ERRORI DEL SISTEMA INERZIALE

EQUAZIONE DI STATO DEGLI ERRORI

Navigazione Inerziale

- Lo **stato** di **un sistema di navigazione** è un vettore di componenti: la posizione, la velocità, l'assetto del mobile (ed anche altre variabili nel caso di sistemi aumentati). **L'insieme di tali variabili per un sistema di navigazione inerziale ad un istante generico *t*** viene indicato con il vettore **X**(*t*) ad *n* componenti.

- In generale si può dire che **lo stato del sistema varia nel tempo**; tale variazione può essere espressa da un'equazione differenziale non lineare del tipo:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)]$$

- dove con il vettore **U**(*t*) vengono indicate le perturbazioni del sistema inerziale (qui considerato nella configurazione a piattaforma asservita) che comunemente sono chiamate ***variabili di ingresso o di comando***.

Navigazione Inerziale

- Nel caso di una piattaforma (reale o analitica) riferita alla terna *ENU*, munita anche di **canale verticale**, lo *stato* del sistema inerziale può essere definito per mezzo di **nove componenti** e precisamente:
  - X_1 = latitudine (φ)
  - X_2 = longitudine (λ)
  - X_3 = quota (h);
  - X_4 = velocità per est (V_e);
  - X_5 = velocità per nord (V_n);
  - X_6 = velocità verticale (V_z);
  - X_7 = rotazione della piattaforma intorno all'asse E-W (ψ_E);
  - X_8 = rotazione della piattaforma intorno all'asse N-S (ψ_N);
  - X_9 = rotazione della piattaforma intorno all'asse verticale (ψ_U).

Navigazione Inerziale

- Le equazioni di stato per ciascuna variabile sono date da:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{cases} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \\ \dot{X}_7 \\ \dot{X}_8 \\ \dot{X}_9 \end{cases} = \begin{cases} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_N \\ \dot{V}_U \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_U \end{cases} = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)]$$

$$\dot{\varphi} = \frac{V_n}{R}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_e}{R\cos\varphi}$$

$$\dot{h} = V_z$$

- per le prime tre variabili, avendo considerato la Terra sferica di raggio $R = R_0 + h$.

Navigazione Inerziale

- Le equazioni di stato per dette componenti sono, pertanto, ottenute **dall'equazione fondamentale della navigazione inerziale** riscritte per la Terra sferica:

$$
\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{cases} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \\ \dot{X}_7 \\ \dot{X}_8 \\ \dot{X}_9 \end{cases} = \begin{cases} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_N \\ \dot{V}_U \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_U \end{cases} = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)]
$$

$$
\dot{V}_e = f_e + \left(-\frac{V_e V_z}{R} - 2\sigma V_z \cos\varphi + \frac{V_e V_n}{R} \tan\varphi + 2\sigma V_n \sin\varphi \right) + \varepsilon_{a1}
$$

$$
\dot{V}_n = f_n + \left(-\frac{V_e^2}{R} \tan\varphi - 2\sigma V_e \sin\varphi - \frac{V_n V_z}{R} \right) + \varepsilon_{a2}
$$

$$
\dot{V}_z = f_z + \left(\frac{V_e^2 + V_n^2}{R} + 2\sigma V_e \cos\varphi \right) - g + \varepsilon_{a3}
$$

Navigazione Inerziale

- Le equazioni di stato per le ultime TRE variabili:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{cases} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \\ \dot{X}_7 \\ \dot{X}_8 \\ \dot{X}_9 \end{cases} = \begin{cases} \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{h} \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_N \\ \dot{V}_U \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\psi}_N \\ \dot{\psi}_U \end{cases} = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)]$$

Navigazione Inerziale

- L'assetto della piattaforma è conservato se questa è fatta precessionare con una velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\sigma}$ le cui componenti sono:

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_E = -\dfrac{V_n}{R} \\ \omega_N = \dfrac{V_e}{R} + \sigma \cos\phi \\ \omega_U = \dfrac{V_e}{R}\tan\phi + \sigma \sin\phi \end{bmatrix} \qquad (5)$$

- Poiché le componenti di ***ω*** **sono calcolate in base a valori non esatti**, la piattaforma precessionerà con una velocità angolare ω_C e pertanto si disallineerà con una velocità angolare: $\boldsymbol{\omega_C - \omega}$
- Inoltre, a causa delle inevitabili derive dei giroscopi $\varepsilon_{g1}, \varepsilon_{g2}, \varepsilon_{g3}$, la piattaforma subirà un ulteriore disallineamento. Si ha, pertanto:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_i = (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\varepsilon}_g$$

Navigazione Inerziale

- Poiché, per il teorema di Coriolis:

$$\dot{\psi}_i = \dot{\psi}_p + \omega \times \psi \iff \dot{\psi}_i = (\omega_c - \omega) + \varepsilon_g$$

$$\dot{\psi}_p = (\omega_c - \omega) - (\omega \times \psi) + \varepsilon_g \qquad (6)$$

- **Velocità angolare con la quale la terna di piattaforma si disallinea rispetto a quella di calcolo**.

Ricaviamo gli elementi al secondo membro della relazione (6)

Navigazione Inerziale

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_p = (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\varepsilon}_g \qquad (6)$$

- Dallo sviluppo in serie:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{X}}\right)_c \delta\mathbf{X} \quad \Longrightarrow \quad \omega_c - \omega = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{X}}\right)_c \delta\mathbf{X}$$

- avendo trascurato i termini di ordine superiore;
- Sostituendo nella (6)

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_p = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{X}}\right)_c \delta\mathbf{X} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\varepsilon}_g \qquad (7)$$

Navigazione Inerziale

$$\dot{\psi}_p = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{X}}\right)_c \delta\mathbf{X} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\varepsilon}_g$$

$$\omega_x = -\frac{V_n}{R}$$

$$\omega_y = \frac{V_e}{R} + \sigma \cos\varphi$$

$$\omega_z = \frac{V_e}{R}\tan\varphi + \sigma \sin\varphi$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}$$

CALCOLI

- Pertanto le equazioni di stato relative agli angoli di disallineamento della piattaforma sono date da:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_e &= -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n - \omega_y \psi_z + \omega_z \psi_n + \varepsilon_{g1} \\
\dot{\psi}_n &= \sigma \sin\varphi \delta\varphi + \frac{V_e}{R^2}\delta h - \frac{1}{R}\delta V_e + \omega_x \psi_z - \omega_z \psi_e + \varepsilon_{g2} \\
\dot{\psi}_z &= -\left(\sigma \cos\varphi + \frac{V_e}{R\cos^2\varphi}\right)\delta\varphi + \frac{V_e}{R^2}\tan\varphi \delta h - \frac{1}{R}\tan\varphi \delta V_e - \omega_x \psi_n + \omega_y \psi_e + \varepsilon_{g3}
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DI STATO

Navigazione Inerziale

- È difficile conoscere, istante per istante, le componenti del vettore di stato in quanto affette da errori dei quali **non si conosce l'andamento**;

- è necessario ipotizzare un ***modello matematico*** abbastanza ***semplice***, ma nello stesso tempo **accurato**, che si avvicini il più possibile alle **condizioni reali del sistema**.

- Lo stato conforme a detto modello viene definito ***stato nominale*** e viene indicato con $\underline{X}^*(t)$ mentre con $\underline{U}^*(t)$ viene indicato l'insieme nominale delle variabili di comando.

- L'equazione di stato, conforme al modello ipotizzato, pertanto diventa:

$$\dot{\underline{X}}^*(t) = f\left[\underline{X}^*(t), \underline{U}^*(t)\right] \qquad (9)$$

Navigazione Inerziale

- Sviluppando **la relazione precedente in serie di Taylor** arrestata ai termini di primo ordine e assumendo come condizioni iniziali quelle nominali, si ha:

$$\dot{\underline{X}}(t) = \dot{\underline{X}}^{*}(t) + \left(\frac{\delta f}{\delta \underline{X}}\right)_{X=X^*} \delta \underline{X} + \left(\frac{\delta f}{\delta \underline{X}}\right)_{X=X^*} \delta \underline{U}$$

- dove:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \; ; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}\right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial U_n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial U_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*}$$

- Ponendo:

$$\underline{X}(t) - \underline{X}^{*}(t) = \delta \underline{X} = \underline{x}(t) \qquad \underline{U}(t) - \underline{U}^{*}(t) = \delta \underline{U} = \underline{u}(t)$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta \underline{X}}\right)_{X=X^*} = F(t) \qquad \left(\frac{\delta f}{\delta \underline{U}}\right)_{U=U^*} = B(t)$$

Navigazione Inerziale

- Dallo sviluppo in serie di Taylor si ha:

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) + G(t)\underline{w}(t)$$

- dove:
- **x**(*t*) è un vettore le cui componenti rappresentano le deviazioni rispetto allo stato nominale e, quindi, nel nostro caso, gli **errori del sistema inerziale**;
- **F**(*t*) è **una matrice** che esprime la **dinamica con la quale gli errori si evolvono.** $F(t)x(t)$ **infatti si definisce modello dinamico**;
- **B**(*t*)**u**(*t*), termine che rappresenta un modello deterministico che da informazioni su come le variabili di ingresso influenzano la dinamica del processo, è definito **modello deterministico**.
- $G(t)w(t)$, termine che tiene in considerazione gli errori di modellazione (frutto della linearizzazione o degli errori di misura), definito **modello stocastico**
- Nel prosieguo della trattazione trascuriamo l'influenza delle variabili esterne $u(t)$ sulla dinamica del nostro processo. Pertanto il modello di processo è:

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t)\underline{x}(t) + G(t)\underline{w}(t)$$

Modello di Processo

Navigazione Inerziale

- nell'ipotesi in cui sia un processo stocastico (random process) assimilabili a *rumori bianchi* le cui caratteristiche sono:

$$E[\mathbf{w}(t)] = 0$$

$$E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(t+\tau)] = \delta(t-\tau)\mathbf{Q}(t) \qquad (13)$$

Funzione di Autocorrelazione

- dove $\mathbf{Q}(t)$ è la Densità Spettrale e $\delta(t-\tau)$ la funzione impulsiva di Dirac uguale all'unità per $t = \tau$ e nulla per $t \neq \tau$

- L'equazione di stato

$$\dot{\underline{x}}(t) = F(t)\underline{x}(t) + G(t)\underline{w}(t)$$

diventa in forma esplicita:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\psi \end{pmatrix} + \mathbf{Gu}$$

CALCOLO F_{11} ed F_{12}

Navigazione Inerziale

- Ricaviamo ora le equazioni differenziali rappresentanti la dinamica con cui evolvono le componenti del vettore **x**(t), ovvero le deviazioni rispetto allo stato nominale, per ciascuna variabile.

- Differenziando le : $\dot{\varphi} = \frac{V_n}{R} \qquad \dot{\lambda} = \frac{V_e}{R\cos\varphi} \qquad \dot{h} = V_z$

$$\Downarrow$$

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n$$

$$\delta\dot{\lambda} = \frac{V_e}{R}\sec\varphi\tan\varphi\delta\varphi - \frac{V_e}{R^2\cos\varphi}\delta h + \frac{1}{R\cos\varphi}\delta V_e$$

$$\delta\dot{h} = \delta V_z$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\varphi} &= -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n \\ \delta\dot{\lambda} &= \frac{V_e}{R}\sec\varphi\tan\varphi\delta\varphi - \frac{V_e}{R^2\cos\varphi}\delta h + \frac{1}{R\cos\varphi}\delta V_e \\ \delta\dot{h} &= \delta V_z \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_e / R \\ \rho_z \sec\varphi & 0 & -\rho_n / r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta\dot{\varphi} &= -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n \\ \delta\dot{\lambda} &= \frac{V_e}{R}\sec\varphi\tan\varphi\delta\varphi - \frac{V_e}{R^2\cos\varphi}\delta h + \frac{1}{R\cos\varphi}\delta V_e \\ \delta\dot{h} &= \delta V_z \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{F}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Navigazione Inerziale

- Per **gli errori sulle tre componenti del vettore velocità**, si considera **l'equazione fondamentale della Navigazione Inerziale che riferita alle condizioni nominali** diventa:

$$\dot{\mathbf{V}}^{*} = [\mathbf{T}]\,\mathbf{f} + \mathbf{c}^{*} + \mathbf{g}^{*}$$

- dove **T** è la **matrice che trasforma le componenti del vettore f , misurate dai tre accelerometri posti sulla piattaforma, nelle componenti rispetto alla terna di riferimento (terna *ENU*).**
- La matrice **T**, essendo gli angoli di disallineamento modesti, è uguale a:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\psi_z & \psi_n \\ \psi_z & 1 & -\psi_e \\ -\psi_n & \psi_e & 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO F_{21}

Navigazione Inerziale

- Sapendo che:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{f} + \mathbf{c} + \mathbf{g} \qquad \dot{\mathbf{V}}^* = [\mathbf{T}]\mathbf{f} + \mathbf{c}^* + \mathbf{g}^*$$

- si ha:

$$\delta\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}} - \dot{\mathbf{V}}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{T})\mathbf{f} + \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \delta\mathbf{X} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \delta\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon}_a$$

- Sapendo che:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\psi_z & \psi_n \\ \psi_z & 1 & -\psi_e \\ -\psi_n & \psi_e & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = (\rho + 2\sigma) \times \mathrm{V}$$

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2}$$

Differenziamo le componenti dei vettori **g** ottenendo,

$$\delta g = -2\omega_0^2 \delta h$$

Differenziamo le componenti dei vettori c:

Navigazione Inerziale

$$\delta\dot{V}_e = [2\sigma(V_z \sin\varphi + V_n \cos\varphi) + \frac{V_e V_n}{R}\sec^2\varphi]\delta\varphi + \frac{V_e}{R^2}(V_z - V_n \tan\varphi)\delta h +$$
$$-\frac{1}{R}(V_z - V_n \tan\varphi)\delta V_e + (2\sigma \sin\varphi + \frac{V_e}{R}\tan\varphi)\delta V_n - (\frac{V_e}{R} + 2\sigma\cos\varphi)\delta V_z +$$
$$+\psi_z f_n - \psi_n f_z + \varepsilon_{a1}$$

$$\delta\dot{V}_n = -V_e(2\sigma\cos\varphi + \frac{V_e}{R}\sec^2\varphi)\delta\varphi + \frac{1}{R^2}(V_e^2 \tan\varphi + V_n V_z)\delta h$$

$$-2(\sigma\sin\varphi + \frac{V_e}{R}\tan\varphi)\delta V_e - \frac{V_z}{R}\delta V_n - \frac{V_n}{R}\delta V_z - \psi_z f_e + \psi_e f_z + \varepsilon_{a2} \qquad (16)$$

$$\delta\dot{V}_z = -2\sigma V_e \sin\varphi\delta\varphi - (\frac{V_n^2 + V_e^2}{R^2} + \omega_0^2)\delta h + (2\sigma\cos\varphi + 2\frac{V_e}{R})\delta V_e + 2\frac{V_n}{R}\delta V_n +$$
$$+\psi_{\mathrm{n}} f_e - \psi_e f_n + \varepsilon_{a3}$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}_e = {} & [2\sigma(V_z\sin\varphi + V_n\cos\varphi) + \frac{V_eV_n}{R}\sec^2\varphi]\delta\varphi + \frac{V_e}{R^2}(V_z - V_n\tan\varphi)\delta h + \\ & -\frac{1}{R}(V_z - V_n\tan\varphi)\delta V_e + (2\sigma\sin\varphi + \frac{V_e}{R}\tan\varphi)\delta V_n - (\frac{V_e}{R} + 2\sigma\cos\varphi)\delta V_z + \\ & +\psi_z f_n - \psi_n f_z + \varepsilon_{a1} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \begin{pmatrix} \boxed{2(\sigma_n V_n + \sigma_z V_z) + \rho_n V_n \sec^2\varphi \quad 0 \quad \rho_n K_z + \rho_e\rho_z} \\ -V_e(2\sigma_n + \rho_n\sec^2\varphi) \quad 0 \quad \rho_n\rho_z - \rho_e K_z \\ -2\sigma_z V_e \quad 0 \quad -(\rho_e^2 + \rho_n^2 + \omega_0^2) \end{pmatrix}$$

CALCOLO F_{31} F_{32} F_{33}

Navigazione Inerziale

- Circa gli errori relativi alla rotazione della piattaforma, **lo stato nominale** va riferito a una piattaforma perfettamente livellata e orientata; pertanto:

$$\psi_n^* = \psi_e^* = \psi_z^* = 0$$

- per cui le:

$$\dot{\psi}_e = -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n - \omega_y \psi_z + \omega_z \psi_n + \varepsilon_{g1}$$

$$\dot{\psi}_n = \sigma \sin\phi\,\delta\phi + \frac{V_e}{R^2}\delta h - \frac{1}{R}\delta V_e + +\omega_x \psi_z - \omega_z \psi_e + \varepsilon_{g2}$$

$$\dot{\psi}_z = -(\sigma \cos\phi + \frac{V_e}{R\cos^2\phi})\delta\phi + \frac{V_e}{R^2}\tan\phi\,\delta h - \frac{1}{R}\tan\phi\,\delta V_e - \omega_x \psi_n + \omega_y \psi_e + \varepsilon_{g3}$$

- rappresentano le equazioni differenziali relative agli errori.

Navigazione Inerziale

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix}$$

$$\dot{\psi}_e = -\frac{V_n}{R^2}\delta h + \frac{1}{R}\delta V_n - \omega_y \psi_z + \omega_z \psi_n + \varepsilon_{g1}$$

$$\dot{\psi}_n = \sigma \sin\phi\delta\phi + \frac{V_e}{R^2}\delta h - \frac{1}{R}\delta V_e + +\omega_x \psi_z - \omega_z \psi_e + \varepsilon_{g2}$$

$$\dot{\psi}_z = -(\sigma \cos\phi + \frac{V_e}{R\cos^2\phi})\delta\phi + \frac{V_e}{R^2}\tan\phi\delta h - \frac{1}{R}\tan\phi\delta V_e - \omega_x \psi_n + \omega_y \psi_e + \varepsilon_{g3}$$

$$\mathbf{F}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_e / R \\ \sigma_z & 0 & \rho_n / R \\ -\sigma_n - \rho_z \tan\varphi & 0 & \rho_z / R \end{pmatrix} \boldsymbol{F}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & 0 \\ -\tan\varphi / R & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{33} = -\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$$

IN CONCLUSIONE

Navigazione Inerziale

- Pertanto la:

$$\underline{\dot{x}}(t) = F(t)\underline{x}(t) + G(t)\underline{w}(t)$$

diventa in forma esplicita:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{\mathbf{P}} \\ \delta\dot{\mathbf{V}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{11} & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_{21} & \mathbf{F}_{22} & \mathbf{F}_{23} \\ \mathbf{F}_{31} & \mathbf{F}_{32} & \mathbf{F}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{P} \\ \delta\mathbf{V} \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_a \\ \boldsymbol{\varepsilon}_g \end{pmatrix} \qquad (17)$$

- essendo:

$$\delta\mathbf{P} \equiv (\delta\varphi, \delta\lambda, \delta h)^T; \quad \delta\mathbf{V} \equiv (\delta V_e, \delta V_n, \delta V_z)^T; \quad \delta\boldsymbol{\psi} \equiv (\delta\psi_e, \delta\psi_n, \delta\psi_z)^T$$

- dove, indicando con: $R\cos\varphi = r$ e $V_z / R = K_z$

Navigazione Inerziale

- si ha:

$$\mathbf{F}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_e / R \\ \rho_z \sec\varphi & 0 & -\rho_n / r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{F}_{13} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \begin{pmatrix} 2(\sigma_n V_n + \sigma_z V_z) + \rho_n V_n \sec^2\varphi & 0 & \rho_n K_z + \rho_e \rho_z \\ -V_e(2\sigma_n + \rho_n \sec^2\varphi) & 0 & \rho_n \rho_z - \rho_e K_z \\ -2\sigma_z V_e & 0 & -(\rho_e^2 + \rho_n^2 + \omega_0^2) \end{pmatrix}$$

;

$$\mathbf{F}_{22} = \begin{pmatrix} -(\rho_e \tan\varphi + K_z) & \omega_z + \sigma_z & -(\omega_n + \sigma_n) \\ -2\omega_z & -K_z & \rho_e \\ 2\omega_n & -2\rho_e & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_{23} = \mathbf{A}(\mathbf{f})$$

;

$$\mathbf{F}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho_e / R \\ \sigma_z & 0 & \rho_n / R \\ -\omega_n - \rho_z \tan\varphi & 0 & \rho_z / R \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & 0 \\ -\tan\varphi / R & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_{33} = -\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$$

Per il modello di processo degli errori di un sistema strapdown ci si riferisca al testo:

- MEMS-Based Integrated Navigation. Priyanka Aggarwal, Naser El-Sheimy, Aboelmagd Noureldin, 2010, Artech House Publishers.