

# NAVIGAZIONE INERZIALE

# **SCOMPOSIZIONE IN DUE MOTI CON DIFFERENTI VELOCITA' ANGOLARI**

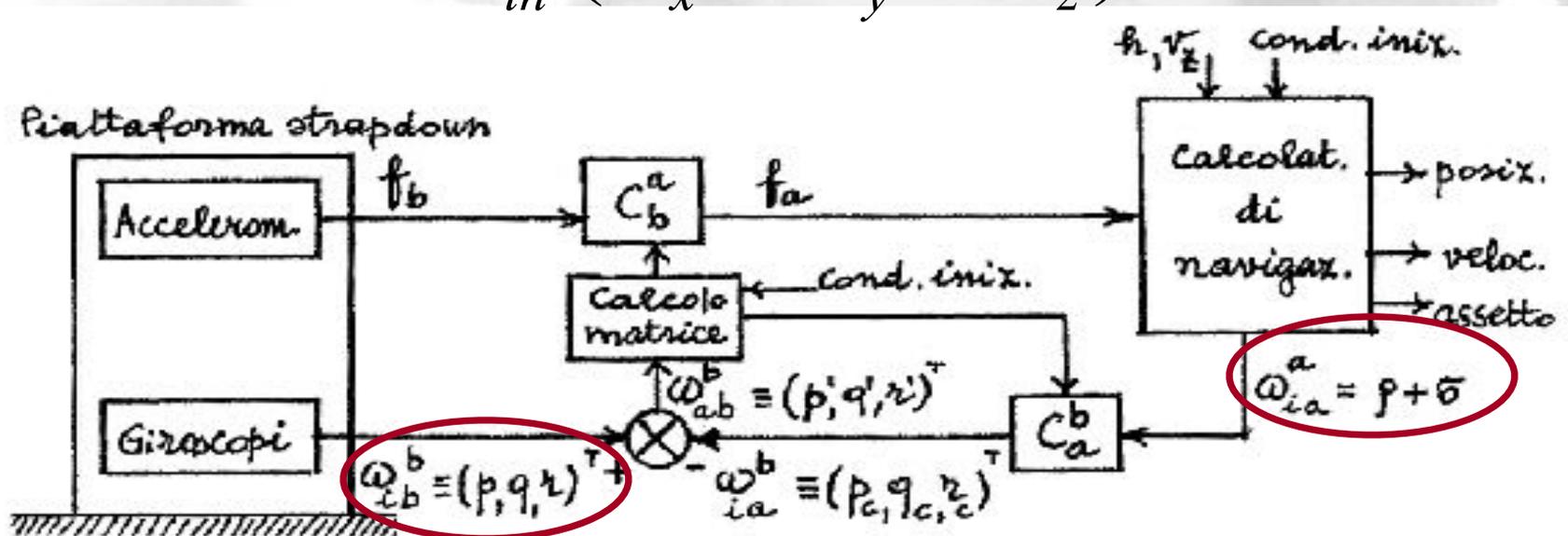
# Navigazione Inerziale

- In realtà è opportuno considerare **separatamente** le componenti del vettore fornite dai **giroscopi** ( $p, q, r$ )

$$\omega_{ib}^b (p, q, r)$$

- e le componenti ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ) **del vettore  $\omega$  fornite dal calcolatore**

$$\omega_{in'}^{n'} (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)$$



# Navigazione Inerziale

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{in'}^b + \boldsymbol{\omega}_{n'b}^b$$

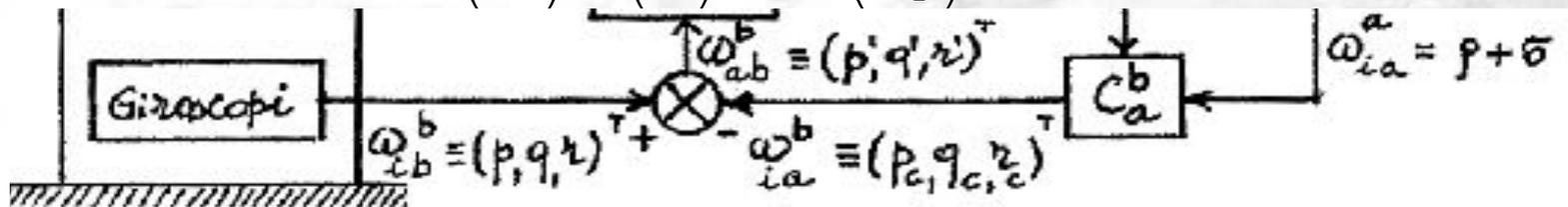


$$\boldsymbol{\omega}_{n'b}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in'}^b$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in'}^b = \mathbf{C}_{n'}^b \boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'} = \mathbf{C}_{n'}^b \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \mathbf{C}_{n'}^b \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$



# Navigazione Inerziale

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \mathbf{C}_{n'}^b \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- ◆ Tale relazione finale, presenta **il vantaggio di poter ripartire i calcoli necessari per l'aggiornamento degli angoli di Eulero in due sezioni**

# Navigazione Inerziale

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} - \mathbf{C}_{n'}^b \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

- ◆ la **prima**, a più elevata frequenza, per tenere conto delle uscite dei giroscopi,
- ◆ la **seconda**, a bassa frequenza, per tenere conto della più modesta velocità angolare

$$\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'} = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\sigma} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

# **CALCOLO DIRETTO DEI COSENI DIRETTORI**

# Navigazione Inerziale

- ♦ La matrice dei coseni direttori che permette il passaggio dalla terna di riferimento ( $\mathbf{a}$ , che nel nostro caso è la terna  $NED$ ) alla terna  $BODY$  ( $\mathbf{b}$ ) può anche essere scritta sotto la forma:

$$\mathbf{C}_a^b = \mathbf{C}_{n'}^b = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \quad (4)$$

- ♦ dove ciascuno dei nove componenti della matrice rappresenta un coseno direttore; per esempio  rappresenta il coseno che l'asse  $i$  della terna  $BODY$  forma con l'asse  $j$  della terna  $NED$ .
- ♦ La dinamica della matrice è nota e data dalla relazione:

$$\dot{\mathbf{C}}_{n'}^b(t) = -\mathbf{A}(\omega_{n'b}^b) \mathbf{C}_{n'}^b(t) \quad (5)$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Effettuando la trasposta del primo e del secondo membro si può anche scrivere:

$$\left[ \dot{\mathbf{C}}_{n'}^b(t) \right]^T = \left[ -\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{n'b}^b) \mathbf{C}_{n'}^b(t) \right]^T \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{C}}_b^{n'}(t) = \mathbf{C}_b^{n'}(t) \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{n'b}^b)$$

- ◆ Dove:  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{n'b}^b)$
- ◆ la matrice antisimmetrica associata alla *velocità angolare con cui la terna legata al velivolo ruota rispetto alla terna di riferimento.*

# Navigazione Inerziale

- ♦ La matrice  $\mathbf{C}_b^{n'}$  può anche essere scritta come il prodotto di due matrici:

$$\mathbf{C}_b^{n'} = \mathbf{C}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i$$

- ♦ La matrice  $\mathbf{C}_b^i$ , che lega la terna BODY con quella ECI, varia con la legge:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)$$

  
 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(p, q, r)^T$

# Navigazione Inerziale

- ♦ La matrice  $\mathbf{C}_{n'}^i$ , che lega la terna *NED* con quella *ECI*, varia con la legge:

$$\dot{\mathbf{C}}_{n'}^i = \mathbf{C}_{n'}^i \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'})$$

- ♦ dove  $\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'}$
- ♦ è la velocità angolare con cui la terna *NED* ruota rispetto a quella inerziale le cui componenti sono ricavate dal calcolatore di navigazione:

$$\boldsymbol{\omega}_2 \equiv (\omega_x = \rho_x + \sigma_x, \omega_y = \rho_y + \sigma_y, \omega_z = \rho_z + \sigma_z)^T$$

- ♦ Effettuano la derivata della :

$$\mathbf{C}_b^{n'} = \mathbf{C}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \Rightarrow \dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_i^{n'} \dot{\mathbf{C}}_b^i + \dot{\mathbf{C}}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i$$

# Navigazione Inerziale

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_i^{n'} \dot{\mathbf{C}}_b^i + \dot{\mathbf{C}}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i$$

- ◆ Tenendo conto che:

$$\dot{\mathbf{C}}_b^i = \mathbf{C}_b^i \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{n'}^i = \mathbf{C}_{n'}^i \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'})$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{n'b}^b) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'}) \mathbf{C}_i^{n'} \mathbf{C}_b^i$$

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'}) \mathbf{C}_b^{n'}$$

# Navigazione Inerziale

$$\dot{\mathbf{C}}_b^{n'} = \mathbf{C}_b^{n'} \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega}_{in'}^{n'}) \mathbf{C}_b^{n'}$$

- ◆ Si ottengono, pertanto, nove equazioni differenziali:

$$\dot{C}_{11} = C_{21}\omega_z - C_{31}\omega_y + C_{12}r - C_{13}q$$

$$\dot{C}_{12} = C_{22}\omega_z - C_{32}\omega_y - C_{11}r + C_{13}p$$

.....

- ◆ che risolte danno:

$$C_{ij} = C_{ij}(0) + \int_0^t \dot{C}_{ij} d\tau$$

- ◆ È possibile risolvere soltanto **le prime sei equazioni differenziali** in quanto i coseni direttori dell'ultima riga della matrice possono essere ricavati imponendo **la condizione di ortogonalità**:

$$C_{31} = C_{12}C_{23} - C_{13}C_{22}$$

$$C_{32} = C_{13}C_{21} - C_{11}C_{23}$$

$$C_{33} = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Per la risoluzione del sistema definito dalle equazioni differenziali:

$$\dot{C}_{11} = C_{21}\omega_z - C_{31}\omega_y + C_{12}r - C_{13}q$$

$$\dot{C}_{12} = C_{22}\omega_z - C_{32}\omega_y - C_{11}r + C_{13}p$$

.....

- ◆ si nota che esso può essere posto sotto la forma:  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t)$
- ◆ dove  $\mathbf{x}$  è un vettore di dimensione  $m$  (nel caso in esame  $m = 9$ ).
- ◆ La soluzione può ricercarsi con **metodi di calcolo numerico per intervalli discreti**  $t_k$  intervallati di una quantità  $h$  (passo di integrazione):

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 0, 1, 2 \dots)$$

- ◆ Indicando con  $\mathbf{x}_k$  il valore di  $\mathbf{x}$  per l'istante  $t_k$ , si ha:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = f(\mathbf{x}_k, t_k)$$

- ◆ Se i valori della variabile variano di poco nell'intervallo  $h$ , si può porre:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h f(\mathbf{x}_k, t_k)$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Un metodo più preciso è quello di Runge-Kutta; l'algoritmo è il seguente:

$$m_1 = f(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$m_2 = f\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}hm_1, t_k + \frac{1}{2}h\right)$$

$$m_3 = f\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}hm_2, t_k + \frac{1}{2}h\right)$$

$$m_4 = f(\mathbf{x}_k + hm_3, t_k + h)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ La matrice dei coseni direttori è quindi generata da nove equazioni differenziali funzioni delle velocità angolari fornite dai tre giroscopi e dal calcolatore di navigazione;
- ◆ in caso di errori di queste ultime la matrice che si ricava non conserverà il requisito dell'ortogonalità rendendosi necessario un idoneo algoritmo che richiede un ulteriore tempo di elaborazione al calcolatore.
- ◆ Gli elementi di ciascuna riga di una matrice dei coseni direttori rappresentano le componenti di un versore diretto lungo ciascuno degli assi di una terna ortogonale:
- ◆ di conseguenza la somma dei quadrati di ciascuna riga deve essere uguale a uno.

# **DIMOSTRAZIONE ORTOGONALITA'**

# Navigazione Inerziale

- ◆ Inoltre, essendo i tre versori tra loro ortogonali, il prodotto scalare di ciascuna coppia deve essere nullo e, di conseguenza, prendendo gli elementi di due righe, la somma dei prodotti dei componenti di ciascun versore deve essere nulla.
- ◆ Nel caso in cui queste due condizioni non si verificano, la matrice **C** non sarà ortogonale e si renderà necessario ricavare una matrice dei coseni direttori ottimale  $\hat{\mathbf{X}}$
- ◆ che risponda al requisito di rendere minima la norma della differenza tra la matrice calcolata **C** e la matrice esatta **X**.
- ◆ Poiché la norma di una matrice **A** è definita dall'espressione:

$$N(\mathbf{A}) = [\sum_i \sum_j (\mathbf{A}_{ij}^2)]^{1/2}$$

- ◆ che rappresenta una distanza euclidea e che si può anche indicare con:

$$N(\mathbf{A}) = [\text{traccia}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})]^{1/2}$$

- ◆ l'espressione da rendere minima è:

$$N(\mathbf{C} - \mathbf{X}) = \left\{ \text{traccia} [(\mathbf{C} - \mathbf{X})^T (\mathbf{C} - \mathbf{X})] \right\}^{1/2}$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Inoltre  $\mathbf{X}$  deve rispondere anche alla condizione di ortogonalità:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} - \mathbf{I} = 0$$

- ◆ Si dimostra che la soluzione ottimale di  $\mathbf{X}$  è data da:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1/2}$$

- ◆ Anziché risolvere tale espressione, si preferisce definire una matrice errore  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{I}$$

- ◆ in modo da poter scrivere:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{C}(\mathbf{I} + \mathbf{E})^{-1/2}$$

- ◆ espressione che può porsi sotto forma di uno sviluppo in serie più agevole per il calcolo:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{E} + \frac{3}{8}\mathbf{E}^2 - \frac{5}{16}\mathbf{E}^3 + \dots\right) \quad (15)$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ La matrice essendo ortogonale, permette di trasferire un vettore da una terna all'altra conservando invariato il modulo.
- ◆ Il procedimento ora mostrato, anche se necessario, è da utilizzare con cautela in quanto esso non è in grado di correggere gli errori.
- ◆ Per esempio, un errore commesso su uno degli elementi della matrice non viene corretto ma si ripartisce in maniera più blanda su ciascuno dei restanti elementi della matrice.
- ◆ La soluzione ora mostrata presenta severe limitazioni nel caso in cui la terna legata all'aeromobile presenta movimenti angolari di elevata frequenza.
- ◆ Per esempio, un moto conico crea grossi problemi man mano che la frequenza di tale moto si approssima alla frequenza del ciclo di calcoli.

# **CONFRONTO CON IL METODO PRECEDENTE**

$$\mathbf{C}_b^{n'} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}$$



$$\phi = \arctan(C_{32}/C_{33})$$

$$\theta = \arctan \left[ -C_{31} / \sqrt{(C_{32}^2 + C_{33}^2)} \right]$$

$$\psi = \arctan(C_{21}/C_{11})$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Anche in questo caso, con l'approssimarsi di  $\theta$  a  $90^\circ$ , si hanno delle singolarità nella risoluzione delle:

$$\phi = \arctan(C_{32}/C_{33})$$

$$\theta = \arctan \left[ -C_{31} / \sqrt{(C_{32}^2 + C_{33}^2)} \right]$$

$$\psi = \arctan(C_{21}/C_{11})$$

- ◆ la singolarità, tuttavia, è temporanea e influenza soltanto il processo di calcolo degli angoli di Eulero e non il calcolo dei coseni direttori.
- ◆ Si rende necessario fare ricorso al seguente algoritmo ausiliario:

$$C_{23} + C_{12} = (\sin\theta - 1) \sin(\psi + \phi)$$

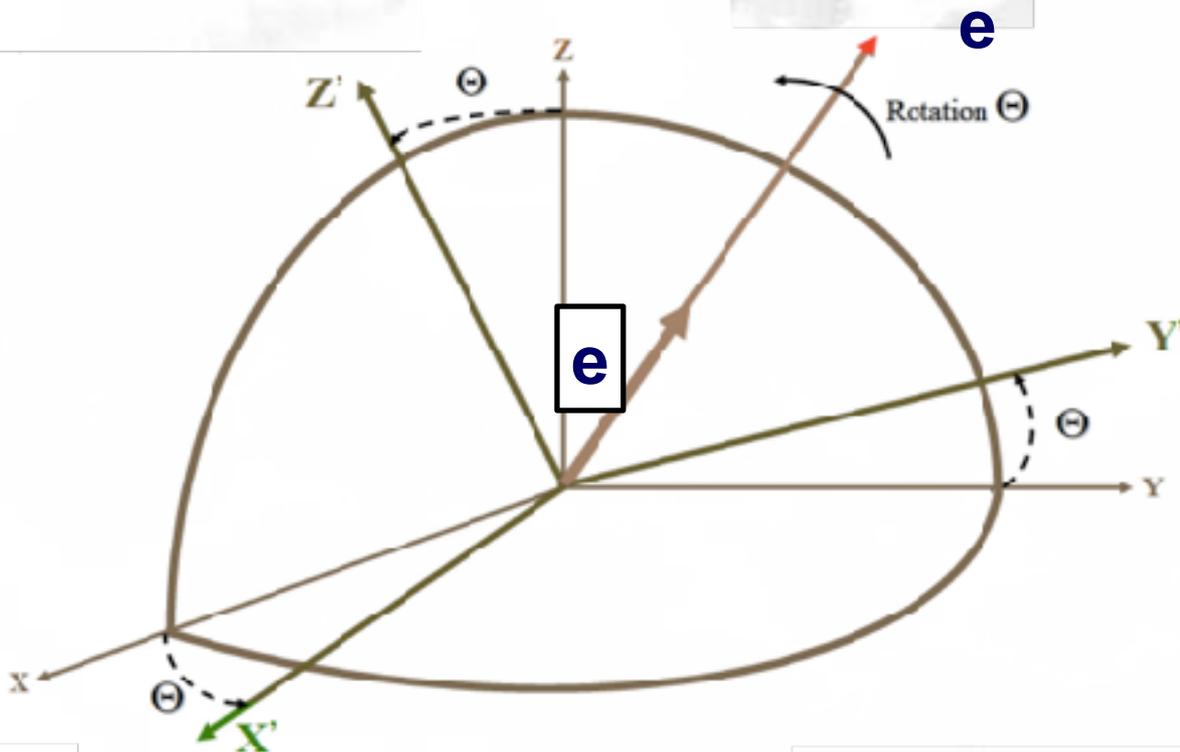
$$C_{13} - C_{22} = (\sin\theta - 1) \cos(\psi + \phi)$$

$$C_{23} - C_{12} = (\sin\theta + 1) \sin(\psi - \phi)$$

$$C_{13} + C_{22} = (\sin\theta + 1) \cos(\psi - \phi)$$

# **AGGIORNAMENTO DELLA MATRICE DEI COSENI DIRETTORI MEDIANTE I QUATERNIONI**

- ◆ Ricordiamo che l'algebra dei quaternioni ci ha aiutato ad effettuare il passaggio tra due sistemi di riferimento mediante **un'unica rotazione  $\theta$**  intorno ad un asse istantaneo di rotazione  **$e$**



- ◆ Le componenti di un **quaternione di norma unitaria** sono in relazione con una rotazione istantanea, infatti:

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ e_1 \sin(\theta/2) \\ e_2 \sin(\theta/2) \\ e_3 \sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$\theta$



Angolo di rotazione

$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$



Coseni direttori dell'asse istantaneo di rotazione

◆ L'utilizzo del quaternione  $Q$  per l'aggiornamento della matrice  $C_b^n$  ha il vantaggio:

1. Per aggiornare il quaternione (e per il suo tramite la matrice  $C_b^n$ ) bisogna risolvere solo **4 equazioni differenziali**;
2. Non ci sono problemi di **Gimbal lock analitici** (singolarità analitiche nella soluzione);
3. Minore complessità computazionale

- ◆ Aggiorniamo il quaternionione  $Q$  che ci permette il passaggio dalla **sistema b** al **sistema n'**

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} A(\omega_{bn'}^b) Q$$

**4x1            4x4   4x1**

- ◆ Dove nel caso dei quaternioni, l'antisimmetrica è una 4x4

$$A\left(\omega_{bn'}^b\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

- ◆ Per le ragioni già ampiamente discusse, si procede alla scomposizione della velocità angolare con cui la **terna body** ruota intorno alla **terna NED**, nel modo seguente

$$\omega_{bn'}^b = \omega_{bi}^b - C_{n'}^b \omega_{bn'}^{n'}$$



Gyros



Calcolatore di Navigazione

- ◆ Per risolvere le 4 equazioni differenziali che esprimono la variazione temporale degli elementi del quaternione possiamo utilizzare il **metodo di Eulero** (caso di  $\Delta t$  infinitesimi) e cioè:

$$Q_{k+1} = Q_k + \left( \frac{1}{2} A(\omega_{bn'}^b(t_k)) Q_k \right) \Delta t$$

Aggiornato il quaternione  $Q$  si passerà ad aggiornare la matrice  $C_b^n$

$$C_b^{n'} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_1 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_3 q_1 + q_0 q_2) & 2(q_3 q_2 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

- ◆ Sappiamo che  $Q$  dovrebbe soddisfare le seguenti proprietà:

$$N^2(Q) = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad N^2(Q) = QQ^* = 1$$

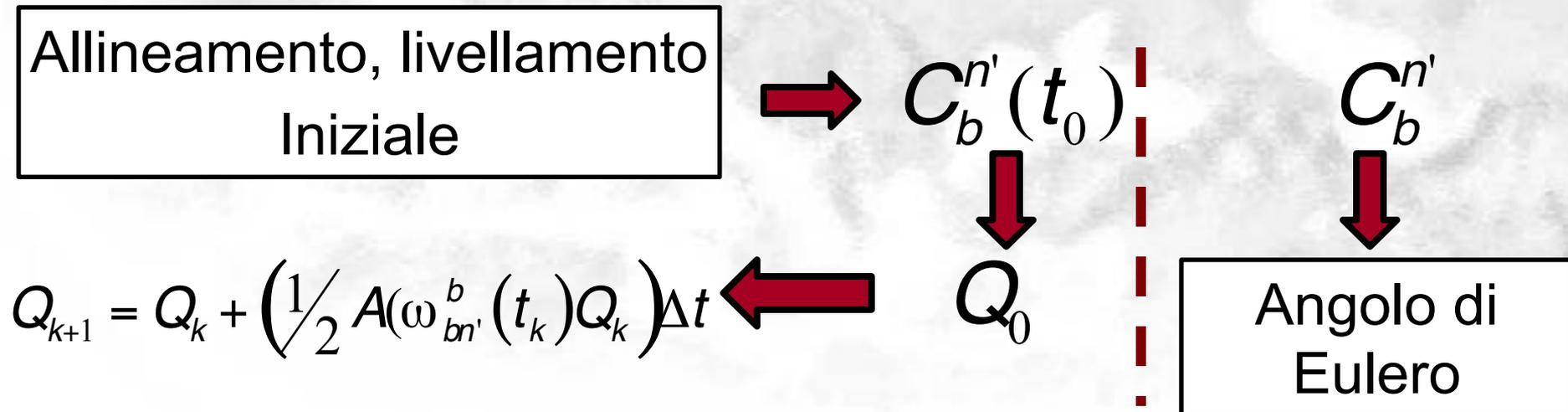
- ◆ Per probabili errori computazionali il quaternione che utilizziamo deve **essere normalizzato, infatti posto:**

$$\Delta = 1 - (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

- ◆ La normalizzazione sarà:

$$\hat{Q} = \frac{Q}{\sqrt{QQ^*}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \Delta}} = Q \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)$$

- ◆ Come per gli altri metodi anche l'integrazione delle componenti della derivata del quaternionione ha bisogno della conoscenza del **quaternionione iniziale  $Q_0$**
- ◆ Questo può essere calcolato a partire dalla matrice iniziale  $C_b^{n'}(t_0)$  calcolata mediante il processo di allineamento e livellamento (analitico) iniziale.
- ◆ Pertanto l'algoritmo è il seguente



- ◆ Ricordiamo che il passaggio da  $C_b^{n'}$  a  $Q$ , è assicurato:

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \\ (1/4)(C_{23} - C_{32})/q_0 \\ (1/4)(C_{31} - C_{13})/q_0 \\ (1/4)(C_{12} - C_{21})/q_0 \end{bmatrix}$$



$$C_b^{n'} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_2 q_1 - q_0 q_3) & \alpha_0^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_3 q_1 + q_0 q_2) & 2(q_3 q_2 - q_0 q_1) & \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

# Navigazione Inerziale

## ALLINEAMENTO INIZIALE

- ◆ Come per i sistemi a piattaforma asservita era necessario procedere a un'operazione **di allineamento iniziale** della piattaforma attraverso operazioni di **livellamento** e di **orientamento in azimuth**, anche per i sistemi *strapdown* è richiesta un'operazione simile.

# Navigazione Inerziale

- ◆ Lo scopo è di ricavare, a seconda di quale dei metodi visti in precedenza il calcolo della matrice dei coseni direttori viene applicato, i seguenti parametri:
- ◆ gli **angoli di Eulero** nell'istante iniziale per l'integrazione della:

$$\dot{\psi} = \sec\theta (q' \sin\phi + r' \cos\phi)$$

$$\dot{\theta} = q' \cos\phi - r' \sin\phi$$

$$\dot{\phi} = p' + \tan\theta (q' \sin\phi + r' \cos\phi)$$

- ◆ i **coseni direttori**  $C_{ij}(0)$  per il calcolo della ;

$$C_{ij} = C_{ij}(0) + \int_0^t \dot{C}_{ij} d\tau$$

- ◆ il Quaternione iniziale  $Q_0$  utile per il calcolo;

$$Q(t) = Q_0 + \dot{Q}\Delta t$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Il procedimento è analogo a quello già descritto per i sistemi a piattaforma;
- ◆ sono, pertanto, utilizzate le uscite degli stessi sensori inerziali: gli **accelerometri** e i **giroscopi**.
- ◆ Tali sensori, nel **caso di aereo fermo**, misurano le componenti del vettore **f** (uguale a **g** in quanto l'unica accelerazione presente è quella di gravità) e le componenti della velocità angolare terrestre **σ** indicate rispettivamente con:

$$\underline{f}_b = [g_x, g_y, g_z]^T$$

$$\underline{\sigma}_b = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]^T$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ Tali componenti sono legate agli stessi vettori riferiti alla terna *NED*:

$$\underline{f}_{-n'} = [0, 0, -g]^T \quad \underline{\sigma}_{-n'} = [\sigma \cos \varphi, 0, -\sigma \sin \varphi]^T$$

attraverso le equazioni:

$$\underline{f}_{-b} = C_{n'-b}^b \underline{f}_{-n'} \quad (21)$$

$$\underline{\sigma}_{-b} = C_{n'-b}^b \underline{\sigma}_{-n'} \quad (22)$$

NB. In NED un accelerometro con asse verticale misurerebbe:

$$\underline{f} = a_s - G \cong a_s - g \cong -g \text{ se fermo in quanto } a_s = 0$$

# Navigazione Inerziale

- ◆ La (21) può essere esplicitata nella seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

dalla quale si ricavano:

$$C_{13} = -g_x/g \quad C_{23} = -g_y/g \quad C_{33} = -g_z/g$$

- ◆ i coseni che gli assi della terna *BODY* legata all'aeromobile formano con la direzione della verticale. (*livellamento*)

# Navigazione Inerziale

- ◆ In modo analogo la (22) si esplicita nella:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \cos \varphi \\ 0 \\ -\sigma \sin \varphi \end{pmatrix}$$

da cui si ricavano:

$$C_{11} = \sigma_x / (\sigma \cos \varphi) - g_x / g \tan \varphi$$

$$C_{21} = \sigma_y / (\sigma \cos \varphi) - g_y / g \tan \varphi$$

$$C_{31} = \sigma_z / (\sigma \cos \varphi) - g_z / g \tan \varphi$$

- ◆ coseni che gli assi della terna *BODY* legata all'aeromobile formano con la direzione del meridiano (*Orientamento in Azimut*)

# Navigazione Inerziale

- ◆ I restanti coseni direttori si ricavano attraverso le relazioni algebriche:

$$C_{12} = C_{23}C_{31} - C_{21}C_{33}$$

$$C_{22} = C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}$$

$$C_{32} = C_{13}C_{21} - C_{11}C_{23}$$

- ◆ Noti i coseni direttori è possibile ricavare gli angoli di Eulero attraverso le relazioni

$$\phi = \arctan(C_{32}/C_{33})$$

$$\theta = \arctan \left[ -C_{31} / \sqrt{(C_{32}^2 + C_{33}^2)} \right]$$

$$\psi = \arctan(C_{21}/C_{11})$$