SISTEMI STRAPDOWN

Navigazione Inerziale

- Nei sistemi a piattaforma asservita i sensori (giroscopi e accelerometri) sono isolati dal moto angolare dell'aeromobile

- Essi sono posti su una piattaforma stabilizzata i cui assi vengono resi coincidenti con quelli di una terna di riferimento (corrispondente alla terna *ENU* nella meccanizzazione a coordinate geografiche, alla terna *wander* in quella a deriva variabile).

Navigazione Inerziale

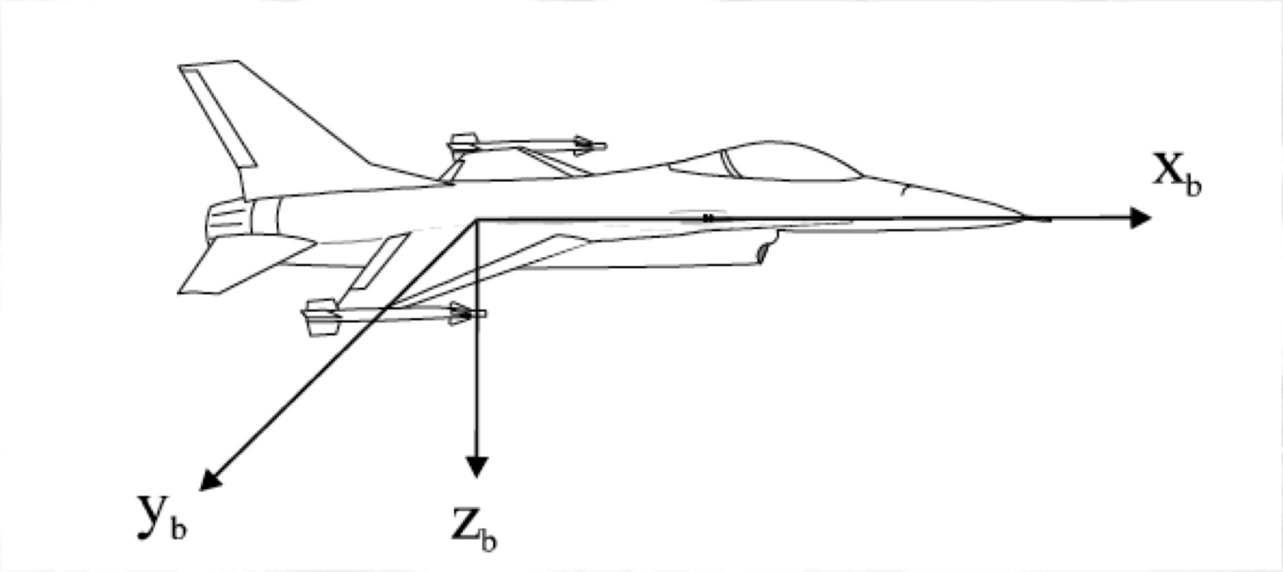
- Tale configurazione, che fino al **1980** è stata quella più diffusa nei sistemi inerziali per la navigazione aerea ha lo **svantaggio** di:

- Essere ***meccanicamente complessa***, (Per mantenere l'assetto prestabilito è necessario ricorrere ad una piattaforma con servomotori, sospensioni, *pickoffs*, motorini ecc.)

- di essere di **peso e ingombro elevati**,
- di difficile **manutenzione** e abbastanza **costosa**

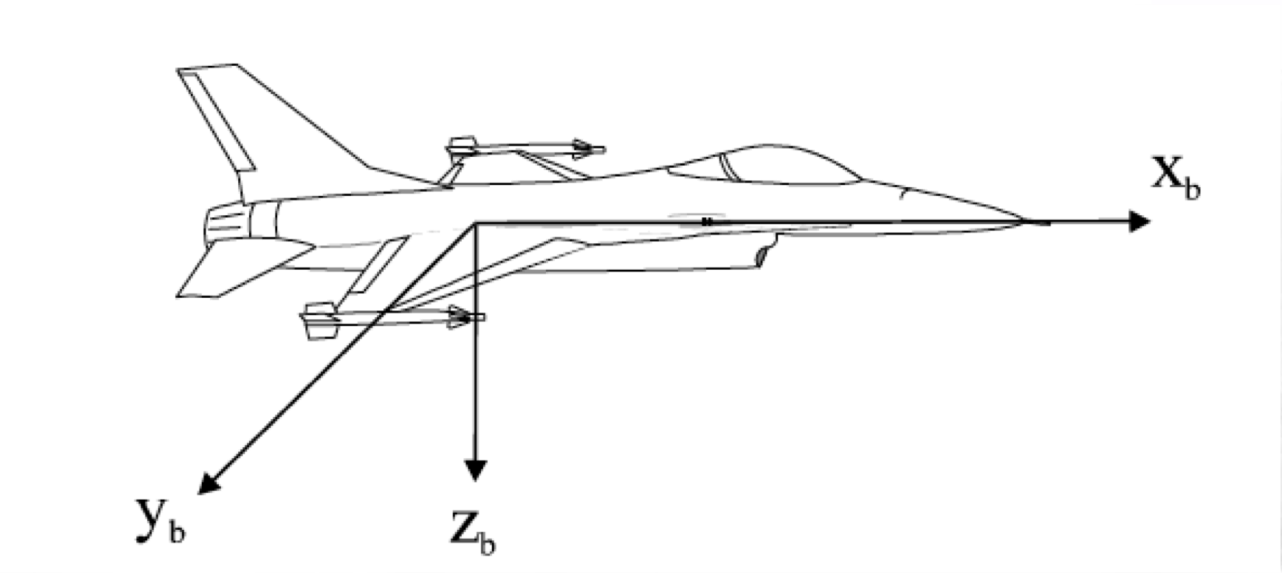
Navigazione Inerziale

- Nei sistemi ***strapdown*** i sensori **sono invece vincolati direttamente alla struttura dell'aeromobile**
- I relativi assi, che definiscono la **TERNA DI MISURA**, per semplicità sono fatti coincidere con gli assi dello stesso aeromobile (***TERNA BODY***).



TERNA DI MISURA = TERNA BODY

Navigazione Inerziale



Di conseguenza gli accelerometri misurano le componenti del vettore accelerazione $\mathbf{f}_b$ rispetto ad una terna solidale all'aeromobile e forniscono, **direttamente le accelerazioni alle quali è sottoposto l'aeromobile**.

Navigazione Inerziale

- In modo analogo i giroscopi forniscono le componenti:
- *(p, q, r)*, riferite alla terna *b*, della velocità angolare con cui la **terna *b*** ruota rispetto alla **terna *i*** :

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \quad (p, q, r)$$

- A differenza dei giroscopi utilizzati nei sistemi a piattaforma, **essi non sono sottoposti ad alcuna coppia di precessione**.

Navigazione Inerziale

- Le uscite degli accelerometri (solidali alla terna *b*) *devono* essere prima trasformate in componenti lungo gli assi di una terna di calcolo (dipendente come per i sistemi a piattaforma inerziali da **tipo di navigazione**) che in questa trattazione sarà indicata con **terna a**

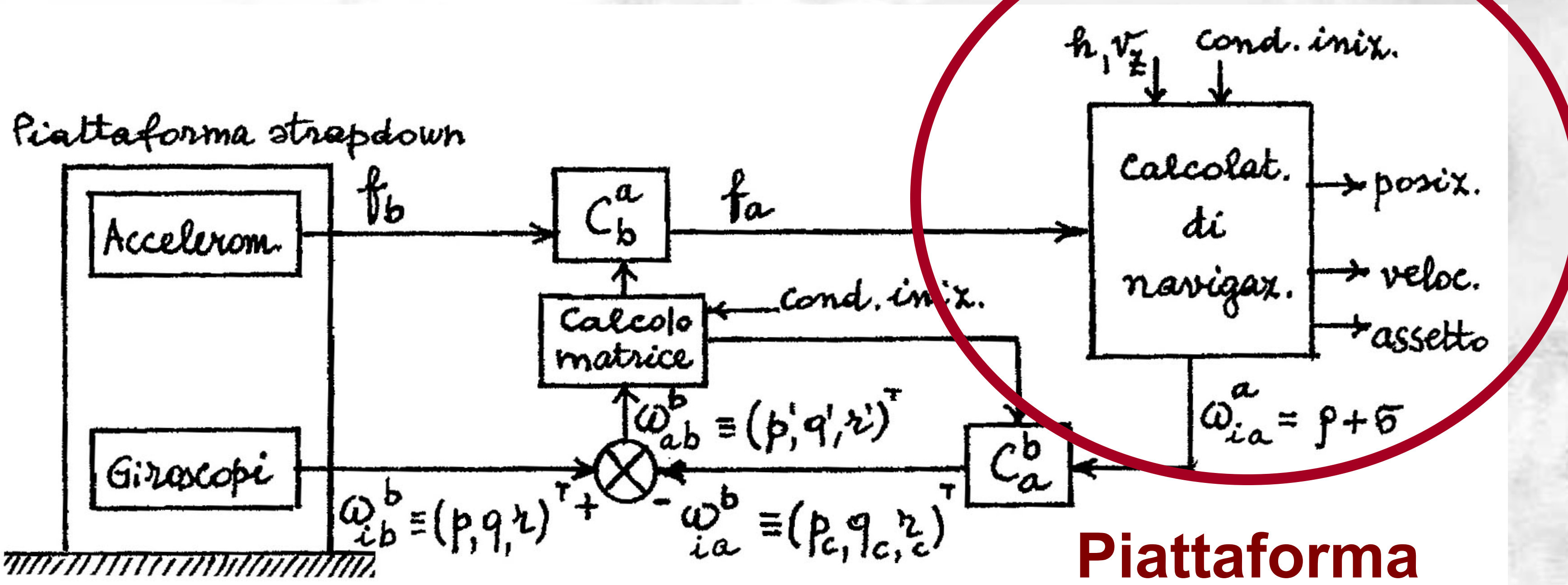
TERNA DI MISURA ≠ TERNA DI CALCOLO

(b) ≠ (a)

Navigazione Inerziale

- A tal fine *le uscite dei* ***giroscopi*** *vengono utilizzate dal calcolatore per ricavare, istante per istante,* ***l'orientamento degli assi della terna b rispetto a quella di riferimento a*** *attraverso una matrice dei coseni direttori* .
- Il **calcolatore** viene così ad assumere le funzioni proprie della piattaforma e per tale motivo i sistemi *strapdown* sono anche noti come sistemi a ***piattaforma analitica***.

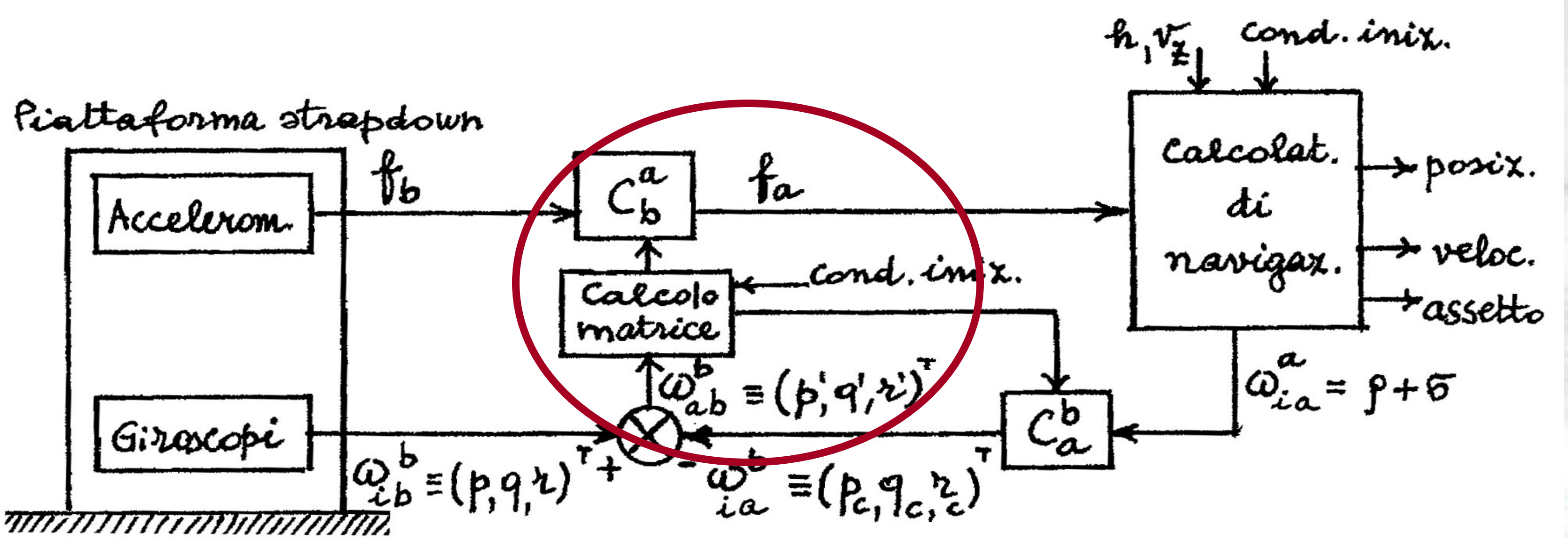
- Una volta ricavate le componenti dell'accelerazione $\mathbf{f}_a$ lungo gli assi della terna di calcolo (a), *i successivi calcoli sono identici a quelli già visti per i sistemi a piattaforma*.



Piattaforma Analitica

- Il ***cuore*** del metodo di processamento delle misure dei sistemi Strapdown è il calcolo ed aggiornamento matrice dei coseni direttori C_b^a.
- La detta matrice è *funzione della velocità angolare con cui la terna body si muove rispetto alla terna di calcolo*

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b}(p', q', r')$$



$$\omega_{ia}^{b}\begin{pmatrix} p_c & q_c & r_c \end{pmatrix}$$

Uscita PC
<u>Riferita alla terna di calcolo</u>

a≡ENU

i

b

$$\omega_{ab}^{b}\begin{pmatrix} p' & q' & r' \end{pmatrix}$$

Velocità Angolare
C_a^b update

$$\omega_{ib}^{b}\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}$$

Misure Gyro

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} = \boldsymbol{\omega}_{ia}^{b} + \boldsymbol{\omega}_{ab}^{b}$$

Passaggio da una terna intermedia

$$\boldsymbol{\omega}_{ab}^{b}(p',q',r')$$

$$\boxed{\omega_{ab}^{b} = \omega_{ib}^{b} - \omega_{ia}^{b}}$$

Si calcola sottraendo:

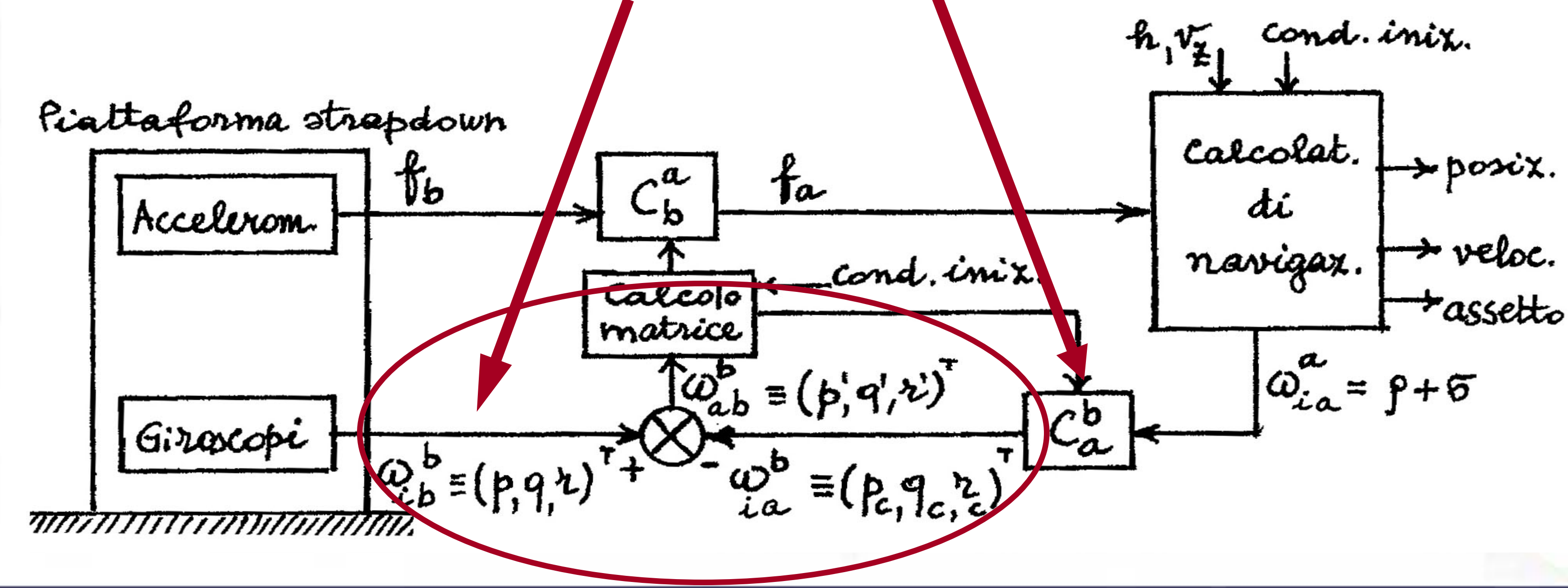
1. Misure IMU:

$$\omega_{ib}^{b} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^{T}$$

2. Dati Processati:

$$\omega_{ia}^{b} = C_{a}^{b}\omega_{ia}^{a} = C_{a}^{b}\begin{bmatrix} \sigma_{N}+\rho_{N} & \sigma_{E}+\rho_{E} & \sigma_{D}+\rho_{D} \end{bmatrix}^{T}$$

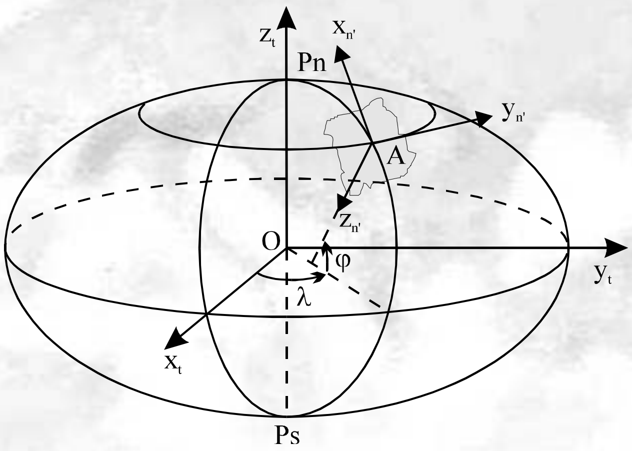
$$\omega_{ab}^{b} = \omega_{ib}^{b} - \omega_{ia}^{b}$$



MATRICE DEI COSENI DIRETTORI
CON GLI *ANGOLI DI EULERO*

Navigazione Inerziale

L’orientamento della terna di misura, solidale all’aeromobile, rispetto a quella di calcolo (che facciamo ora coincidere con la terna NED) *è definito dalla conoscenza dei tre angoli di Eulero (ROLLIO – BECCHEGGIO – PRORA)*.

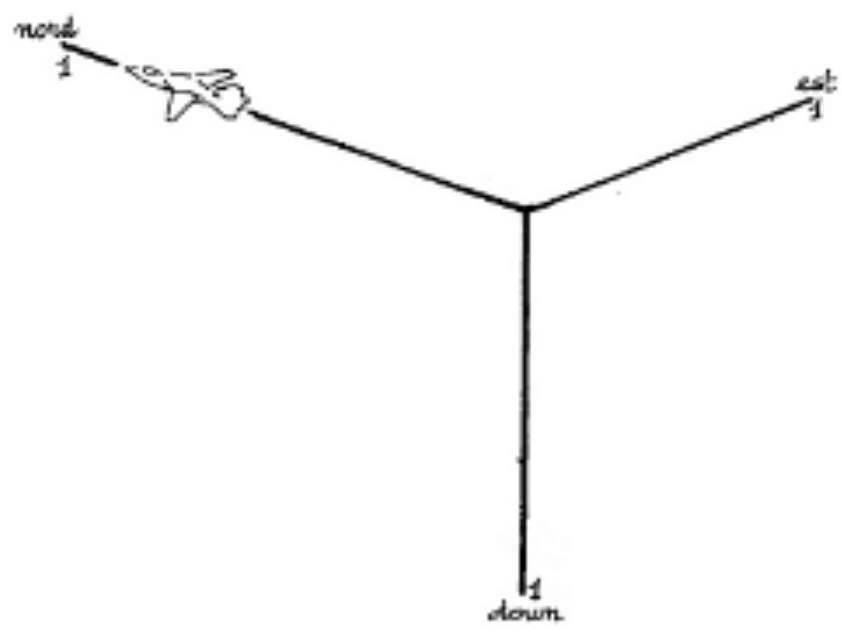


NED

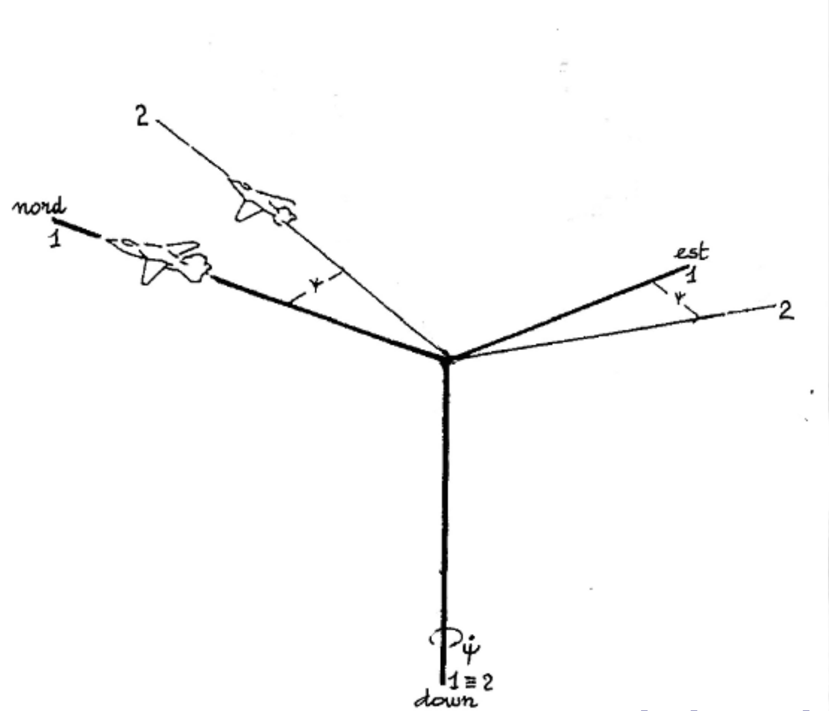
Navigazione Inerziale

Gli angoli di Eulero si definiscono a partire dalla *posizione canonica* dell'aeromobile, e cioè:

- asse longitudinale diretto per Nord
- piano alare orizzontale (**in tal modo la terna *BODY* coincide con la terna *NED***).



- Per passare da una tale posizione ad un assetto qualsiasi, si immagina che l'aeromobile sia sottoposto, in successione, a **Tre rotazioni**
- una **prima rotazione *Ψ*** intorno alla **verticale** (**angolo di prora**)

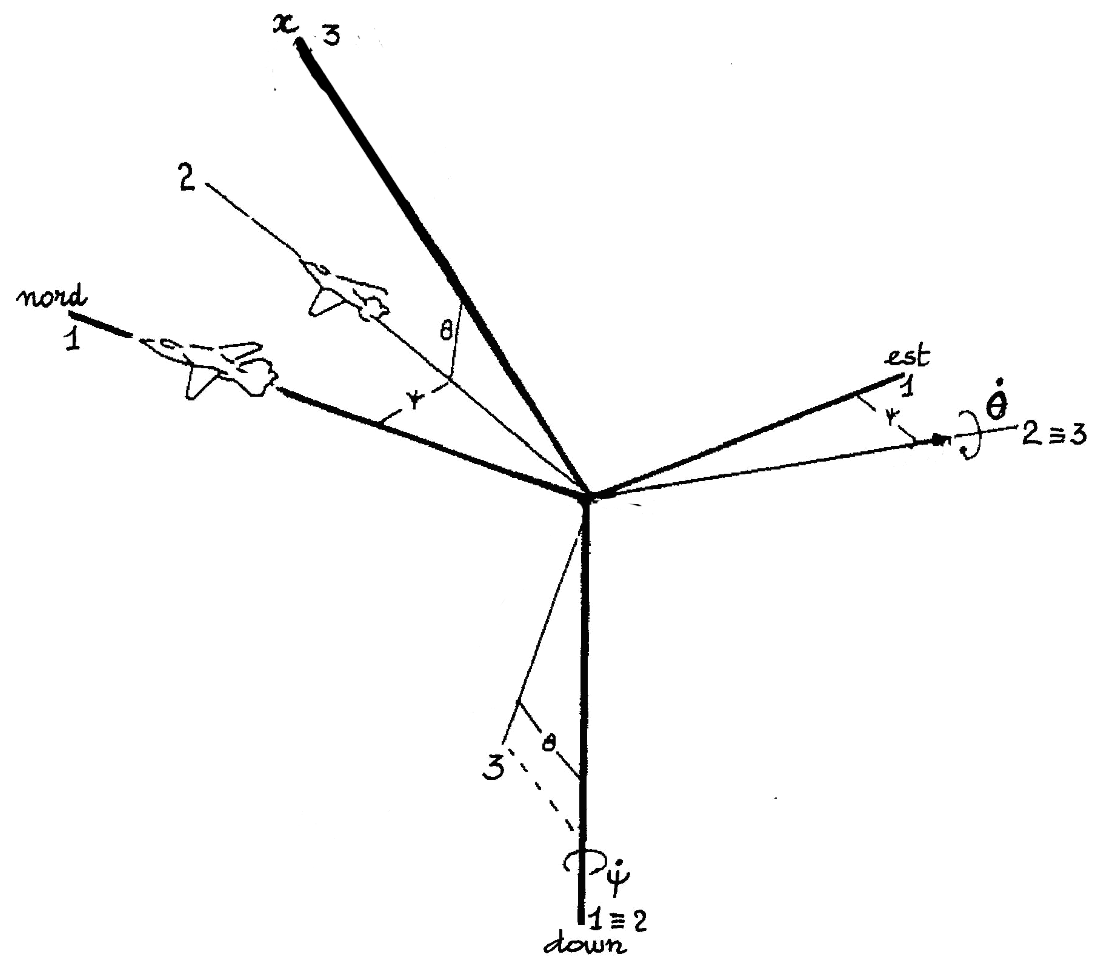


Passaggio da NED (1) a (2)

Varazione di Rotta ψ con vecolià angolare dψ /dt

Navigazione Inerziale

una seconda rotazione ***θ*** intorno **all'asse trasversale** della terna 2 (**angolo di beccheggio**) che permette di passare dalla terna 2 alla terna 3;

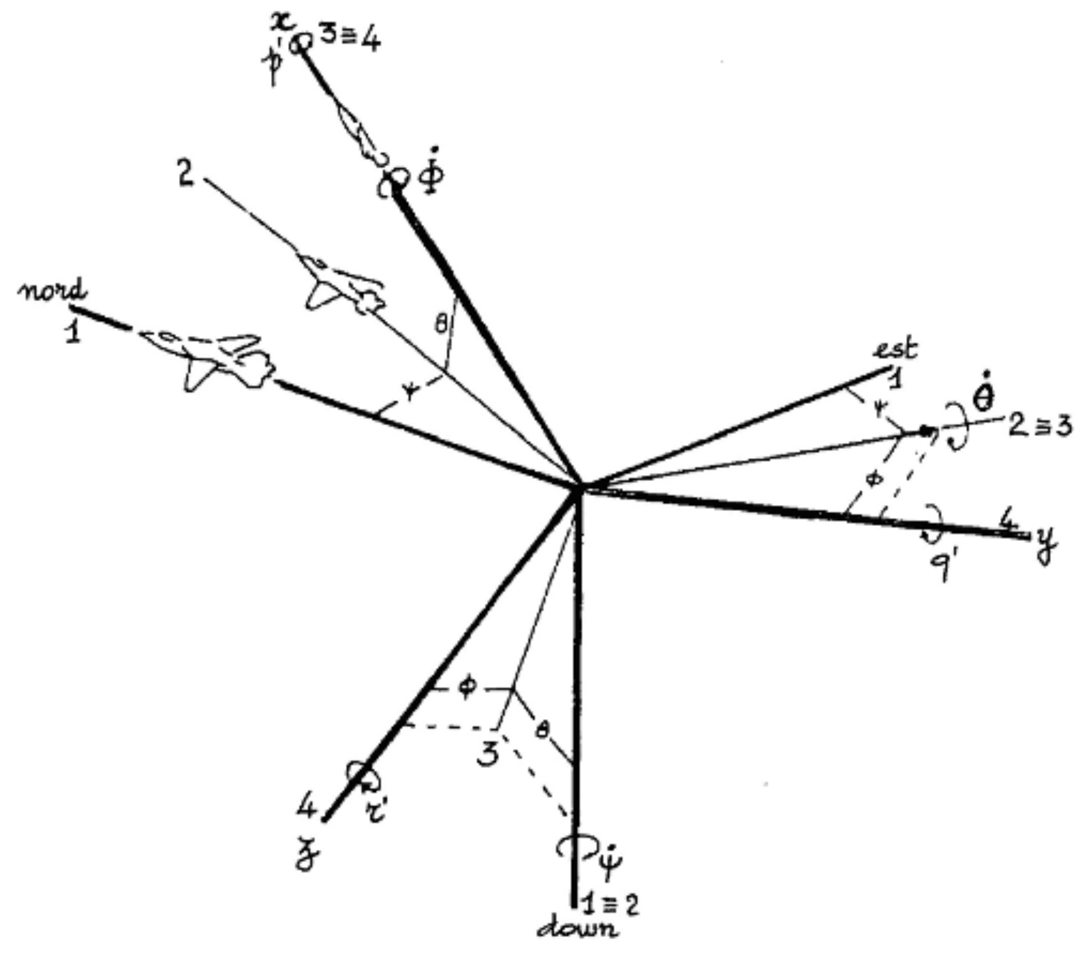


Passaggio da (2) a (3)
Beccheggio θ con vecolià angolare dθ /dt

Navigazione Inerziale

una ***terza rotazione*** intorno all’asse ***longitudinale*** della terna 3 (angolo di rollio)

che permette di passare dalla terna 3 alla terna 4 (o *BODY*).



Passaggio da (3) a (4 = Body)
Rollio *Φ* con vecolià angolare d*Φ* /dt

Navigazione Inerziale

- Ognuna di queste rotazioni è individuata da una matrice ortogonale e pertanto la matrice

$$C_a^b \equiv C_{n'}^b$$

$$\mathbf{C}_{n'}^b = \mathbf{R}_x(\phi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_z(\psi)$$

LAVAGNA

$$\mathbf{C}_{n'}^b = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Navigazione Inerziale

- La matrice inversa

$$C_b^{n'}$$

- (che è <u>uguale alla trasposta</u>) trasforma un qualsivoglia vettore riferito alla terna *BODY* in un vettore equivalente riferito alla terna di calcolo.

- *Come aggiornarla in funzione degli angoli di Eulero??*

AGGIORNAMENTO DELLA MATRICE DEI COSENI DIRETTORI CON GLI ANGOLI DI EULERO

Navigazione Inerziale

- Vogliamo calcolare **le velocità angolari** con cui la terna ***BODY (b)*** ruota rispetto alla terna ***NED (a=n')***

$$\omega^{b}_{n'b}(p',q',r')$$

- Partendo dalle **velocità di variazione** degli angoli di Eulero

$$(\dot{\phi},\dot{\theta},\dot{\psi})$$

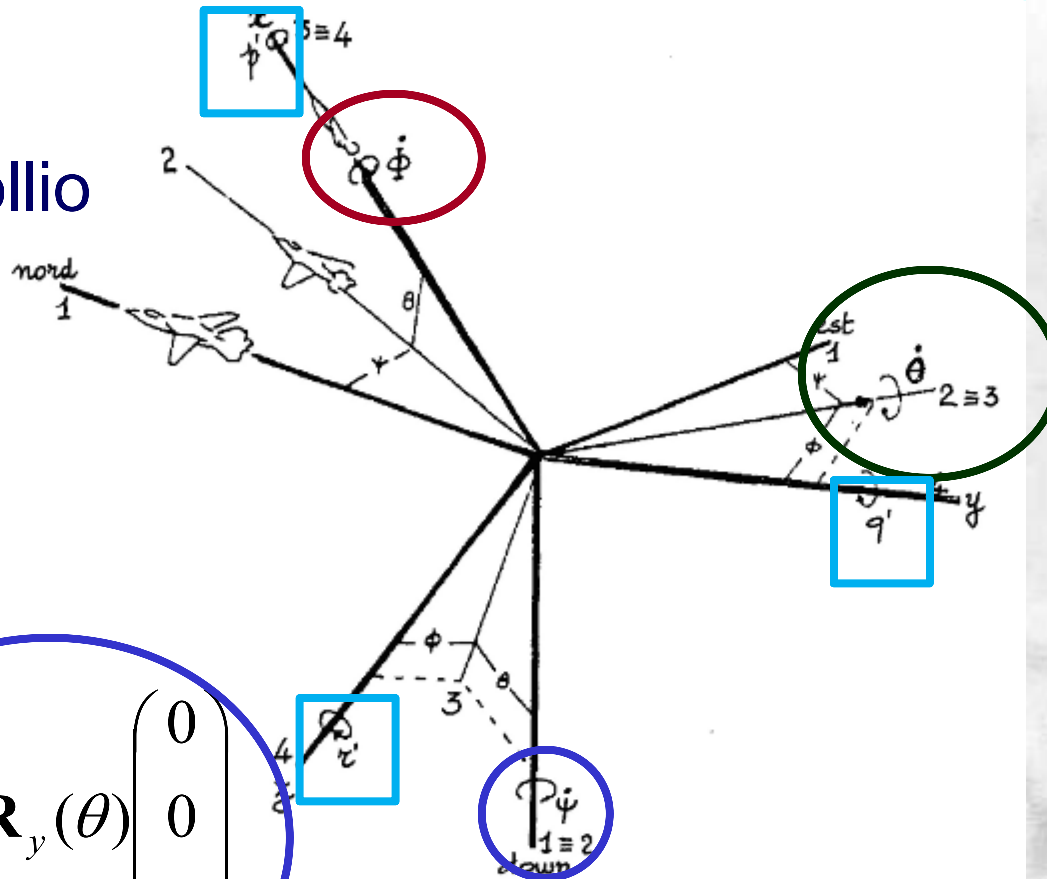
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{bmatrix}$$

Navigazione Inerziale

$\dot{\phi}$ = x_4 ⇨ No rotazione

$\dot{\theta}$ = y_3 ⇨ Rollio

$\dot{\psi}$ = z_1 ⇨ Beccheggio + Rollio



$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \mathbf{I}\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Navigazione Inerziale

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \mathbf{I}\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

- considerando i valori delle matrici **R**, diventa:

LAVAGNA

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

- Effettuando l' operazione inversa

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

- Premoltiplichiamo per A^{-1}

$$A^{-1} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix} = A^{-1} A \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

Navigazione Inerziale

- L'integrazione di queste tre equazioni differenziali permette di ricavare gli angoli di Eulero

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int}$$

Noti gli angoli di Eulero Iniziali (Assetto iniziale)

$$\Downarrow$$

E quindi la matrice desiderata

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}_{n'}^{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Le equazioni:

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

- forniscono le *velocità angolari con cui variano gli angoli di Eulero* in funzione
- della velocità angolare con cui la terna *BODY* ruota rispetto alla terna di riferimento *NED*.

$$\boldsymbol{\omega}^{b}_{n'b}(p',q',r')$$

Ottenute dalle uscite dei Gyrs corrette

Navigazione Inerziale

- Gli angoli di Eulero rappresentano **il minimo numero di parametri** in grado di definire la matrice dei coseni direttori;

- è infatti necessario risolvere soltanto **tre equazioni differenziali che però non sono lineari** contenendo funzioni trigonometriche.

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi\sec\theta & \cos\phi\sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

- Tale metodo presenta, inoltre, l'inconveniente che, come si avvicina ai 90° di **Beccheggio**, le funzioni secante e tangente presentano delle singolarità

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}$$

- Ritroviamo, pertanto, le stesse limitazioni viste per le piattaforme a tre assi (*gimbal lock*).
- Per tale motivo **il metodo ora descritto è poco usato.**