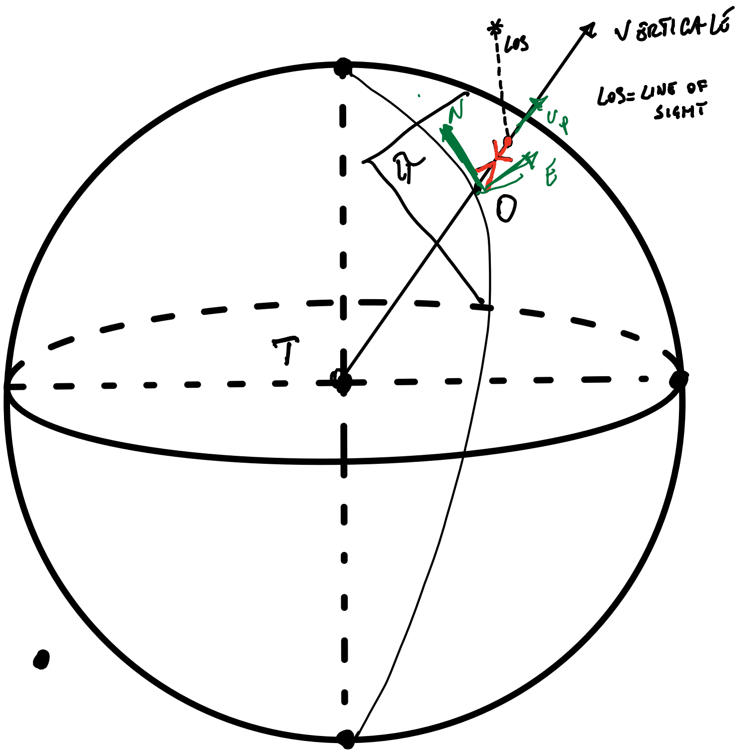
# SISTEMA DI RIFERIMENTO ENU

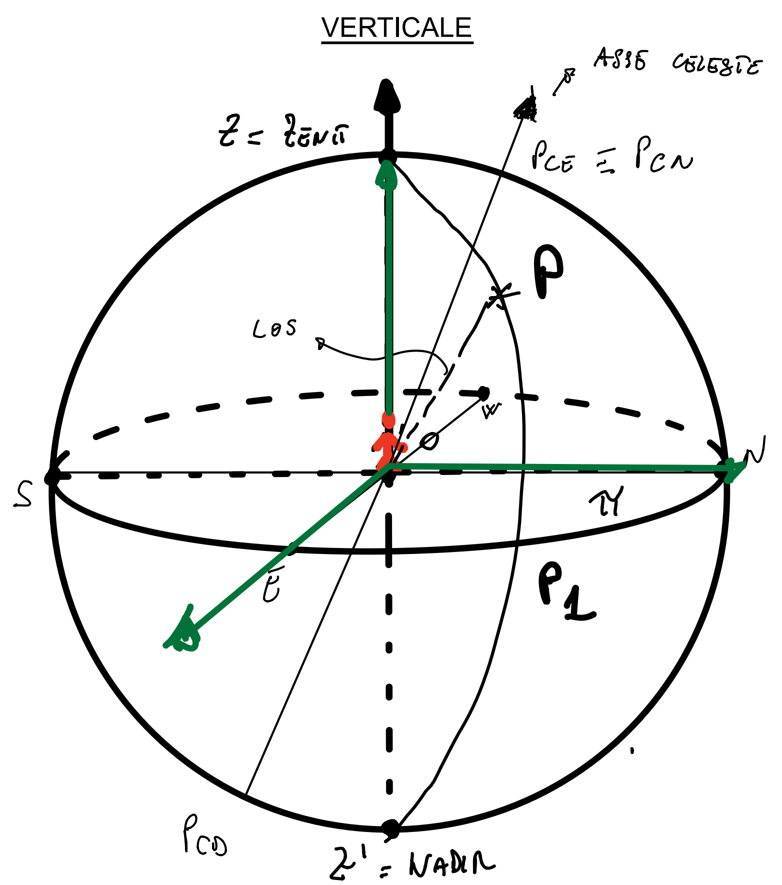
Si consideri un osservatore (O) sulla sfera terrestre di centro T, la verticale dell'osservatore e il suo piano orizzontale (piano perpendicolare alla verticale passante per l'occhio dell'osservatore); si proietti la direzione della verticale su una sfera di centro O e di raggio <u>indefinito</u>, inizialmente posto pari ad 1 detta Sfera delle direzioni o Sfera Celeste (aver considerato il raggio unitario non lede alla generalità in quando se rappresentiamo solo le direzioni su questa sfera, e cioè angoli tra direzioni,  non è necessario conoscere il suo raggio); La verticale incontra la sfera in due punti rispettivamente Zenit e Nadir della località in esame, mentre il piano orizzontale incontra la sfera nell'orizzonte astronomico o vero.
Rappresentiamo le linee coordinate sull'orizzonte astronomico e cioè l'intersezione rispettivamente del piano orizzontale con il piano meridiano celeste (individuato dalla verticale e dalla direzione dell'asse celeste) e del primo verticale.
Si Definisce ENU il sistema di riferimento cartesiano centrato nella posizione dell'osservatore con:

1. Asse Z verticale verso la direzione dello Zenit (Up in inglese)
2. Piano X-Y orizzontale ed assi rispettivamente orientati verso l'Est ed il Nord

Rappresentiamo tale sistema di riferimento sia sulla sfera terrestre che sulla sfera delle direzioni.
Il sistema di riferimento cartesiano ENU è un sistema locale e cioè adatto a rappresentare solo localmente lo scenario intorno ad un osservatore e quindi utilizzato per brevi intervalli di navigazione. E' un sistema solidale alla terra in quanto ruota con esso ed il centro si muove su di essa (se l'osservatore è in movimento).




SFERA TERRESTRE




SFERA DELLE DIREZIONI

Consideriamo adesso il sistema di coordinate curvilineo associato al sistema ENU e cioè il sistema altazimutale. Le coordinate alta-azimutali di un oggetto rilevato (Astro o Punto Osservato) sono così ottenute:

Consideriamo il verticale passante per l'oggetto rilevato e il suo piede indicato con P1 (si veda Fig.1),

$P_1\hat{O}P = \widehat{PP_1} = h \quad P_1\hat{O}N = \widehat{NP_1} = Az \quad$ se $R = 1$

Altezza di P   Azimut di P

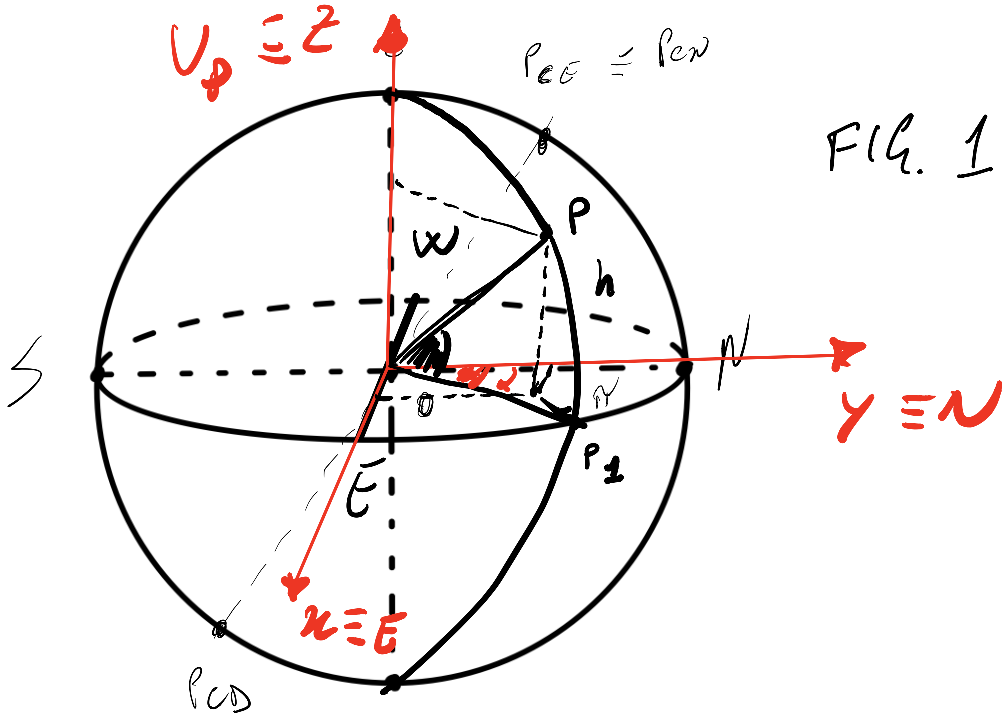



FIG. 1

Le coordinate Alta-Azimutali rappresentano quindi le coordinate curvilinee (considerando la sfera delle direzioni di raggio unitario) che possono essere messe in relazione con le coordinate cartesiano ENU, vediamo come di seguito.
A tal fine si consideri  una sfera di raggio pari alla distanza D tra Osservatore e Punto rilevato P.

Dal punto P si conduca la perpendicolare al piano orizzontale e alla verticale dell'osservatore ottenendo rispettivamente P' ed F. Da P' conduciamo la perpendicolare agli assi coordinati ottenendo rispettivamente H e K.  (Vedi Figura 2)

**Le coordinate rettangolari ENU sono Rispettivamente:**

$\overline{OH} = E$

$\overline{OK} = N$

$\overline{OF} = U$

DA CUI:

$P(E, N, U)$ oppure $(h, Az)$

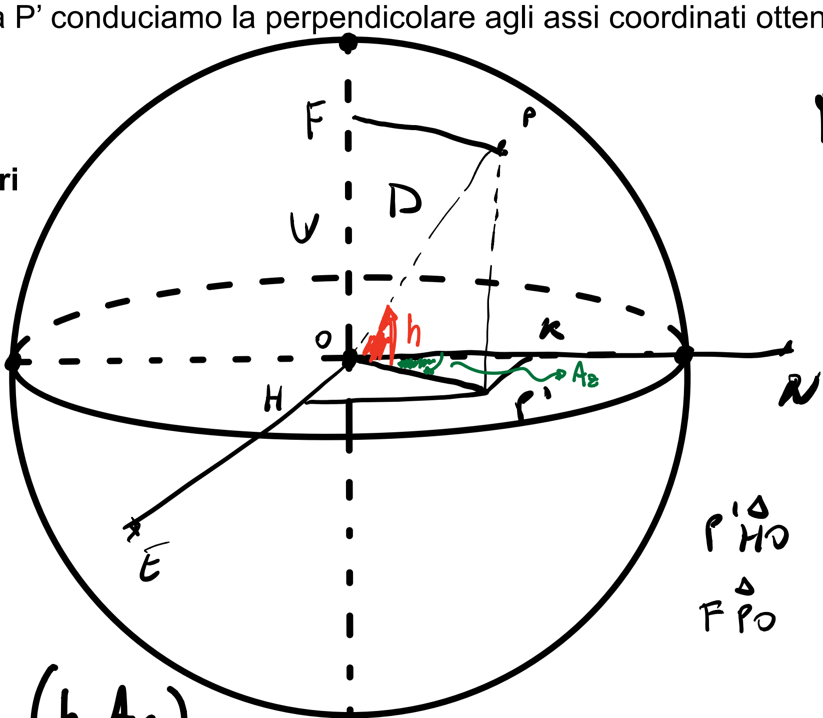
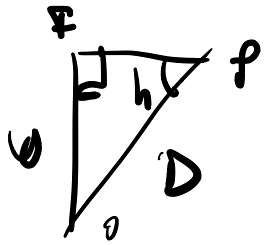



FIG. 2

Consideriamo nel piano verticale passante per l'oggetto osservato P il triangolo $O\hat{F}P$ che si ridisegna di seguito



Dove: $\overline{OF} = U$

$\overline{OP} = D$

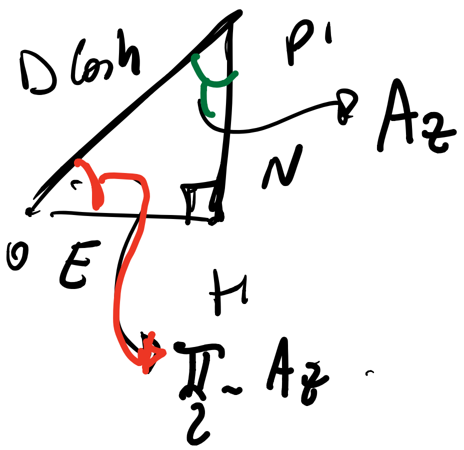
$O\hat{P}F = h$

Dalla trigonometria piana si ha:

$$\overline{FP} = \overline{OD} \cos O\hat{P}F = D \cos h$$

$$\overline{OP} = \overline{OD} \sin O\hat{P}F = D \sin h \Longrightarrow \boxed{U = D \sin h}$$

Nel piano orizzontale si consideri il triangolo $O\overset{\Delta}{H}P'$ che si ridisegna di seguito:



Dove: $\overline{OP'} = \overline{FP} = D \cos h$

$\overline{OH} = E$

$\overline{HP'} = N$

Dalla trigonometria piana si ha:

$$\left.\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OP'} \sin(O\hat{P'}H) = D \cos h \sin A_z \\ \overline{HP'} &= \overline{OP'} \cos(O\hat{P'}H) = D \cos h \cos A_z \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E &= D \cos h \sin A_z \\ N &= D \cos h \cos A_z \end{aligned}}$$

Pertanto il set di equazioni (1') esprimono il passaggio: $(h, A_z) \rightarrow (E, N, U)$

$$\begin{cases} E = D \cos h \sin A_z \\ N = D \cos h \cos A_z \\ U = D \sin h \end{cases} \qquad (1')$$

Se invece vogliamo la trasformazione di coordinate inversa e cioè: $(E, N, U) \rightarrow (h, A_z)$

Quadriamo e sommiamo ambo i membri delle prime due relazioni della (1') ottenendo:

$$E^2+N^2 = D^2\cos^2 h\,\underbrace{(\sin^2 A_z + \cos^2 A_z)}_{=1} = D^2\cos^2 h \qquad (*)$$

Quadrando la terza relazione si ha:

$$V^2 = D^2\sin^2 h \qquad (**)$$

Dividendo ambi i membri delle relazioni $(*)$ e $(**)$

$$\frac{\cancel{D^2}\sin^2 h}{\cancel{D^2}\cos^2 h} = \frac{V^2}{E^2+N^2} \Rightarrow \boxed{h = tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{V^2}{E^2+N^2}}\right)}$$

Dividendo ambo i membri delle prime due relazioni del sistema (1') si ha;

$$\frac{E}{N} = \frac{D\cos h \sin A_t}{D\cos h\cos A_z} \Rightarrow \boxed{A_t = tg^{-1}\left(\frac{E}{N}\right)}$$

Pertanto il set di equazioni (2') esprime il passaggio $(E,N,U) \to (h, A_z)$

$$\begin{cases} h = tg^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{V^2}{E^2+N^2}}\right) \\ A_z = tg^{-1}\left(\dfrac{E}{N}\right) \end{cases}$$