Meccanizzazione verticale

Scriviamo la componente verticale dell'equazione fondamentale della navigazione inerziale:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_z = f_z - (\rho_x + 2\sigma_x)V_y + (\rho_y + 2\sigma_y)V_x + g_z$$

Sapendo che:

$$\begin{cases} \rho_x = \rho_e = -\dfrac{V_N}{R} \\ \rho_y = \rho_N = \dfrac{V_E}{R} \end{cases} ; \begin{cases} \sigma_x = \sigma_E = 0 \\ \sigma_y = \sigma_N = \sigma cos\varphi \end{cases} ;$$

Per quanto riguarda g_z, in maniera approssimativa, è possibile affermare che $g \cong g_0$. Tuttavia, se il mobile non si trova sulla superficie terrestre ma ad una quota *h* non trascurabile, non è possibile considerare *g* costante. Volendo essere estremamente precisi, *g* varia spazialmente e temporalmente ma, per semplificare il problema, si considera solo la sua variazione con la quota: $g = f(h)$ e che il vettore che la descrive punta sempre verso il centro della Terra.

In particolare, esiste una proporzionalità tra *g* e *h*, sfruttando la definizione di **campo di forze centrali**:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \rightarrow g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

Mettendo in evidenza R al denominatore:

$$g = g_0 \frac{R^2}{\left[R\left(1+\frac{h}{R}\right)\right]^2} = g_0 \frac{R^2}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \rightarrow g = \frac{g_0}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$g = g_0\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} = g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

Applicando nell'ultimo passaggio lo sviluppo in serie binomiale.

Se consideriamo la terna ENU come SdR, possiamo affermare che:

$$g_z = -g$$

in quanto essa ha asse *z* diretto lungo la verticale.

Dunque, scrivendo l'accelerazione lungo *z* come variazione (derivata seconda) della quota e i pedici riferiti alla terna ENU, la terza equazione fondamentale della navigazione inerziale diventa:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_z = \ddot{h} = f_U - \left(-\frac{V_N}{R}+0\right)V_N + \left(\frac{V_E}{R} + 2\sigma cos\varphi\right)V_E - g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

$$\ddot{h} = f_U + \frac{V_N^2}{R} + \frac{V_E^2}{R} + 2\sigma V_E cos\varphi - g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

$$\ddot{h} = f_U + \frac{(V_N^2+V_E^2)}{R} + 2\sigma V_E cos\varphi - g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

Il termine $\frac{(V_N^2+V_E^2)}{R} + 2\sigma V_E cos\varphi$ si può porre pari a **c** in quanto consiste in un termine correttivo dato dalla somma dell'accelerazione centrifuga legata al moto orizzontale del mobile $\frac{V^2}{R}$ e dell'accelerazione di Coriolis, anch'essa legata alla velocità orizzontale del mobile.

Si nota che **c** è funzione del solo canale orizzontale: $c = f(V_E, V_N)$

$$\ddot{h} = f_U + c - g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

Supponendo che le velocità orizzontali siano prive di errore ($\delta V_E = \delta V_N = 0$), non avremo contributi dell'errore del canale orizzontale, sul canale verticale: $\delta c = 0$.

Applicando la legge di propagazione della varianza-covarianza, è possibile determinare gli errori $\delta\ddot{h}$ che dipenderanno da δf_U e δg

$$\delta\ddot{h} = \delta f_U - \delta g$$

Sapendo che $g = g_0\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$, essendo g_0 e R costanti, l'errore δg dipenderà solo da h:

$$\delta g = -\frac{2g_0}{R}\delta h$$

Dunque:

$$\delta\ddot{h} = \delta f_U + \frac{2g_0}{R}\delta h$$

Per risolvere questa equazione (differenziale), applichiamo la trasformata di Laplace:

$$\delta h(t) \rightarrow \delta h(s) = s^2\delta h(s) - s\delta h(0) - \delta\dot{h}(0)$$

Allora:

$$s^2\delta h(s) - s\delta h(0) - \delta\dot{h}(0) = \frac{\delta f_U}{s} + \frac{2g_0}{R}\delta h(s)$$

Ricordando che $\omega_0^2 = -\frac{g_0}{R}$

$$s^2\delta h(s) - 2\omega_0^2\delta h(s) = s\delta h(0) - \delta\dot{h}(0) + \frac{\delta f_U}{s}$$

$$\delta h(s)(s^2 - 2\omega_0^2) = s\delta h(0) - \delta\dot{h}(0) + \frac{\delta f_U}{s}$$

$$\delta h(s) = \frac{1}{(s^2 - 2\omega_0^2)} - \frac{1}{(s^2 - 2\omega_0^2)}\delta\dot{h}(0) + \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2 - 2\omega_0^2)}\delta f_U$$

Ponendo $\omega^2 = 2\omega_0^2 \rightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_0$

$$\delta h(s) = \frac{s}{(s^2 - \omega^2)} - \frac{1}{(s^2 - \omega^2)}\delta\dot{h}(0) + \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2 - \omega^2)}\delta f_U$$

Antitrasformando, otterremo che:

$$\frac{s}{(s^2 - \omega^2)} \to \cosh(\omega t)$$

$$\frac{1}{(s^2 - \omega^2)} \to \frac{\sinh\,(\omega t)}{\omega}$$

Nel dominio del tempo:

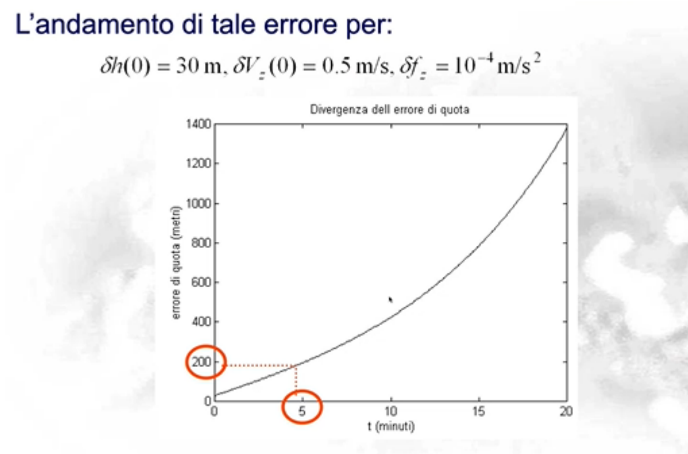
$$\delta h(t) = \delta h(0)\cosh(\omega t) - \delta\dot{h}(0)\frac{\sinh(\omega t)}{\omega} + \delta f_U \int_0^t \frac{\sinh\,(\omega\tau)}{\omega}\,d\tau$$

Sostituendo $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ si ottiene:

$$\delta h = \frac{(\cosh\sqrt{2}\omega_0 t - 1)}{2\omega_0^2}\delta f_U + \cosh\sqrt{2}\,\omega_0 t\delta h(0) + \frac{\sinh\sqrt{2}\,\omega_0 t}{\sqrt{2}\omega_0}\delta V_U(0)$$

Il primo termine indica come si ripercuote la misura del canale verticale dell'accelerometro, il secondo termine indica come si ripercuote una stima iniziale sbagliata della quota, il terzo elemento indica come si ripercuote una stima iniziale della velocità verticale.

Studiando questa funzione nel tempo, otterremo un andamento esponenziale:



Questo spiega perché le misure di accelerazione del canale verticale vengono trascurate.