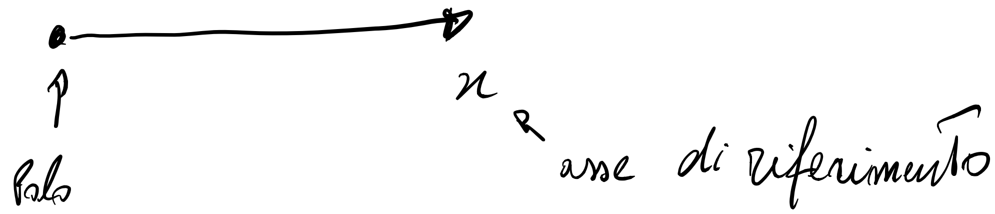
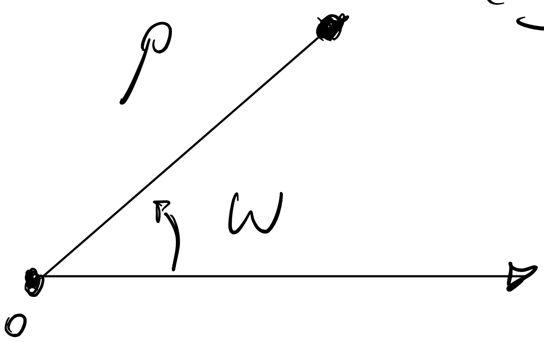
SISTEMA DI COORDINATE POLARI

Consideriamo lo spazio bidimensionale (R^2) e introduciamo un punto detto **Polo** ed un asse di riferimento



Ogni punti del piano è individuato dalla coppia di valori:

$P(\rho, \omega)$ COORDINATE POLARI



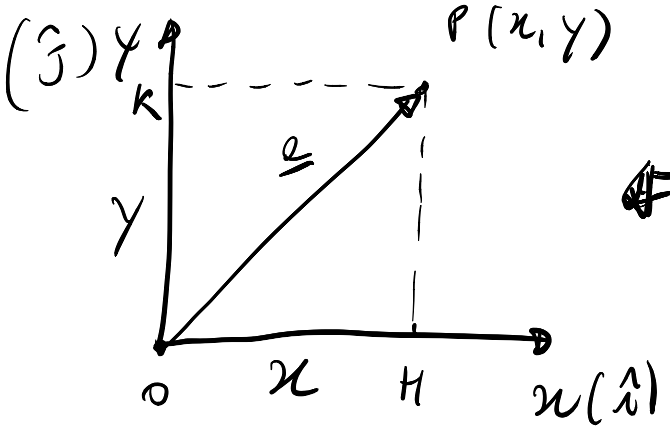
ρ detto raggio vettore e cioè dimensione del segmento $\overline{OP}$

ω detta anomalia, e cioè angolo tra il raggio vettore e l'asse di riferimento, contato tra 0 e 360° in senso antiorario a partire da x

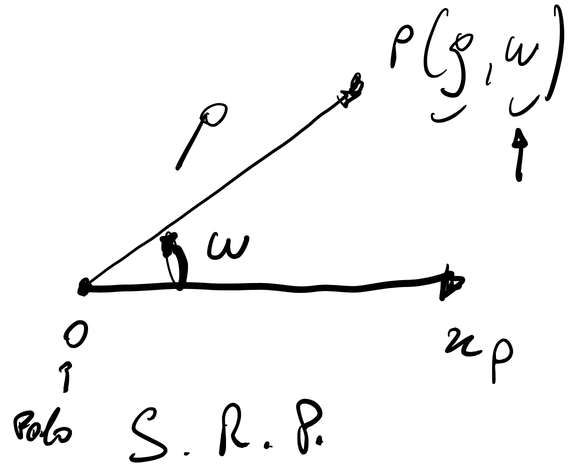
<u>Passaggio da Coordinate Cartesiane e Polari e viceversa</u>

Consideriamo il passaggio tra Coordinate Cartesiane (C.P.) e Coordinate Cartesiane (C.C.). Per questo introduciamo i rispettivi sistemi di riferimento in uno spazio bidimensionale
.

2-D , R^2



$\Longleftrightarrow$



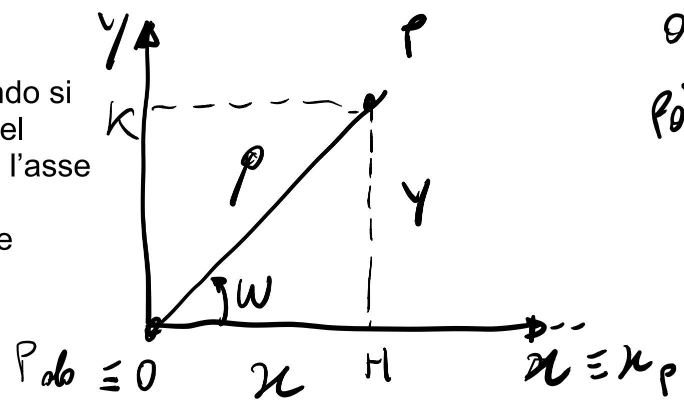
S. R. C.

S. R. P.

$\underline{I}^{o}$ DA C. P. $\rightarrow$ A C. C.

hp (ρ, ω) Th. (x, y)

Disegniamo i due sistemi di riferimento facendo si che l’origine del S.R.C. coincida con il polo del S.R.P. e che l’asse x del S.R.C. coincida con l’asse di riferimento del S.R.P.
Di un punto P consideriamo simultaneamente le C. C. e le C.P.



$\overline{OP} = \rho$

$P\hat{O}H = \omega$

(FIG. 1)

Dal Triangolo $O\overset{\Delta}{H}P$ applicando le formule della trigonometria piana

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OP} \cos H\hat{O}P \Leftrightarrow \\ \overline{PH} &= \overline{OP} \sin H\hat{O}P \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} x = \rho \cos \omega \\ y = \rho \sin \omega \end{cases} \quad (1)$$

II° C.C. $\rightarrow$ C.P.

Hp (x,y) Th. (ρ, w)

Dallo stesso triangolo di FIG. 1, si a:

Applicando io Teorema di Pitagora: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

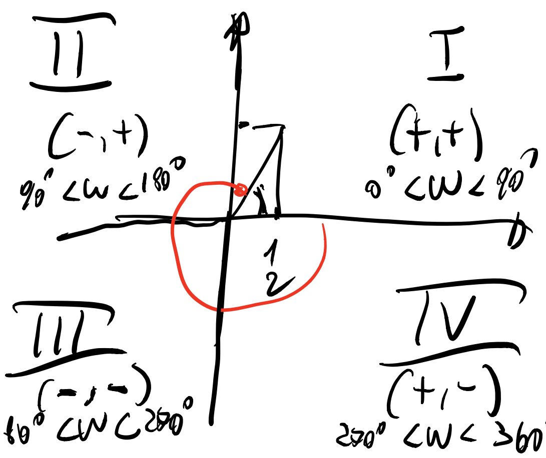
Applicando le formule della trigonometria piana: $\overline{PH} = \overline{OH}\, tg\, w \Rightarrow tg\, w = \frac{y}{x} \Rightarrow w = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ w = arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Es. I $\quad P\left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow \rho = ? \quad w = ?$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ ; \quad w = arctg\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = arctg\, 2 = 63{,}^{\circ}4$$

Si consideri che per come è stato introdotto il S.R.P. si ha che
nel primo quadrante l'anomalia è compresa tra 0° e 90° e
le C.C. dei punti saranno entrambi positive;
nel secondo quadrante l'anomalia è compresa tra 90° e 180°
mentre per le C.C. si ha ascissa negativa e ordinata positiva
nel terzo quadrante l'anomalia è compresa tra 180° e 270°
entrambe le C.C. saranno negative
nel quarto quadrante, l'anomalia è compresa tra 270° e 360°
mentre per le C.C. si ha ascissa positiva e ordinata negativa



Per talune applicazioni navigazionali si utilizzano per convenzione angoli misurati in senso orario a partire da un asse “verticale” (significato geometrico non fisico in questo momento), ad esempio se operiamo rilevamenti polari/veri o tracciamo delle rotte.
Pertanto è conveniente considerare il S.R.P. così come definito in figura 2, e cioè con asse di riferimento coincidente con l’asse delle ordinate di un S.R.C.

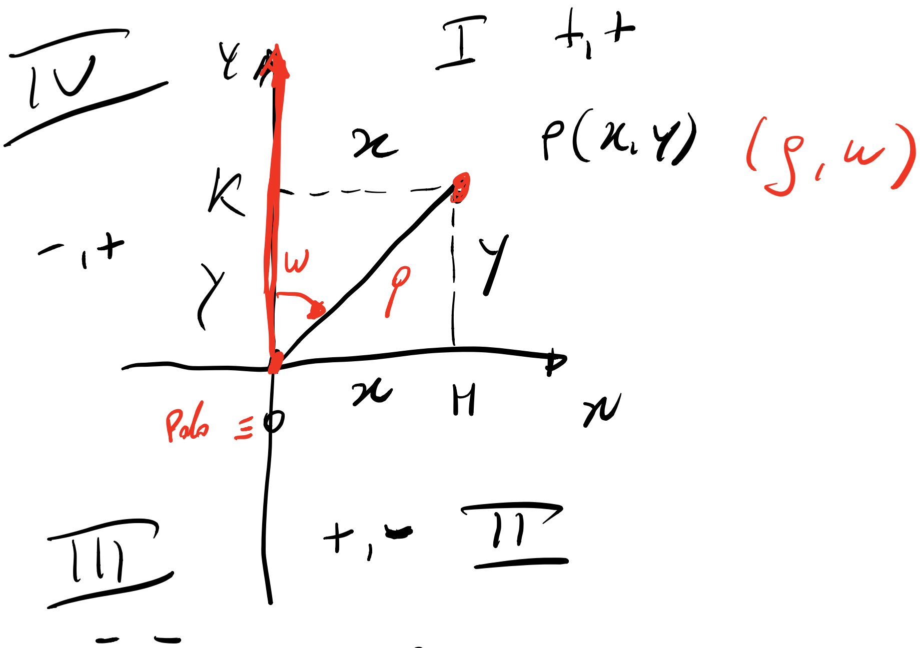


FIG. 2

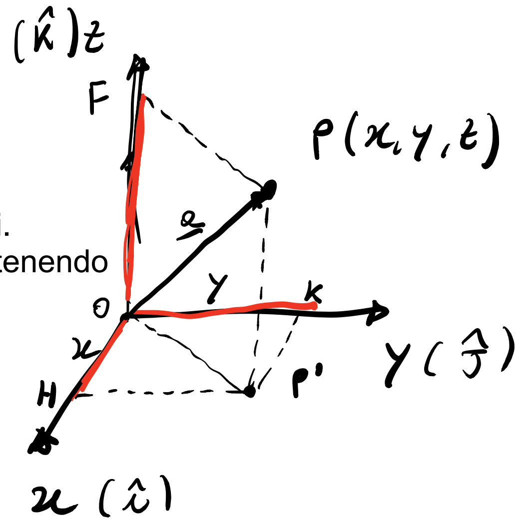
Le nuove formule che indicheranno i passaggi tra i due sistemi di riferimento sono quelle (1’) e (2’) di seguito ottenute dalle stesse considerazioni fatte in precedenza considerando il triangolo $O\overset{\triangle}{K}P$

$$\begin{cases} x = \rho \sin w \\ y = \rho \cos w \end{cases} \qquad (1')$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{x}{y} = \operatorname{tg} w \Rightarrow w = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ w = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \end{cases} \qquad (2')$$

Sistemi di Riferimento Cartesiano Tridimensionali ($\mathbb{R}^3$)

Si estendono di seguito i concetti già introdotti, facendo attenzione a come si ottengono per costruzione le C.C. di P
Si proietta P sul piano x-y ottenendo P' e si proietta P' sugli assi coordinati.
Da P' si traccia la parallela ad $\overline{OP'}$ ottenendo il punto F.



$\overline{OH} = x$
$\overline{OK} = y$
$\overline{P'P} = z = \overline{OF}$

Il vettore $\underline{a}$ che rappresenta la posizione di P nel sistema 3-D si indica con:

$$\underline{a}(x, y, z), (a_x, a_y, a_z), (a_1, a_2, a_3)$$

$$\hat{i}(1, 0, 0), \quad \hat{j}(0, 1, 0), \quad \hat{k}(0, 0, 1)$$

$$\underline{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$$

Es) $\underline{a}(1, 0, 1)$ $\underline{b}(0, 1, 1)$ il vettore risultate si ottiene algebricamente:

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = (1, 1, 2)$$

Il suo modulo:

$$|\underline{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

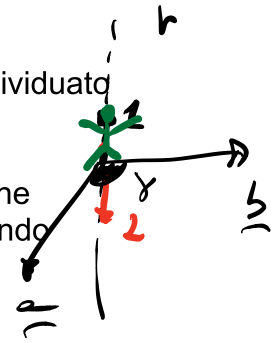
PRODOTTO VETTORIALE

Sianno $\underline{a}$, $\underline{b}$ due vettore dello spazio 3-D, il prodotto vettoriale tra i due vettori, che si indica con il simbolo $\times$, è un vettore $\underline{c}$, dato da

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c}$$

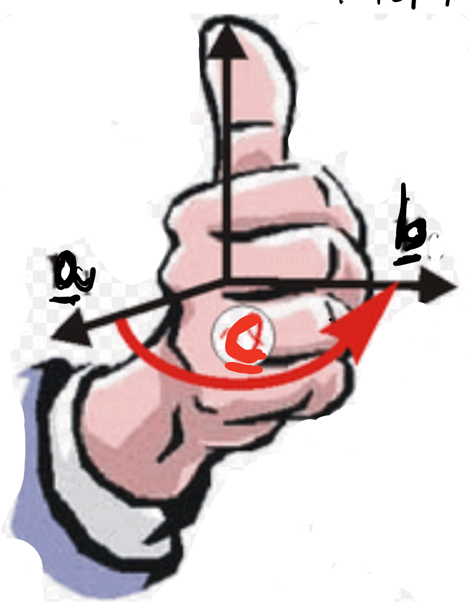
$\underline{c}$:

- Direzione (retta r in figura) : direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori
- Verso (1↑) : verso piedi-testa di un osservatore che vede il primo vettore ruotare sul secondo in senso antiorario:
- Modulo $|\underline{c}|$: dato dalla seguente relazione $|c| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin \gamma$

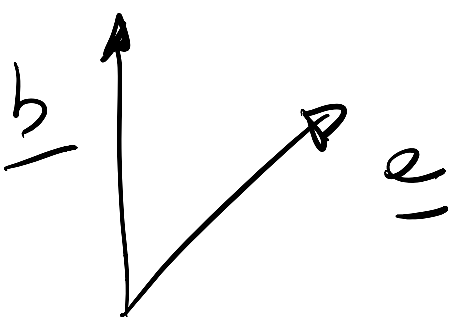


REGOLA DELLA MANO DESTRA

Poggiamo il palmo della mano destra sul piano $(\underline{a},\underline{b})$ con direzione $\underline{a}$ chiudiamo il palmo verso $\underline{b}$
Il verso del pollice ci indicherà
Il verso del vettore $\underline{c}$



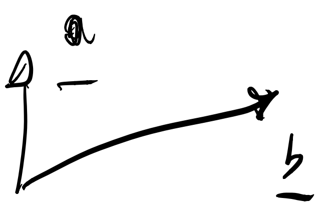
Es III



$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

USCENTE DAL PIANO DEL FOGLIO

Es. IV



ENTRANTE NEL FOGLIO