NAVIGAZIONE INTEGRATA

Navigazione Inerziale

$$\dot{\mathbf{X}}^*(t) = f[\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t)]$$

Linearizzazione dell'equazione di stato

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\mathbf{X}}^*(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \delta\mathbf{X} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}\right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} \delta\mathbf{U}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}\right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial U_n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial U_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*}$$

- Posto

$$\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t) = \delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(t); \quad \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^*(t) = \delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{u}(t)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = \mathbf{F}(t); \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}\right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = \mathbf{G}(t)$$

Navigazione Inerziale

- Si ha:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\,\mathbf{u}(t)$$

- dove:
  - **x**(t) è un vettore le cui componenti **rappresentano le deviazioni rispetto allo stato nominale**
  - **F**(t) è una matrice che esprime **la dinamica con la quale gli errori si evolvono**;
  - **G**(t)**u**(t) è un termine che rappresenta gli errori generati internamente al sistema inerziale

- Anche sotto la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix}$$

RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI STATO

Navigazione Inerziale

- Si consideri l'omogenea associata dell'equazione (12):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

- Omogenea associata $\qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$

- Supponendo **note le condizioni iniziali,** cioè:

$$\mathbf{x}(t_0) = [\mathbf{x}(t)]_{t=0}$$

- si può scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t_0, t)\mathbf{x}(t_0)$$

EVOLUZIONE LIBERA

- avendo indicato con: $\phi(t_0, t)$

- una matrice *n x n* detta **MATRICE DI *TRANSIZIONE*** rappresentante **<u>un operatore lineare</u>** che trasforma:

$$\mathbf{x}(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t).$$

- Tale matrice gode delle **seguenti proprietà:**

$$\phi(t,t) = \mathbf{I}$$

$$\phi(t_1,t_2)\,\phi(t_2,t_3) = \phi(t_1,t_3) \qquad \text{(Transizione)}$$

$$\phi(t_1,t_2) = \phi^{-1}(t_2,t_1) \qquad \text{(Inversione)}$$

Considerando le relazioni:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{x}(t) = \phi(t_0,t)\mathbf{x}(t_0)$$

e si ricava dall'equazione:

$$\dot{\phi}(t_0,t)x(t_0) = F(t)\phi(t_0,t)x(t_0) \Rightarrow \dot{\phi}(t_0,t) = \mathbf{F}(t)\phi(t_0,t)$$

- Integrando si ha: $$\int \frac{\dot{\phi}(t_0,\tau)}{\phi(t_0,\tau)}d\tau = \int \mathbf{F}(\tau)d\tau$$

$$\ln(\phi(t_0,t)) = \int \mathbf{F}(\tau)d\tau \Rightarrow \phi(t_0,t) = \exp[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau)d\tau]$$

$$\phi(t_0, t) = \exp[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau)d\tau]$$

- che ***sviluppata in serie*** diventa:

$$\phi(t_0, t) = \mathbf{I} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau)d\tau + \frac{1}{2!}[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau)d\tau]^2 + \cdots$$

- Nel caso stazionario in cui **F**(*t*) è costante, oppure per *Δt* abbastanza piccolo tale che **F**(*t*) possa considerarsi costante in tale intervallo, si ha:

$$\phi(t_0, t) = \mathbf{I} + \Delta t\mathbf{F} + \frac{\Delta t^2}{2!}\mathbf{F}^2 + \cdots$$

- serie che, per *Δt* molto piccolo, può addirittura arrestarsi al termine di **primo ordine**.

Navigazione Inerziale

- Sempre nel caso di sistema stazionario, $\phi(t_0, t)$ si può anche ricavare attraverso la sua trasformata di Laplace:

$$\phi(t_0, t) = \exp[\int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(\tau) d\tau]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}[\phi(t_0, t)] = \mathcal{L}[\exp(\mathbf{F}(t - t_0))] = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$$

- si calcola pertanto $(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}$ e da essa si calcola $\phi(t_0, t)$ utilizzando una tavola delle trasformate inverse di Laplace.

EVOLUZIONE FORZATA

- **EVOLUZIONE FORZATA,** risolvere l'equazione:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t)$$

- Effettuiamo un cambio di variabili

$$z(t) = e^{-\mathbf{F}(t)\cdot t}\,\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{\mathbf{F}(t)\cdot t}\,z(t)$$

- Differenziamo l'equazione:

$$\frac{d}{dt}\left[z(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{F}(t)\cdot t}\,\mathbf{x}(t)\right]$$

$$\dot{\mathrm{z}} = -\mathrm{F}e^{-\mathbf{F}\cdot t}\,\mathbf{x} + e^{-\mathbf{F}(t)\cdot t}\,\dot{\mathbf{x}} = -\mathrm{F}e^{-\mathbf{F}\cdot t}\,\mathbf{x} + e^{-\mathbf{F}(t)\cdot t}\left(\mathrm{Fx} + \mathrm{w}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathrm{z}} = -\mathrm{F}e^{-\mathbf{F}\cdot t}\,\mathbf{x} + \mathrm{F}e^{-\mathbf{F}\cdot t}\mathbf{x} + e^{-\mathbf{F}\cdot t}w$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathrm{z}} = e^{-\mathbf{F}\cdot t}w$$

- Integriamo quest’ultima relazioni tenendo conto dei limiti di integrazione:

$$x(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z(0) = 0$$

$$z(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau} w(\tau)\, d\tau$$

- Effettuando il cambio di variabile inverso:

$$x(t) = e^{\mathbf{F}(t)\cdot t} z(t) = e^{\mathbf{F}\cdot t} \int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau} w(\tau)\, d\tau$$

- Pertanto l'evoluzione forzata x_f è:

$$x_f = e^{\mathbf{F}\cdot t}\int_0^t e^{-\mathbf{F}\tau} w(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-\mathbf{F}\cdot(t-\tau)} w(\tau)\,d\tau$$

$$\phi(t_0, t) = \exp\left[\int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau)\,d\tau\right]$$

$$x_f = \int_0^t \Phi(t,\tau)\, w(\tau)\,d\tau$$

- La soluzione dell'equazione differenziale di stato diventa:

$$x(t) = x_l + x_f$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t_0, t)\mathbf{x}(t_0, t) + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau)\mathbf{w}(\tau)\, d\tau$$

Navigazione Inerziale

- Se l'intervallo $t - t_0$ è sufficientemente piccolo si può porre:

$$\int_{t_0}^{t} \underset{\downarrow \atop \mathrm{I}}{\phi(t,\tau)} \mathbf{w}(\tau)\, d\tau \longrightarrow \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t_0)$$

- e pertanto: $\mathbf{x}(t) = \phi(t_0, t)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{w}(t)$

- che può, per i fini pratici, essere scritta per intervalli finiti:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \phi_n \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n$$

PV model

Determiniamo il modello di processo e la matrice di transizione di un mobile in moto uniforme, e cioè velocità del mobile costante e pari al valore che aveva all'istante iniziale $V(t) = V(t_0) = V_0$.
Posto:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}$$

Determiniamo prima la matrice dinamica del processo F, dalla considerazione:

$$\begin{cases} \dot{P} = V = 0P + 1V \\ \dot{V} = 0 = 0P + 0V \end{cases}$$, in forma compatta $\underline{\dot{x}} = F\underline{x}$ con $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice di transizione diventa:

$$\Phi(t_0, t) = I + F\Delta t + \frac{1}{2!}FF\Delta t^2 + + \frac{1}{3!}FFF\Delta t^3 + \ldots = I + F\Delta t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

essendo $FF = 0$ e quindi essendo nulli tutti i termini superiori al primo

PV model

Applicando la matrice di transizione del PV-model allo stato iniziale $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_0$si ha:

$\underline{x}(t) = \Phi(t_0, t)\underline{x}_0$ equivale $\begin{bmatrix} P(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$ e cioè:

$\begin{cases} P(t) = P_0 + V_0 \Delta t \\ V(t) = V_0 \end{cases}$ equazione del moto uniforme.

Il modello di processo di una dinamica lineare ($V = cost$) si riflette in una matrice di transizione lineare in Δt.

Se siamo incerti sull'ipotesi dinamica fatta nel determinare il modello di processo ($\dot{V} = 0$ e cioè $V(t) = V_0$) inseriamo del rumore di processo:

$\begin{cases} \dot{P} = V = 0P + 1V \\ \dot{V} = w_{PV} = 0P + 0V + w_{PV} \end{cases}$ che equivale $\dot{\underline{x}} = F\underline{x} + \underline{w}$ con $\underline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{PV} \end{bmatrix}$

modello del moto quasi uniforme che quindi è un moto accelerato dell'incertezza del modello adottato ($\dot{V} = w_{PV}$).

PVA model

Determiniamo il modello di processo e la matrice di transizione di un mobile in moto uniformemente accelerato (ipotesi che meglio rappresenta la dinamica di un mobile qualsiasi osservata in un intervallo infinitesimo), e cioè accelerazione del mobile costante e pari a al valore che aveva all'istante iniziale

$a(t) = a(t_0) = a_0$.

Posto:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} P \\ V \\ a \end{bmatrix}$$

Determiniamo prima la matrice dinamica del processo F, dalla considerazione:

$$\begin{cases} \dot{P} = V = 0P + 1V + 0a \\ \dot{V} = a = 0P + 0V + 1a \\ \dot{a} = 0 = 0P + 0V + 0a \end{cases}$$

, in forma compatta $\underline{\dot{x}} = F\underline{x}$ con $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

PVA model

La matrice di transizione diventa:

$$\Phi(t_0, t) = I + F\Delta t + \frac{1}{2!}FF\Delta t^2 + +\frac{1}{3!}FFF\Delta t^3 + \ldots = I + F\Delta t + \frac{1}{2!}FF\Delta t^2$$

essendo $FFF = 0$ e quindi essendo nulli tutti i termini superiori al secondo .

Sostituendo F si ha:

$$\Phi(t_0, t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicando la matrice di transizione del PVA-model allo stato iniziale $\underline{x}(t_o) = \underline{x}_0$ si ha:

$\underline{x}(t) = \Phi(t_0, t)\underline{x}_0$ equivale $\begin{bmatrix} P(t) \\ V(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ V_0 \\ a_0 \end{bmatrix}$

PVA model

Pertanto:

$\underline{x}(t) = \Phi(t_0, t)\underline{x}_0$ equivale al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} P(t) = P_0 + V_0\Delta t + 1/2 a_0 \Delta t^2 \\ V(t) = V_0 + a_0 \Delta t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

equazione del moto uniformemente accelerato.

Tale modello corrisponde, quindi, ad una dinamica del secondo ordine.
Se siamo <u>incerti</u> sull'ipotesi dinamica effettuata nel determinare il modello di processo ($\dot{a} = 0$ e cioè $a(t) = a_0$) inseriamo del <u>rumore</u>:

$$\begin{cases} \dot{P} = V = 0P + 1V + 0a \\ \dot{V} = a = 0P + 0V + 1a \\ \dot{a} = w = 0P + 0V + 0a + w \end{cases}$$

che equivale $\underline{\dot{x}} = F\underline{x} + \underline{w}$ con $\underline{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix}$

modello del moto <u>quasi</u> uniformemente accelerato

EQUAZIONE DI MISURA

Navigazione Inerziale

- Informazioni sullo stato del sistema si ottengono effettuando delle misure **Y**(*t*) correlate alle variabili **X**(*t*) dalla relazione non lineare:

$$\mathbf{Y}(t) = h[\mathbf{X}(t)]$$

- dove **Y**(*t*) è il vettore *misura* di dimensioni $m \times 1$(generalmente $m \neq n$).
- Indicando con $\mathbf{Y}^*(t)$ **le misure che si effettuerebbero nelle condizioni nominali**, si ha:

$$\mathbf{Y}^*(t) = h[\mathbf{X}^*(t)]$$

- Seguendo lo stesso procedimento di linearizzazione usato per l'equazione di stato, si ricava:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}^*(t) + \left(\frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \delta\mathbf{X}$$

- e ponendo:

$$\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$$

Navigazione Inerziale

- si ha:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t)$$

- dove:

$$\mathbf{H}(t) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial \mathbf{X}_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial \mathbf{X}_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial \mathbf{X}_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial \mathbf{X}_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}$$

- è una matrice $m \times n$ detta *matrice di misura*.

- In genere ogni misura è affetta da errori di cui supponiamo note le leggi statistiche; pertanto si ha:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$$

- dove **v**(*t*) è un vettore $m \times 1$ le cui componenti rappresentano gli **errori commessi su ciascuna misura**; si ha:

$$E[\mathbf{v}(t)] = 0$$

$$E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = \delta(t-\tau)\mathbf{R}(t)$$

- Per misure discrete nel tempo si ha:

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$