\sqrt{K}t \quad \text{e} \quad \frac{y}{a} = \sin\sqrt{K}t$$

dalla quale si ottiene quadrando e sommando l'equazione di una ellisse di semiasse maggiore γ_m e semiasse minore a :

$$\frac{x^2}{\gamma_m^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (10.D.17)$$

nel caso si considera una sfera di raggio unitario come superficie di rappresentazione dell'estremo del vettore spin in sostituzione del piano π la forma dell'equazione (10.D.17) non cambia per cui l'estremo del vettore spin descriverà un'ellisse sferica. I modi di γ e di α sono sfasati di 90° ; il moto è simmetrico rispetto al piano meridiano ma non rispetto al piano orizzontale essendo l'asse delle Z elevato della quantità

$$\alpha_m = \frac{I\dot{\Omega}}{pl} w \sin\phi$$

successivo:

$$I\dot{\Omega} = 4 \cdot 10^6 [\text{gcm}^2/\text{s}], \quad pl = 8 \cdot 10^4 [\text{dine}\cdot\text{cm}], \quad w = 41 \cdot 10^{-4} [^\circ/\text{s}]$$

$$\alpha_m = \frac{4 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4} 41 \cdot 10^{-4} \cong .2 [^\circ] = 12' \quad \text{per } \phi = 45^\circ$$

Per annullare α_m occorre compensare il vettore rotazione $w \sin \phi$ applicando lungo l'asse Y una coppia C'_u di valore $I\dot{\Omega} w \sin \phi$ che produce un moto antiorario e che compensa la rotazione dell'orizzonte. Con tali considerazioni le equazione del moto (10.D.15) si riscrivono nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_m \cos \sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi t \\ \alpha &= \pm \gamma_m \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w \cos \phi \sin \left(\sqrt{\frac{pl}{I\dot{\Omega}}} w \cos \phi t \right) \end{aligned} \quad (10.D.18)$$

10.D.4 – La coppia direttiva

La componente della rotazione terrestre lungo l'asse Y $w \cos \phi \sin \gamma$, approssimata a $\gamma w \cos \phi$, produce una coppia, sotto l'azione della coppia di zavorramento, $C'_u = I\dot{\Omega} \gamma w \cos \phi$ che insegue tale rotazione; questa coppia è detta *coppia direttiva*.

Calcoliamo il valore di questa coppia per una girobussola da nave di tipo classico. Il rotore abbia una massa di 6 kg e di raggio 7 cm e sia 20000 giri/minuto la velocità di spin;

$$I = 6 \cdot 10^3 [\text{g}] \cdot 7^2 [\text{cm}^2] = 294 \cdot 10^3 [\text{gcm}^2]$$

$$\dot{\Omega} = 20000 [\text{giri}/\text{minuti}] = 2094 [\text{rad}/\text{s}]$$

$$w = 73 \cdot 10^{-6} [\text{rad}/\text{s}]$$

$$I\dot{\Omega} w = 294 \cdot 2094 \cdot 73 \cdot 10^{-3} = 45 \cdot 10^3 [\text{dine}\cdot\text{cm}]$$

valore della coppia per un giroscopio all'equatore; esso si riduce $34.4 \cdot 10^3$ sul parallelo 40° ; per $\gamma = 10^\circ$ la coppia direttiva si riduce a $6 \cdot 10^3 [\text{dine}\cdot\text{cm}]$. In questa fase è importante ricordare l'intensità della coppia direttiva di una bussola magnetica che è di $1 \div 3 \cdot 10^3 [\text{dine}\cdot\text{cm}]$.

L'ellisse di orientamento dell'asse di spin non fornisce al giroscopio, in rapida rotazione, la direttività richiesta; occorre trovare il sistema di ridurre le dimensioni dell'ellisse in modo da fare orientare l'asse di spin sul piano meridiano. Tenendo presente le dimensioni dell'ellisse (10.D.17) possiamo intanto valutare lo schiacciamento della conica

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{\gamma_m - a}{\gamma_m} = 1 - \sqrt{\frac{I\dot{\Omega}}{pl}} w \cos\phi$$

Si fa notare che lo schiacciamento non dipende da γ_m : questa considerazione permette di effettuare una *compressione* di uno qualsiasi degli assi ed ottenere così la riduzione anche dell'altro.

Supponiamo, allora, di agire sul semiasse verticale, ovvero, di realizzare uno smorzamento verticale; ciò, per le azioni giroscopiche che nascono in relazione alla applicazione di una coppia, dovrà trovarsi sul piano orizzontale (vettore verticale); il modulo di questa coppia dovrà essere proporzionale a quella di zavorramento, per cui le equazioni del moto (10.D.11) dovranno essere riscritte, per smorzamento verticale nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \gamma w \cos\phi - \frac{C_{sv}}{H} \alpha \\ \dot{\gamma} &= -\frac{pl\alpha}{I\dot{\Omega}} + w_v \end{aligned} \quad (10.D.19)$$

dove C_{sv} è la coppia di smorzamento proporzionale a $C_a = pl\alpha$ e diretta per Z' .

Prima di iniziare la risoluzione del sistema di equazioni differenziali (10.D.19) occorre definire le seguenti condizioni iniziali che per $t=0$ sono:

$$\gamma = \gamma_o, \quad \dot{\gamma}_o = 0, \quad \alpha = \alpha_o$$

Derivando la prima delle (10.D.19) si ha:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \dot{\gamma} w_1 - \frac{C_{sv}}{H} \dot{\alpha} = \left(-\frac{pl}{H} \alpha + w_v \right) w_1 - \frac{C_{sv}}{H} \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} + \frac{C_{sv}}{H} \dot{\alpha} + \frac{pl}{H} w_1 \alpha - w_v w_1 &= 0 \end{aligned} \quad (10.D.20)$$

ponendo $\alpha = u + \alpha_o$, $\dot{\alpha} = \dot{u}$, $\ddot{\alpha} = \ddot{u}$ con $\alpha_o = \frac{H}{pl} w_1$ e dividendo la

(10.D.20) per $\frac{H}{pl}$ si ha:

$$\frac{H}{pl} \ddot{u} + \frac{C_{sv}}{pl} \dot{u} + w_1 u + \frac{H}{pl} w_v w_1 - \frac{H}{pl} w_v w_1 = 0 \quad (10.D.21)$$

che può essere ulteriormente semplificata ponendo:

$M = \frac{H}{pl}$, $N = \frac{C_{sv}}{pl}$, $Q = w_1$; operando le sostituzioni otteniamo una equazione differenziale del secondo ordine omogenea:

$$M\ddot{u} + N\dot{u} + Qu = 0 \quad (10.D.22)$$

le cui radici sono:

$$u = -v \pm ib \quad \text{con} \quad v = \frac{N}{2M} = \frac{C_{sv}}{2H} \quad \text{e}$$

$$b = \frac{\sqrt{4MQ - N^2}}{2M} \quad \text{con} \quad (N^2 < 4MQ)$$

L'integrale generale, allora, può scriversi nella forma:

$$u = k_1 e^{-vt} e^{ibt} + k_2 e^{-vt} e^{-ibt}$$

$$\alpha = u + \alpha_o = k_1 e^{-vt} e^{ibt} + k_2 e^{-vt} e^{-ibt} + \frac{H}{pl} w_v \quad (10.D.23)$$

applicando le condizioni iniziali si ottiene che $k_1 + k_2 = 0$, ovvero $k_1 = -k_2 = |k|$ per cui la seconda delle (10.D.23) può scriversi nel seguente modo:

$$\alpha = \alpha_c + k e^{-vt} (\cos bt + i \sin bt - \cos bt + i \sin bt) =$$

$$= \alpha_c + K e^{-vt} \sin bt \quad (10.D.24)$$

con $K = 2ik$ e $\alpha_c = \alpha_o = \frac{H}{pl} w_v$. L'equazione (10.D.24) descrive un moto smorzato dato che per t sufficientemente lungo il valore di α tende al valore di equilibrio α_c .

Passiamo ora a trovare l'espressione γ che si trova nella prima equazione (10.D.19). Deriviamo rispetto al tempo la (10.D.24) si ha:

$$\dot{\alpha} = K e^{-vt} (-v \sin bt + b \cos bt)$$

Sostituendo la relazione appena trovata nella (10.D.19) qui di seguito riportata:

$$\dot{\alpha} = \gamma w_1 - \frac{C_{sv}}{H} \alpha \quad , \quad \gamma = \frac{1}{w_1} \left[\dot{\alpha} + \frac{C_{sv}}{H} \alpha \right]$$

Sostituendo valori di $(\dot{\alpha}, \alpha)$ troviamo l'espressione della precessione

$$\gamma = \frac{1}{w_1} [K e^{-vt} (-v \sin bt + b \cos bt)] + \frac{C_{sv}}{H w_1} \left[\frac{H}{pl} w_1 + K e^{-vt} \sin bt \right]$$

e sviluppando si ha:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{K}{w_1} e^{-vt} (-v \sin bt + b \cos bt) + \frac{C_{sv}}{pl} \frac{w_2}{w_1} + \frac{K}{w_1} \frac{C_{sv}}{H} e^{-vt} \sin bt = \\ &= \frac{C_{sv}}{pl} \frac{w_2}{w_1} + \frac{K}{w_1} \left[\left(\frac{C_{sv}}{H} - v \right) \sin bt + b \cos bt \right] e^{-vt} \end{aligned} \quad (10.D.25)$$

che può essere ulteriormente semplificata tenendo presente le seguenti relazioni:

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{w \sin \phi}{w \cos \phi} = \tan \phi, \quad \frac{C_{sv}}{H} - v = \frac{C_{sv}}{H} - \frac{C_{sv}}{2H} = \frac{C_{sv}}{2H} = v$$

la (10.D.25) si scrive:

$$\gamma = \frac{C_{sv}}{pl} \tan \phi + \frac{K}{w_1} [v \sin bt + b \cos bt] e^{-vt} \quad (10.D.26)$$

la (10.D.26) descrive il moto smorzato del moto di precessione: il primo termine della (10.D.26) fornisce il valore finale di equilibrio di γ , il secondo un termine armonico smorzante; infatti per t sufficientemente ($t \rightarrow \infty$) $\gamma = \gamma_e = \frac{C_{sv}}{pl} \tan \phi$ e la (10.D.26) si suole esprimere nel seguente modo:

$$\gamma = \gamma_e + \frac{K}{w_1} [v \sin bt + b \cos bt] e^{-vt} \quad (10.D.27)$$

Rimane da definire nella (10.D.27) il significato di K . Per ottenere la sua espressione poniamo per $t=0$ $\gamma = \gamma_o$ ottenendo dalla (10.D.27)

$$\gamma = \gamma_e + \frac{K}{w_1} b, \quad K = (\gamma - \gamma_e) \frac{w_1}{b}$$

dopo di che le equazioni del moto del giroscopio smorzato sono:

$$\alpha = \alpha_e + \frac{w_1}{b} (\gamma_o - \gamma_e) e^{-vt} \sin bt \quad (10.D.28)$$

$$\gamma = \gamma_e + (\gamma_o - \gamma_e) \left(\frac{\nu}{b} \sin bt + \cos bt \right) e^{-\nu t} \quad (10.D.29)$$

con il periodo di smorzamento T_s definito dalla pulsazione b e dato da:

$$T_s = \frac{2\pi}{b} = 2\pi \sqrt{\frac{plw_1}{H} - \frac{plC_{sv}}{4H^2}} \quad (10.D.30)$$

che è stata ricavata usando i coefficienti costanti delle equazioni (10.D.22) e (10.D.24).

Nello sviluppo degli integrali del moto (10.D.28) e (10.D.29) è presente la componente verticale della rotazione terrestre w_2 . E' opportuno verificare a quali risultati si arriva nel caso di opera per compensare, in qualche modo, l'effetto della sua azione. Se consideriamo nulla la sua azione, il sistema di equazioni differenziali (10.D.19) diventa

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \gamma w \cos \phi - \frac{C_{sv}}{H} \alpha \\ \dot{\gamma} &= -\frac{pl\alpha}{I\Omega} \end{aligned} \quad (10.D.31)$$

derivando la prima equazione e tenendo presente le condizioni iniziali

$$t=0: \gamma = \gamma_o, \dot{\gamma}_o = 0, \alpha = \alpha_o:$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \dot{\gamma} w_1 - \frac{C_{sv}}{H} \dot{\alpha} = -\frac{pl}{H} \alpha w_1 - \frac{C_{sv}}{H} \dot{\alpha} \\ \frac{H}{pl} \ddot{\alpha} + \frac{C_{sv}}{pl} \dot{\alpha} + w_1 \alpha &= 0 \\ M\ddot{\alpha} + N\dot{\alpha} + w_1 \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (10.D.32)$$

la cui soluzione fornisce, seguendo lo stesso procedimento, ai due integrali

$$\begin{aligned} \alpha &= Ke^{-\nu t} \sin bt \\ \dot{\alpha} &= Ke^{-\nu t} (-\nu \sin bt + b \cos bt) \end{aligned} \quad (10.D.33)$$

e procedendo per l'angolo di precessione γ :

$$\gamma = \frac{\dot{\alpha}}{w_1} + \frac{C_{sv}}{Hw_1} \alpha$$

e sostituendo le (10.D.33) si ottiene la seguente equazione:

$$\gamma = \frac{K}{w_1} (v \sin bt + b \cos bt) e^{-vt} \quad (10.D.34)$$

nella quale, richiamando le condizioni iniziali per $t=0$ $\gamma = \gamma_o$, $\dot{\gamma}_o = 0$, $\alpha = \alpha_o$ si trova l'espressione di $K = \frac{\gamma_o}{b} w_1$; in definitiva si ottengono le due equazioni che forniscono il moto smorzato dell'asse di spin $\dot{\Omega}$:

$$\gamma = \gamma_o \left(\frac{v}{b} \sin bt + \cos bt \right) e^{-vt} \quad (10.D.35)$$

$$\alpha = \frac{w_1}{b} \gamma_o e^{-vt} \sin bt \quad (10.D.36)$$

$$T_s = \frac{2\pi}{b}$$

Nelle equazioni (10.D.35) e (10.D.36) notiamo che in queste equazioni mancano i termini γ_o, α_o ; ciò sta ad indicare che in questo caso la posizione dell'equilibrio dell'asse di spin del giroscopio giace nel piano meridiano e quindi acquista la proprietà, dopo alcune oscillazione, di indicare la direzione del nord geografico; inoltre osserviamo che α, γ non sono più in quadratura come in assenza di smorzamento. Infatti ponendo $\left(\frac{v}{b} = \tan \beta \right)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_o \left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin bt + \cos bt \right) e^{-vt} = \\ &= \frac{\gamma_o}{\cos \beta} (\sin \beta \sin bt + \cos \beta \cos bt) e^{-vt} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_o}{\cos \beta} e^{-vt} \cos(bt - \beta) \quad (10.D.37)$$

$$\alpha = \frac{w_1}{b} \gamma_o e^{-vt} \sin bt \quad (10.D.38)$$

Infine è possibile fare una ultima considerazione sulle equazioni del moto smorzato (10.D.37) e (10.D.38). Per ottenere ciò consideriamo l'espressione che fornisce la pulsazione dei due modi:

$$b = \frac{\sqrt{4MQ - N^2}}{2M} = \frac{\sqrt{4Hplw_1 - C_{sv}^2}}{2H} = \frac{R}{2H}$$

nella quale si è posto $R = \sqrt{4Hplw_1 - C_{sv}^2}$; inoltre, ricordando che $v = \frac{C_{sv}}{2H}$ possiamo porre $b = \frac{R}{2H}$, $\frac{v}{b} = \frac{C_{sv}}{R}$ ed ottenere così una forma differenziale per le equazioni del moto:

$$\gamma = \gamma_o \left(\frac{C_{sv}}{R} \sin \frac{R}{2H} t + \cos \frac{R}{2H} t \right) e^{-\frac{C_{sv}}{2H} t} \quad (10.D.39)$$

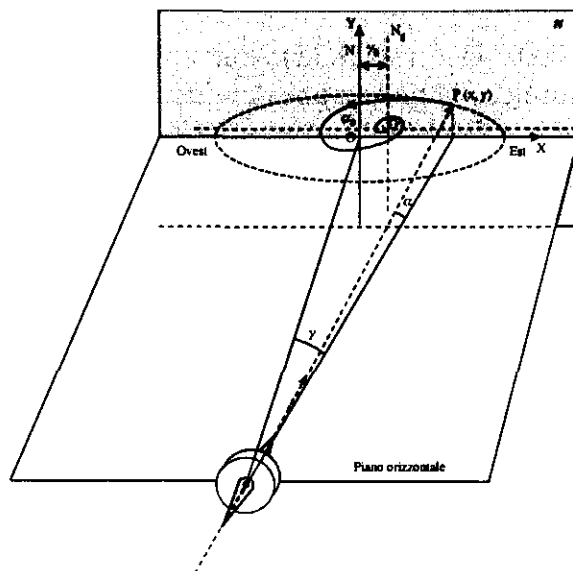
$$\alpha = w_1 \gamma_o \frac{2H}{R} e^{-\frac{C_{sv}}{2H} t} \sin \frac{R}{2H} t \quad (10.D.40)$$

E' facile vedere che nel caso in cui non esiste la coppia di smorzamento verticale C_{sv} , le equazioni del moto si trasformano in equazioni che descrivono il moto dell'asse di spin in assenza di coppia di smorzamento.

10.D.5 – Moto dell'asse di spin con oscillazioni smorzate.

Per descrivere il moto dell'asse del giroscopio con oscillazioni smorzate usiamo lo stesso metodo usato nel paragrafo 10.D.3. Il piano π è ortogonale al piano dell'orizzonte; l'intersezione del piano meridiano con il piano orizzontale determina sul piano π un sistema di assi cartesiani con l'asse X diretta per Est e l'asse Y per lo zenit. All'istante t l'estremo dell'asse del rotore si proietta in P su detto piano. Le coordinate di P sono

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan \gamma \\ \tan \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$


Figura 10.D. 5 – Ellisse di smorzamento

Se, allora, nelle equazioni del moto consideriamo trascurabile l'angolo β e supponiamo, per il momento, unitario il rapporto $\frac{w_1}{b}$ possiamo scrivere che:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 e^{-\nu t} \cos bt \\ \alpha_0 e^{-\nu t} \sin bt \end{bmatrix} \quad (10.D.41)$$

ed esprimendo il moto in coordinate polari si ottiene:

$$P = \begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 e^{-\nu t} \\ bt \end{bmatrix} = \gamma_0 e^{-\nu \frac{T_s}{2\kappa} \theta}$$

e quindi

$$\rho = e^{-\nu \frac{T_s}{2\kappa} \theta(t)} \quad \text{e} \quad \theta = bt = \frac{2\pi}{T_s} t \quad (10.D.42)$$

La (10.D.42) fornisce l'equazione, in coordinate polari, di una spirale logaritmica, e rappresenta la curva tracciata dall'estremo dell'asse di spin sul piano π . Quando invece si considerano le equazioni ricavate per il caso in cui non si annulla l'effetto della w_2 , caso che normalmente per alcune girobussole non si realizza, allora la traccia data

dall'equazione (10.D.42) si trasforma nella seguente:

$$\rho = (\gamma_o - \gamma_e) e^{-v \frac{T_s}{2\pi} \theta(t)} \quad (10.D.43)$$

che rappresenta una spirale logaritmica centrata nel punto di coordinate $(\gamma_e, -\alpha_e)$.

10.D.6 – Fattore di smorzamento

Se valutiamo la (2.43) per due istanti successivi relativi ad una semi oscillazione tale che:

$$t_2 = t_1 - \frac{T_s}{2} \quad \text{con} \quad \rho_1 = (\gamma_o - \gamma_e) e^{-v t_1}, \rho_2 = (\gamma_o - \gamma_e) e^{-v t_2}$$

ed il fattore di smorzamento è definito dal rapporto:

$$\Phi = \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-v(t_2 - t_1)} = e^{-\frac{C_{sv} T_s}{4I}} \quad (10.D.44)$$

Esso dipende chiaramente dalla coppia di smorzamento C_{sv} .

10.D.7 - Realizzazione coppia di smorzamento.

Per realizzare lo smorzamento si è ipotizzato alla presenza di una coppia verticale C_{sv} orienta lungo l'asse Z tale da opporsi al moto di orientamento del giroscopio quando l'asse di spin si allontana dal meridiano. Le case costruttrici utilizzano differenti metodi che comunque si possono sintetizzare nei due seguenti:

- Si pensi ad una livella elettrolitica montata sulla cassa del giroscopio che segnali presenza dell'angolo α ; un segnale elettrico, opportunamente amplificato, viene inviato al motore di coppia che agisce sull'asse Y producendo la coppia $C_g = p l \alpha$ con effetto orientante; lo stesso segnale, previa attenuazione, comanda il motore di coppia verticale che agisce sulla Z producendo la coppia smorzante C_{sv} .
- La coppia di smorzamento verticale può essere realizzata applicando alla cassa del giroscopio, in posizione eccentrica il peso p che avevamo supposto fissato sull'asse Z. Il baricentro è più basso rispetto al centro di sospensione in modo da realizzare la coppia $C_g = p l \alpha$; il collegamento tra le vaschette avviene mediante

una strozzatura che rallenta il libero passaggio in modo da produrre una coppia ritardata rispetto alla posizione dell'asse del rotore e quindi alla C_u . Le due coppie, entrambe dirette nella direzione dell'asse Y , hanno effetti concorrenti e contrastanti.

10.D.8 – Coppia di smorzamento orizzontale

Lo smorzamento dell'ellisse di orientamento in spirale logaritmica ottenuta per mezzo di una coppia di smorzamento verticale C_{sv} può essere ottenuto anche mediante una coppia di smorzamento orizzontale C_{so} agente nel piano ZX tendente quindi a comprimere l'asse orizzontale dell'ellisse.

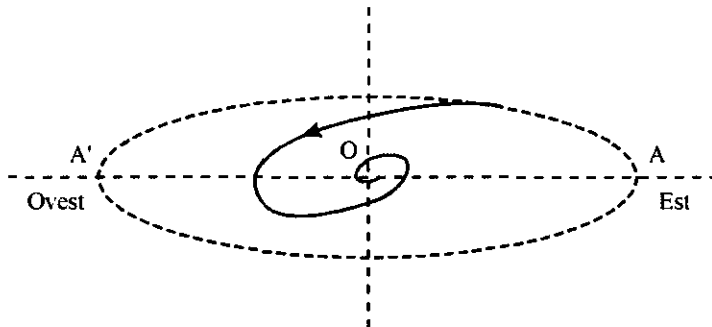


Figura D.6 – Spirale logaritmica di orientamento

La coppia C_{so} dovrà agire sull'asse Y , come la coppia di orientamento $C_g = pl\alpha$ alla quale la C_{so} si sommerà quando l'asse del rotore si avvicina al meridiano e si opporrà quando l'asse si allontana dal meridiano. Le coppie C_g e C_{so} dovranno essere in quadratura. Essendo C_g proporzionale ad α , nelle prime esperienze, si era pensato di rendere C_{so} proporzionale a $\dot{\alpha}$; questa procedura però è risultata difficile ed imprecisa da applicare. Si è ottenuto un buon risultato realizzando lo sfasamento mediante circuiti elettrici e con sistemi idraulici capaci di ritardare il flusso mediante tubi capillari.

In ogni caso la coppia di ingresso C_i che entra nel sistema è sfasata nel tempo mediante una costante di tempo τ in modo che la coppia di uscita sia

$$C_u = C_i - C_i e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (10.D.45)$$

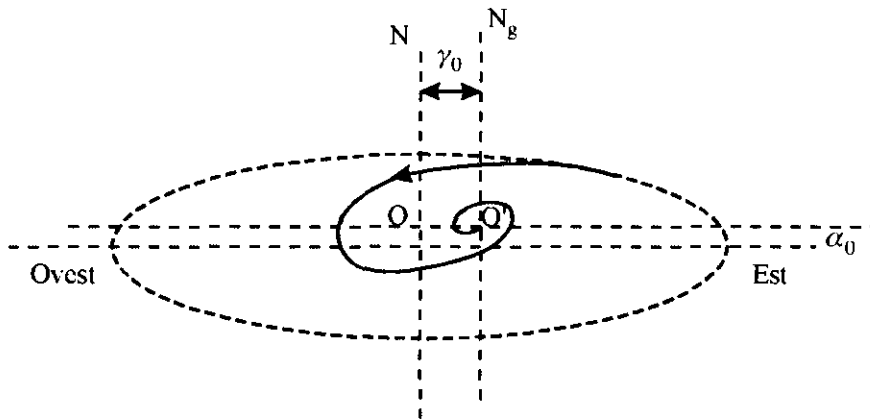


Figura 10.D.7 – Spirale logaritmica di orientamento

supponendo che l'azione della w_2 sia stata compensata, le equazioni del moto si possono scrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= -\frac{C_\alpha}{H} + \frac{C_{so}}{H} \\ \dot{\alpha} &= \gamma w_1\end{aligned}\quad (10.D.46)$$

la cui soluzione va cercata considerando l'espressione (10.D.45); la loro soluzione è molto complessa perché l'introduzione della (10.D.45) porta ad un sistema di equazioni differenziali del terzo ordine.

10.D.9 – Le coppie di smorzamento che trasformano un giroscopio in girobussola

Ricordando che un giroscopio libero (a due gradi di libertà) è caratterizzato dalla conservazione del momento della quantità di moto $H = I\dot{\Omega}$ e che l'orizzonte, a causa della rotazione terrestre, è soggetto alle due rotazioni angolari w_1 e w_2 di ben noto significato, le coppie rappresentate in figura 10.D.7 che trasformano un giroscopio in girobussola sono:

$$\begin{aligned}
 C_\alpha &= I\dot{\Omega} w_1 \gamma \\
 \pm C_g &= pl \sin\alpha \cong pl\alpha \\
 \pm C_o &= I\dot{\Omega} w_2 \\
 \pm C_w &= pl_1 \sin\alpha \cong pl_1\alpha \\
 \pm C_{so} &= pl_2 \alpha \left(1 - e^{-t} \right)
 \end{aligned}
 \tag{10.D.47}$$

- la prima C_α è la coppia direttiva che tende a portare l'asse di spin sul meridiano;
- la seconda C_g è la coppia di zavorramento che agisce lungo l'asse Y e che produce l'ellisse di orientamento;
- la terza C_o è la coppia di correzione per la latitudine; giace lungo l'asse Y e corregge la rotazione dell'orizzonte attorno all'asse verticale;
- la quarta C_w è la coppia di smorzamento verticale; giace lungo l'asse Z ed agisce nel piano orizzontale. Riduce il semiasse verticale dell'ellisse di orientamento.
- La quinta C_{so} è la coppia di smorzamento orizzontale; giace lungo l'asse Y ed agisce nel piano verticale riducendo il semiasse orizzontale dell'ellisse di orientamento.

10.E.1 - Risoluzione di una equazione differenziale

Nello studio del giroscopio vincolato al piano orizzontale si ottiene la seguente equazione differenziale a coefficienti costanti:

$$\ddot{\gamma} + \omega_0^2 \gamma = 0 \quad (10.E.1)$$

Per la sua risoluzione occorre scrivere l'equazione algebrica caratteristica associata:

$c^2 + \omega_0^2 = 0$ da cui si ricava $c = \pm i\omega_0$ con $i = \sqrt{-1}$. L'integrale generale della (E.1) è:

$$\gamma = k_1 e^{i\omega_0 t} + k_2 e^{-i\omega_0 t}$$

dalla quale si ricava derivandola rispetto al tempo anche

$$\dot{\gamma} = i\omega_0 k_1 e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 k_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Per ricavare le costanti di integrazione presenti occorre definire le condizioni iniziali al contorno; ponendo per $t=0$ $\gamma = \gamma_0$ e $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = 0$ si ottiene che $k_1 = k_2 = k$ e $\gamma_0 = 2k$.

Esprimendo i termini esponenziali in forma trigonometrica si ha:

$$\begin{aligned} \gamma &= k(\cos\omega_0 t + i \sin\omega_0 t + \cos\omega_0 t - i \sin\omega_0 t) = \\ &= 2k \cos\omega_0 t = \gamma_0 \cos\omega_0 t \\ \dot{\gamma} &= -\gamma_0 \omega_0 \sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (10.E.2)$$