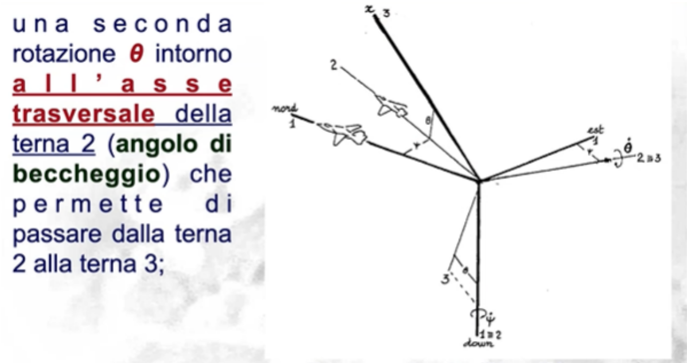
Aggiornamento della Matrice dei Coseni Direttori (MCD) con gli angoli di Eulero

Gli angoli di Eulero esprimono l'assetto del mobile rispetto alla terna NED.

Supponiamo che inizialmente la terna di misura (body) coincida con la terna NED (**posizione canonica dell'aeromobile**)

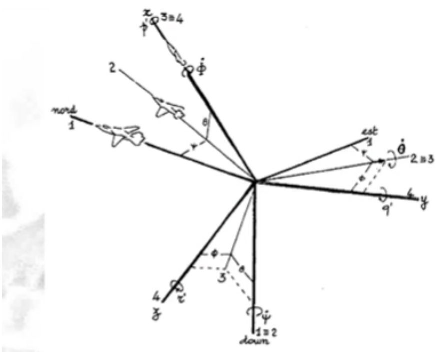
Applicando un moto di imbardata con velocità angolare $\dot{\psi}$, si porterà l'asse longitudinale a passare dalla direzione Nord ad una direzione qualsiasi del piano orizzontale, ruotata di un angolo ψ così come l'asse y.

Applicando, da questa nuovo assetto, un moto di beccheggio con velocità angolare $\dot{\theta}$ l'aeromobile abbandonerà la posizione orizzontale in quando l'asse longitudinale passerà dalla posizione orizzontale ad una posizione diversa e ruotata di una angolo θ. Allo stesso modo, anche l'asse z abbandonerà la posizione verticale, ruotando di un angolo θ.



Passaggio da (2) a (3)
Beccheggio θ con vecolià angolare dθ /dt

Da questo terzo assetto applichiamo un moto di rollio con velocità angolare $\dot{\phi}$ che faranno ruotare di un angolo ϕ gli assi y e z rispetto alle posizioni precedenti. Quest'ultimo assetto coincide con la terna body.



Passaggio da (3) a (4 = Body)
Rollio Φ con vecolià angolare dΦ /dt

Tale terna body è stata raggiunta con tre rotazioni successive applicate ad assi di terne intermedie. La velocità angolare con cui si esprime questo passaggio è:

$$\underline{\omega}_{ab}^{b}(p', q', r')$$

Tale vettore è riferito alla terna body, per cui le componenti rappresentano le velocità angolari attorno ai tre assi della terna body stessa.

Mediante gli angoli di Eulero (ψ, θ, ϕ) , o meglio i relativi moti, è possibile determinare le componenti di tale velocità angolare.

Essendo la terna (4) coincidente con la terna body, allora la velocità angolare $p' = \dot{\phi}$. Pertanto per ottenere la prima componente del vettore $\underline{\omega}_{ab}^{b}$ basterà moltiplicare la matrice di identità per $\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

q’ rappresenta la velocità angolare attorno all’asse y della terna body e si ottiene ruotando $\dot{\theta}$ dell’angolo ϕ attorno all’asse x. Allora, per ottenere la seconda componente del vettore $\underline{\omega}_{ab}^{b} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$ basterà moltiplicare $R_x(\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$.

r’ rappresenta la velocità angolare attorno all’asse z della terna body e si ottiene ruotando $\dot{\psi}$ dell’angolo θ attorno a y e dell’angolo ϕ attorno a x. Allora, per ottenere la terza componente del vettore $\underline{\omega}_{ab}^{b} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$ basterà moltiplicare: $R_x(\phi)R_y(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

Dunque:

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_x(\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_x(\phi)R_y(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Più sinteticamente:

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

La matrice A consente il passaggio dai moti di Eulero a (p', q', r').

Esprimiamo le matrici in forma estesa:

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sin\phi \\ 0 & -sin\phi & cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sin\phi \\ 0 & -sin\phi & cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}cos\phi \\ -\dot{\theta}sin\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ sin\phi sin\theta & cos\phi & sin\phi cos\theta \\ cos\phi sin\theta & -sin\phi & cos\phi cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}cos\phi \\ -\dot{\theta}sin\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}sin\theta \\ \dot{\psi}sin\phi cos\theta \\ \dot{\psi}cos\phi cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi}sin\theta \\ \dot{\theta}cos\phi + \dot{\psi}sin\phi cos\theta \\ -\dot{\theta}sin\phi + \dot{\psi}cos\phi cos\theta \end{bmatrix}$$

Poiché l’obiettivo è determinare la matrice A, scriviamo tutti gli elementi in ordine per capire com’è composta:

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}sin\theta + 0\dot{\theta} + 1\dot{\phi} \\ \dot{\psi}sin\phi cos\theta + \dot{\theta}cos\phi + 0\dot{\phi} \\ \dot{\psi}cos\phi cos\theta - \dot{\theta}sin\phi + 0\dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 & 1 \\ sin\phi cos\theta & cos\phi & 0 \\ cos\phi cos\theta & -sin\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -sin\theta & 0 & 1 \\ sin\phi cos\theta & cos\phi & 0 \\ cos\phi cos\theta & -sin\phi & 0 \end{bmatrix}$$

Volendo calcolare le componenti delle velocità angolari:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix}$$

Si dimostra che:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & sin\phi sec\theta & cos\phi sec\theta \\ 0 & cos\phi & -sin\phi \\ 1 & sin\phi tg\theta & cos\phi tg\theta \end{bmatrix}$$

Infine:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & sin\phi sec\theta & cos\phi sec\theta \\ 0 & cos\phi & -sin\phi \\ 1 & sin\phi tg\theta & cos\phi tg\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix} \quad (**)$$

Dunque, per aggiornare la MCD mediante gli angoli di Eulero supponiamo di conoscere all'istante $t = t_0$ l'assetto iniziale del mobile esprimibile con il vettore: $\begin{bmatrix} \psi_0 \\ \theta_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix}$ e la velocità angolare iniziale: $\underline{\omega}_{ab}^{b} = \begin{bmatrix} p_0' \\ q_0{}' \\ r_0{}' \end{bmatrix}$.

Dall'equazione (**) è possibile calcolare $\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$ integrando numericamente i quali otteniamo:

$$\begin{cases} \psi(t) = \psi_0 + \dot{\psi}\Delta t \\ \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}\Delta t \\ \phi(t) = \phi_0 + \dot{\phi}\Delta t \end{cases}$$

e cioè gli angoli di Eulero aggiornati, cioè all'epoca successiva.

Dagli angoli di Eulero aggiornati possiamo calcolare la MCD aggiornata mediante la:

$$\mathbf{C}_{n'}^{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \cos\theta \sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi & \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi & \sin\phi \cos\theta \\ \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi & \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix}$$