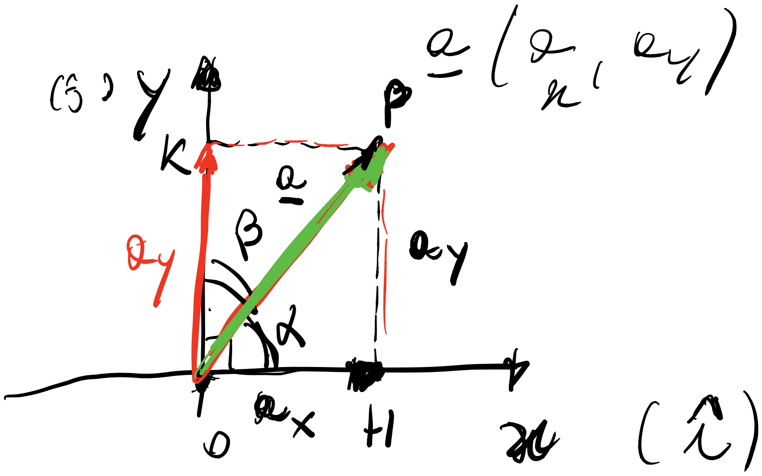
SISTEMA DI RIFERIMENTO IN 2-D

Si consideri nello spazio bidimensionale (anche detto R^2) un Sistema di Riferimento Cartesiano (SRC) individuato da un punto del piano, O, detto origine e da due direzioni non parallele (in fig.1) gli assi coordinati x e y individuati dai rispettivi versori (vettori di modulo unitario) indicati con $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$



(Fig. 1)

$$P(a_x, a_y) \qquad \underline{a}(a_x, a_y)$$

DOVE:

$a_x = |\overline{OH}|$

$a_y = |\overline{OK}| = \overline{PH}$

I due versore degli assi coordinati hanno componenti data da:

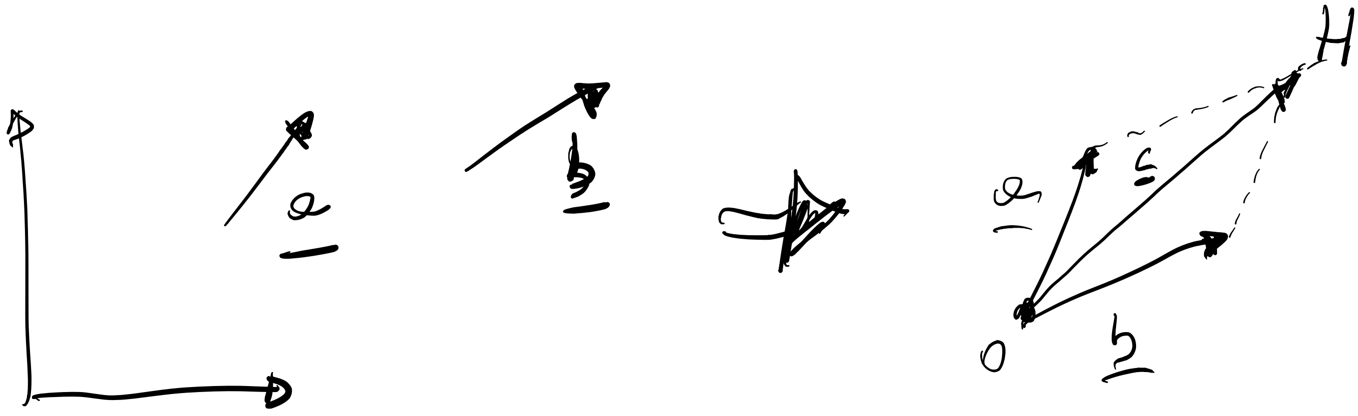
$$\hat{\imath}(\hat{\imath}_x, \hat{\imath}_y)\ ? \qquad \hat{\imath}(1, 0)$$

$$\hat{\jmath}(\jmath_x, \jmath_y)\ ? \qquad \hat{\jmath}(0, 1)$$

<u>SOMMA TRA DUE VETTORI</u>

SIA $\underline{a}$, $\underline{b}$; si def $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ VETTORE RISULTANTE

IL VETTORE OTTENUTO GEOMETRICAMENTE APPLICANDO LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA, E CIOÈ:



1) Movimento rigido nel piano (traslazione) facciamo coincidere i due punti di applicazione

2) Dall'estremo libero del primo vettore tracciamo la parallela al secondo e dall' estremo libero del secondo tracciamo la parallela al primo vettore ottenendo il punto di intersezione H

3) La congiungente OH è il vettore risultante $\underline{c}$ DIAGONALE MAGGIORE del parallelogramma ottenuto

Risoluzione algebrica

Siano

$$\underline{a}(a_x, a_y) \qquad \underline{b}(b_x, b_y) \Rightarrow \underline{a}+\underline{b}=\underline{c}(c_x, c_y)$$

La risultante è un vettore di due componenti, vediamo di seguito l'operazione algebrica che ci permette di calcolarle:

$$c_x = a_x + b_x \qquad c_y = a_y + b_y$$

Basta quindi sommare le componenti <u>omonime</u> per ottenere le componenti del vettore risultante

NOTAZIONE COMPATTA

NOTAZIONE ESTESA

$$\underline{a}(a_x, a_y) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

- $|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ MODULO

DAL TRIANGOLO $O\hat{P}H$ di Fig 1 applicando la Trigonometria piana SI HA

$a_x = |\underline{a}| \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\underline{a}|}$

$a_y = |\underline{a}| \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\underline{a}|}$

DETTI

COSENI DIRETTORI

Coseni degli angoli che il vettore $\underline{a}$ forma con gli assi coordinati α, β

Il vettore che ha per componenti i due coseni direttori è il Versore di $\underline{a}$ infatti:

$$\hat{a}\left(\frac{a_x}{|\underline{a}|}, \frac{a_y}{|\underline{a}|}\right)$$

Coseni direttori

1) Sono Paralleli, $\hat{a} \parallel \underline{a}$

2) STESSO VERSO (?)

I due vettori avendo gli stessi coseni direttori sono paralleli ed equiversi

3) STESSO MODULO UNITARIO, INFATTI:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{a_x^2}{|\underline{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\underline{a}|^2}} = \sqrt{\frac{a_x^2 + a_y^2}{|\underline{a}|^2}} = \sqrt{\frac{|\underline{a}|^2}{|\underline{a}|^2}} = \sqrt{1} = 1$$

Es. I

$\underline{a}(3, 2)$

Calcoliamo

1) $|\underline{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

2) Suoi Coseni Direttori

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = 33^\circ,6901$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 56^\circ,3099$

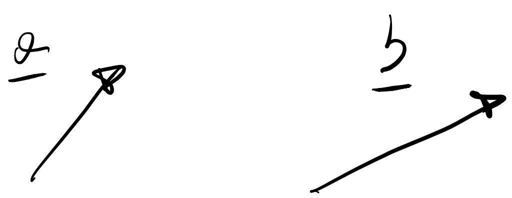
3) $\hat{\underline{a}}$, e cioè: $\hat{\underline{a}}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

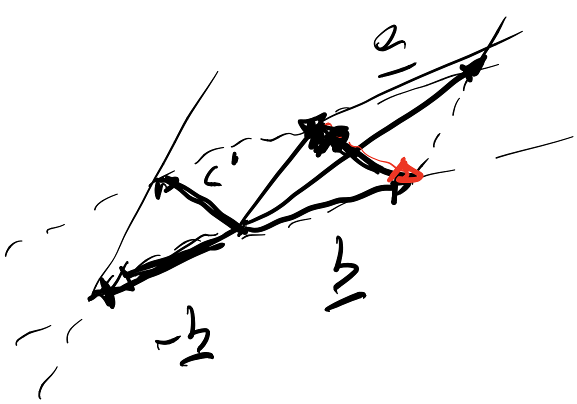
– SOTTRAZIONE TRA VETTORI

La sottrazione tra vettori si riduce ad una somma, infatti:

$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b}) = \underline{c}'$$

Applichiamo la regola del parallelogramma ai vettori $\underline{a}$ ed $-\underline{b}$





$$\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}'$$

$$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c}''$$

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

- PRODOTTO SCALARE

Siano $\underline{a}$, $\underline{b} \in R^2$ dì componenti $\underline{a}(a_1, a_2)$ $\underline{b}(b_1, b_2)$

Si definisce prodotto scalare, lo scalare dato dalla seguente formula

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \alpha = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (1)$$

Si dimostra che il prodotto scalare tra due vettori è anche dato dalla seguente relazione

$$\alpha = |\underline{a}||\underline{b}| \cos \gamma \quad (2)$$ Dove γ è l'angolo tra i due vettori

Dimostriamo l'assetto precedente con il prossimo esempio

Es I

$\underline{a}(1, 2)$ $\underline{b}(3, 1)$

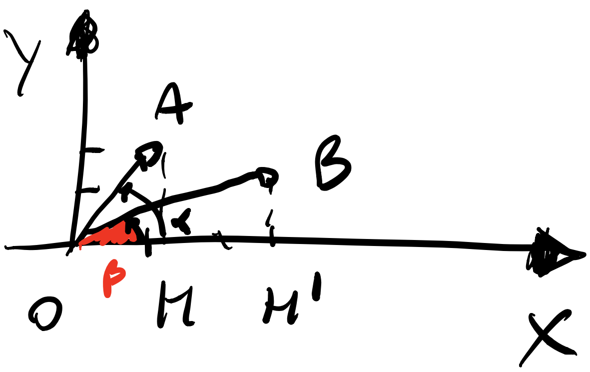
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

Adesso calcoliamo

$$|\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cos \gamma \quad (3)$$

$|a| = \sqrt{5} \qquad |b| = \sqrt{10}$

Per calcolare γ rappresentiamo graficamente i due vettori



$B\hat{O}A = \gamma$

$A\hat{O}H = \alpha$

$BOH' = \beta$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63^\circ{,}4349$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 18^\circ{,}4349$$

$$\gamma = \alpha - \beta = 45^\circ$$

Dalla (3) si ha:

$$|a||b|\cos\gamma = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos(45^\circ) = 5$$

c.v.d. infatti

$$|a||b|\cos\gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

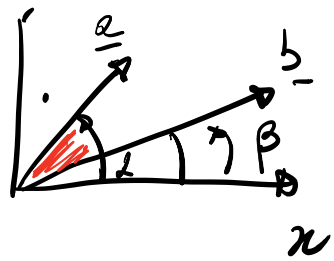
Dimostrazione che possiamo effettuare anche come segue .

Sia $\underline{a} , \underline{b} \in R$

vogliamo dimostrare che:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\gamma$$

DOVE:



$$\gamma = \alpha - \beta$$

[RICORDIAMO
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$]

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2) \cdot \frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} \frac{|\underline{b}|}{|\underline{b}|} =$$

$$= \left(\underbrace{\frac{a_1}{|\underline{a}|}}_{\cos\alpha} \underbrace{\frac{b_1}{|\underline{b}|}}_{\cos\beta} + \underbrace{\frac{a_2}{|\underline{a}|}}_{\cos(90^\circ-\alpha)} \underbrace{\frac{b_2}{|\underline{b}|}}_{\cos(90^\circ-\beta)} \right) \cdot |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| = \left(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \right) |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$$

$$= |\underline{a}||\underline{b}| \cos(\alpha - \beta) = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\gamma$$