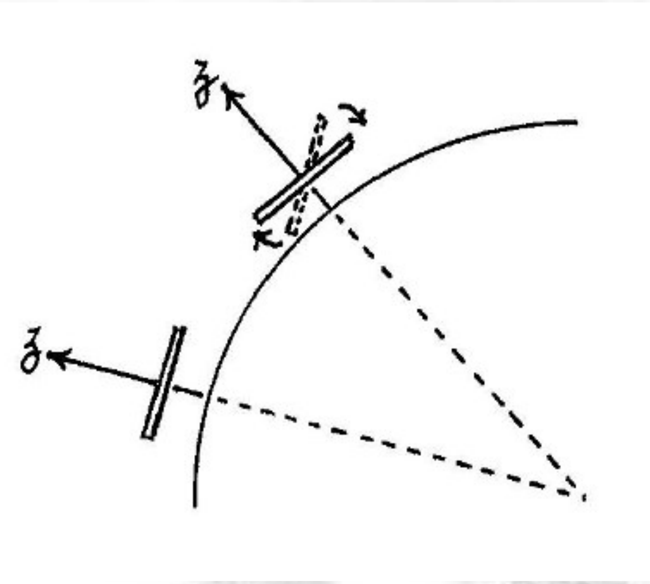
NAVIGAZIONE INERZIALE

ROTAZIONI A CUI SOTTOPORRE LA PIATTAFORMA AFFINCHÉ RESTI ORIZZONTALE

Navigazione Inerziale

La piattaforma, e di conseguenza la terna cartesiana ad essa solidale, per mantenersi orizzontale deve continuamente essere sottoposta a rotazioni intorno ai propri assi tramite gli appositi motorini.

Naturalmente **non è necessario imporre alcuna condizione circa la rotazione intorno all'asse verticale** in quanto essa **non influisce sull'orizzontalità** della piattaforma e può essere scelta arbitrariamente a seconda del tipo di meccanizzazione adottato.



Moto per Meridiano

Rotazione continua

Asse E

Navigazione Inerziale

La velocità angolare cui la piattaforma deve essere sottoposta deve tenere:

conto sia del moto della Terra rispetto alla terna inerziale (**velocità angolare σ** diretta lungo l'asse *z* della terna terrestre), le cui componenti in ENU sono $(0 \quad \sigma cos\varphi \quad \sigma sen\varphi)$

sia del **moto dell'aereo** rispetto alla superficie terrestre (**ρ**).

$$\omega = \rho + \sigma$$

Navigazione Inerziale

Indicando con *x*, *y*, *z* gli assi della terna legata alla piattaforma(**TERNA DI MISURA** o **PIATTAFORMA**), bisogna imporre:

l'asse ***z* deve indicare la verticale** e di conseguenza gli assi *x*, *y* giacere nel piano orizzontale

generalmente ruotati rispetto agli assi orizzontali della terna di navigazione **di un angolo di deriva *α***

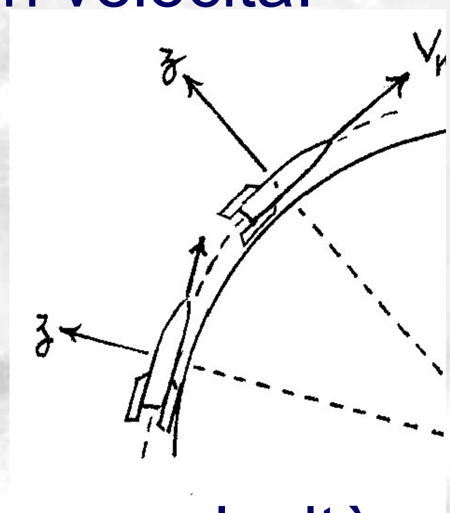
caso particolare ***α=0***, diretti rispettivamente per EST e per NORD in modo da far coincidere la terna di piattaforma con la terna *ENU (Terna di Calcolo)*.

Calcolo delle componenti di ρ

Le componenti della velocità angolare dell'aereo **ρ** sono funzioni delle componenti della velocità dell'aereo V_x e V_y

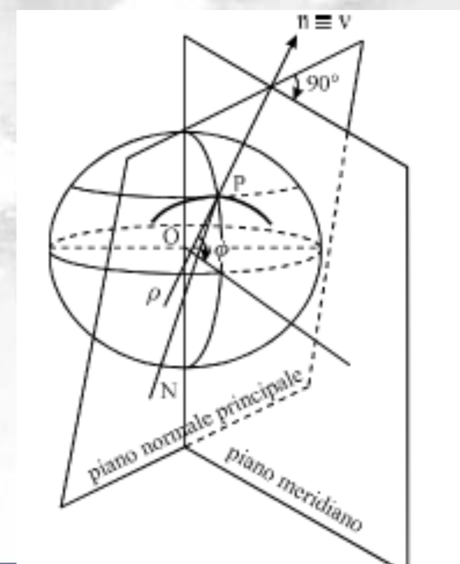
Nel caso di α=0 la piattaforma dovrebbe essere ruotata intorno alla linea E-W con velocità:

$$\rho_x = \rho_e = -V_n / \rho$$



ed intorno alla linea N-S con velocità:

$$\rho_y = \rho_n = V_e / N$$



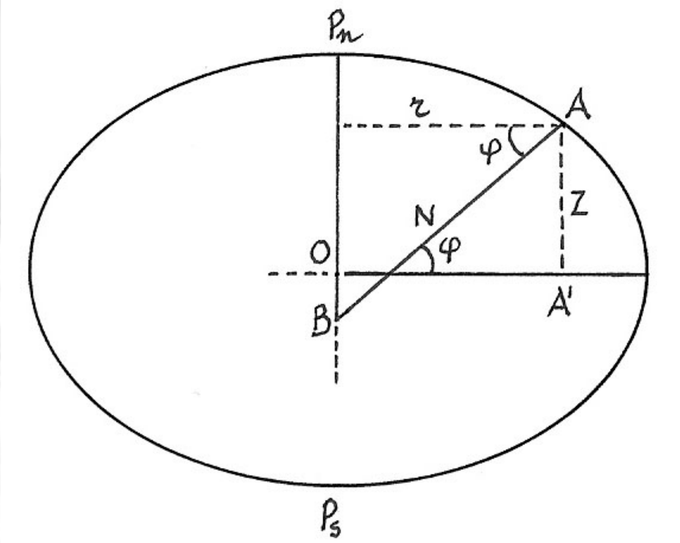
Chi sono ρ ed N

Raggi di curvatore del **piano meridiano** e del **primo verticale**

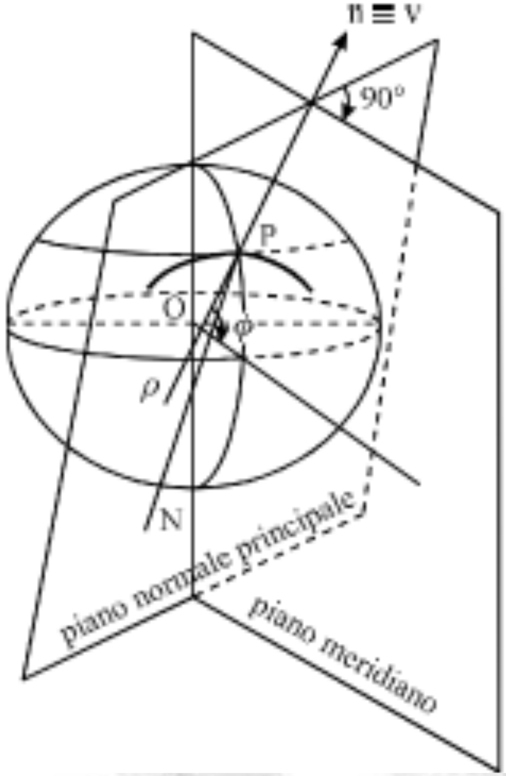
Per terra ellissoidica

$$\rho = a\left(1-e^2\right)\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$N = a\left(1-e^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$$



Navigazione Inerziale



Per **Terra Sferica *ρ=N=R*** da cui:

$$\rho_x = -\frac{V_y}{R+h} = -\frac{V_y}{R\left(1+{}^{h}\!/_{R}\right)} = -\frac{V_y}{R}\left(1+{}^{h}\!/_{R}\right)^{-1}$$

$$\rho_y = \frac{V_x}{R+h} = \frac{V_x}{R\left(1+{}^{h}\!/_{R}\right)} = \frac{V_x}{R}\left(1+{}^{h}\!/_{R}\right)^{-1}$$

SVILUPPO IN SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\rho_x = -\frac{V_y}{R+h} = -\frac{V_y}{R(1+h/R)} = -\frac{V_y}{R}(1+h/R)^{-1} = -\frac{V_y}{R}(1-h/R)$$

$$\rho_y = \frac{V_x}{R+h} = \frac{V_x}{R(1+h/R)} = \frac{V_x}{R}(1+h/R)^{-1} = \frac{V_x}{R}(1-h/R)$$

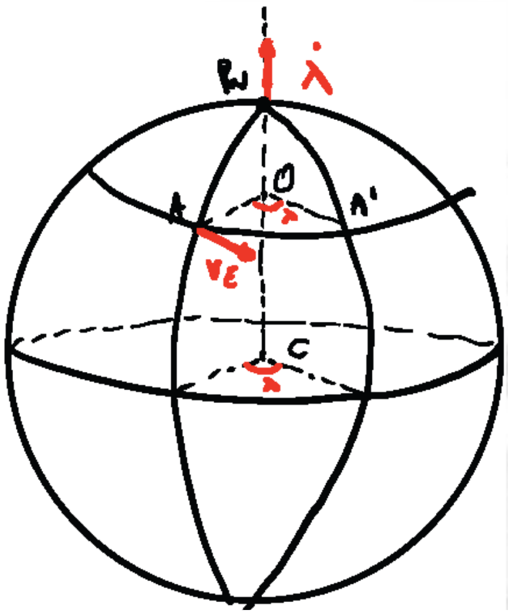
Navigazione Inerziale

Importante notare che per **terra sferica** ρ_x e ρ_y sono **velocità angolari che restano invariate** per qualsiasi valore dell'angolo α avendo tutti i punti della sfera curvatura costante.

$$\rho_x = -\frac{V_y}{R}(1 - h/R)$$

$$\rho_y = \frac{V_x}{R}(1 - h/R)$$

- Per la **componente verticale** di *ρ* consideriamo la variazione di longitudine nel tempo:

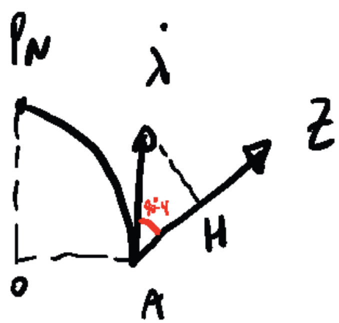


RAGGIO PARALLELO

$$V_E = \dot{\lambda} \cdot \overline{OA} \quad ; \quad \overline{OA} = N\cos\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{\lambda} = \frac{V_E}{N\cos\varphi}}$$



$$\rho_z = \overline{AH} = \dot{\lambda}\cos(90°-\varphi) =$$
$$= \dot{\lambda}\sin\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_z = \dot{\lambda}\sin\varphi = \frac{V_E}{N}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_z = \frac{V_E}{N}\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

MECCANIZZAZIONE ORIZZONTALE

Meccanizzazione Orizzontale

Per **meccanizzazione orizzontale** si intende il calcolo della posizione e della velocità dell'aereo a partire dalle uscite degli **accelerometri orizzontali**.

La meccanizzazione più semplice si ha quando la terna legata alla piattaforma è fatta coincidere con la terna di navigazione (ENU);

in tal caso l'angolo α è mantenuto costantemente nullo, ovvero l'asse y risulta sempre diretto lungo la linea meridiana.

Una tale meccanizzazione presenta **il vantaggio di permettere direttamente il calcolo delle coordinate geografiche φ,λ** ed è, per tale motivo, detta anche meccanizzazione φ,λ.

Meccanizzazione Orizzontale

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_x = f_x - (\rho_y + 2\sigma_y)V_z + (\rho_z + 2\sigma_z)V_y + g_x$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_y = f_y - (\rho_z + 2\sigma_z)V_x + (\rho_x + 2\sigma_x)V_z + g_y$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_z = f_z - (\rho_x + 2\sigma_x)V_y + (\rho_y + 2\sigma_y)V_x + g_z$$

Concentriamoci sul **canale orizzontale** e consideriamo **ENU** come **terna di calcolo** facendo precessionare la pittaforma con la velocità angolare (terra ellissoidica)

$$\omega = \sigma + \rho \Rightarrow \begin{bmatrix}\omega_E \\ \omega_N \\ \omega_U\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ \sigma cos\varphi \\ \sigma sen\varphi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-V_N/\rho \\ V_E/N \\ (V_E/N)tan\varphi\end{bmatrix}$$

Meccanizzazione Orizzontale

Le **misure effettuate dagli accelerometri**, f_x e f_y **opportunamente corrette**, consentono di ottenere le **accelerazioni** dovute al moto dell'aereo.

Ricordando le equazioni fondamentali della Navigazione Inerziale, si ha:

$$\dot{V}_e = f_e - (\rho_n + 2\sigma_n)V_z + (\rho_z + 2\sigma_z)V_n$$

$$\dot{V}_n = f_n - (\rho_z + 2\sigma_z)V_e + \rho_e V_z$$

Meccanizzazione Orizzontale

Da una semplice integrazione (numericamente risolta con il metodi di Runge Kutta ad esempio) si ha:

$$V_e = V_{e_0} + \int_0^t \dot{V}_e \, dt$$

$$V_n = V_{n_0} + \int_0^t \dot{V}_n \, dt$$

Da cui:

$$\dot{\varphi} = \frac{V_n}{\rho} = -\rho_e$$

$$\dot{\lambda} = \frac{V_e}{N \cos\varphi} = \rho_n \sec\varphi$$

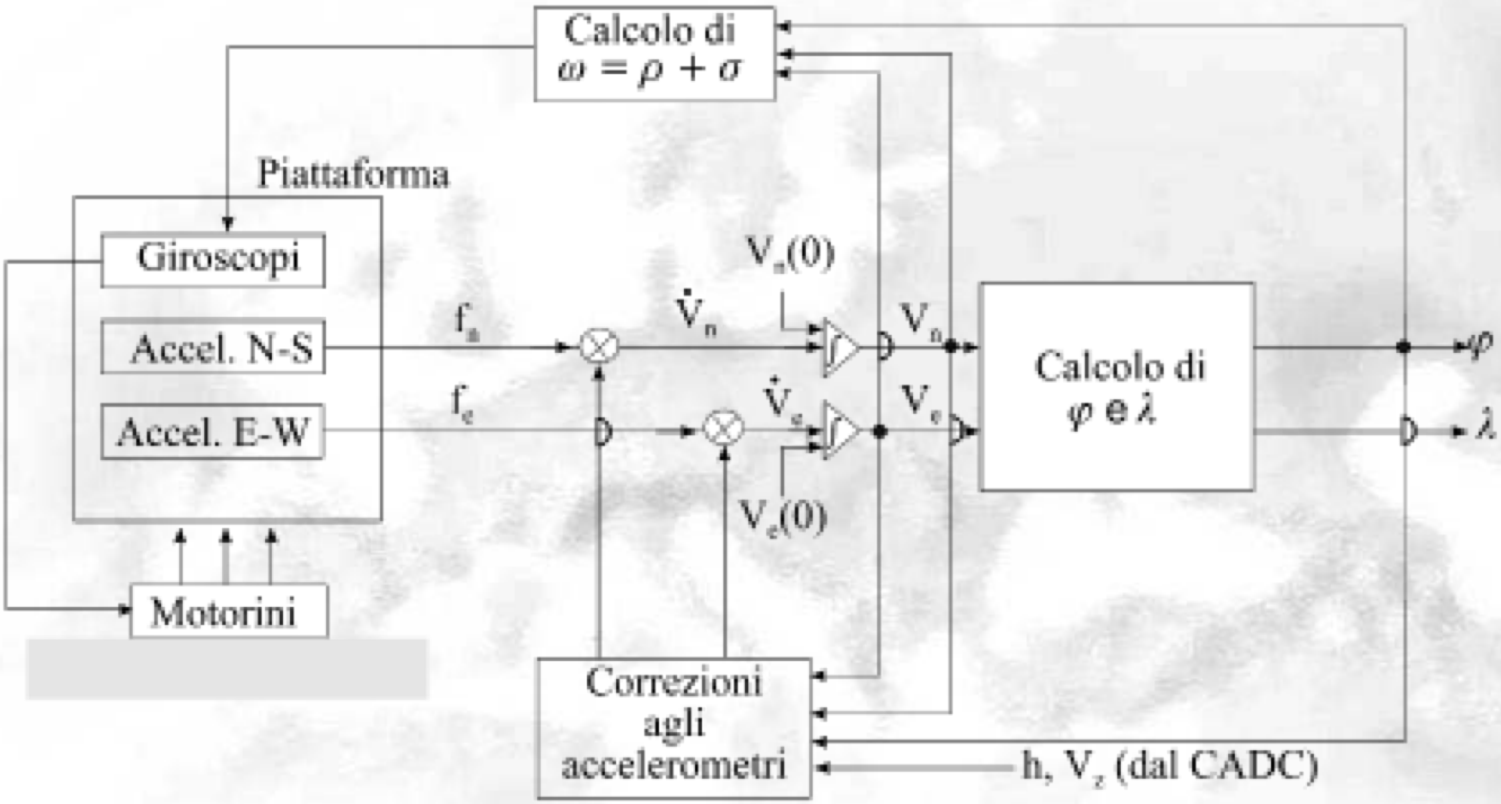
$$\Rightarrow$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \dot{\varphi} \, dt$$

$$\lambda = \lambda_0 + \int_0^t \dot{\lambda} \, dt$$

Meccanizzazione Orizzontale

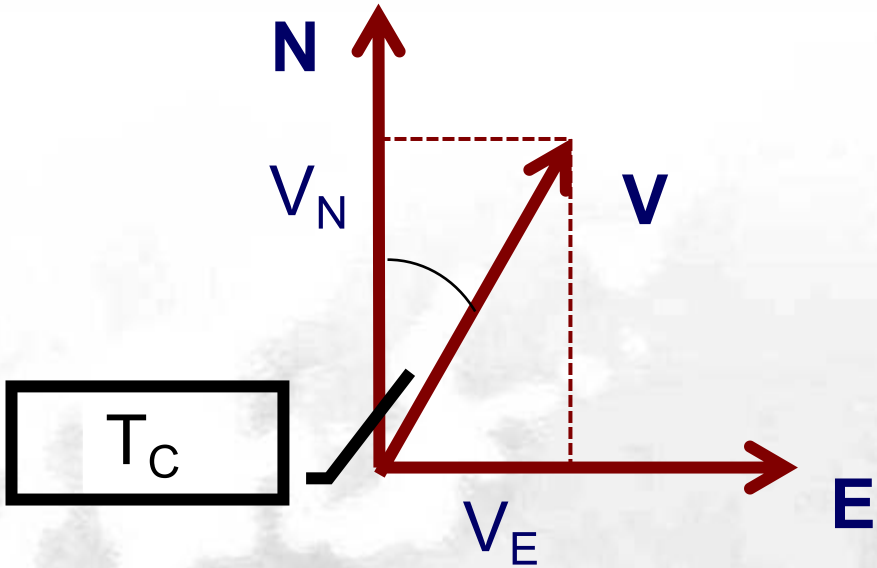
In definitiva:



Meccanizzazione Orizzontale

La **velocità verticale** V_z e la quota h devono essere fornite da una fonte esterna diversa da quella inerziale in quanto, a meno di accorgimenti, il canale verticale è instabile **come vedremo** e ciò comporta errori crescenti **esponenzialmente** col tempo

Meccanizzazione Orizzontale



La rotta vera ***TC*** (***True Course***) e la velocità al suolo ***GS*** (***Ground Speed***) possono essere ricavate attraverso le relazioni:

$$TC = \tan^{-1}(V_e / V_n) \qquad ; \qquad GS = \left(V_n^{\,2} + V_e^{\,2}\right)^{1/2}$$

Svantaggio Meccanizzazione Orizzontale

La meccanizzazione Orizzontale presenta l'inconveniente che alle alte latitudini la relazione:

$$\dot{\lambda} = \frac{V_e}{N\cos\varphi} = \rho_n \sec\varphi$$

non può essere utilizzata per il calcolo della longitudine;

inoltre la **velocità di precessione** della piattaforma intorno all'asse z, man mano che l'aereo si avvicina al polo, **diventa eccessiva** in quanto nella

$$\rho_z = \dot{\lambda}\, C_{33} = \frac{V_e}{N}\tan\varphi$$

la funzione tangente tende all'infinito.

In pratica questa meccanizzazione viene utilizzata per sistemi che operano a **latitudini inferiori agli 80°**.

Vantaggio Meccanizzazione Orizzontale

Il vantaggio principale di tale meccanizzazione è rappresentato dal minor numero di calcoli rispetto ad altre meccanizzazioni il che rappresentò un indubbio vantaggio nei primi sistemi inerziali dotati di computer con ridotte capacità di calcolo.

La precisione della navigazione inerziale è legata, *oltre che all'affidabilità degli accelerometri e dei giroscopi*, alla **perfetta conoscenza della posizione, velocità ed allineamento iniziali della piattaforma**

Allineamento Iniziale Piattaforma

Navigazione Inerziale

La **posizione iniziale si intende sempre perfettamente nota**;

si considera, inoltre, l'aereo fermo (*velocità iniziale nulla*) e, pertanto, occorre descrivere unicamente le operazioni necessarie a conferire alla piattaforma il prescelto orientamento.

Consideriamo un metodo di allineamento autonomo nel quale sono utilizzati i sensori inerziali della stessa piattaforma (i giroscopi e gli accelerometri) usando, come riferimenti esterni, le direzioni del vettore gravità **g** e del vettore rotazione terrestre **σ**

Navigazione Inerziale

Nel caso, infatti, di una piattaforma orizzontale asservita al nord geografico,

viene raggiunto l'assetto desiderato quando **le uscite degli accelerometri sono**:

$$(0,0,-g)$$

ovvero quando **gli accelerometri orizzontali non denunciano alcuna componente dell'accelerazione di gravità** e quando i segnali di comando dei giroscopi sono:

$$0, \qquad \sigma\cos\varphi, \qquad \sigma\sin\varphi$$

quando il giroscopio, il cui asse di ingresso è posto in direzione E-W, non è affetto da alcuna componente della velocità angolare terrestre.

Navigazione Inerziale

L'allineamento della piattaforma viene effettuato in due fasi:

Livellamento: si ottiene facendo ruotare la piattaforma intorno ai due assi *x* ed *y* fino a che non raggiunga il piano orizzontale;

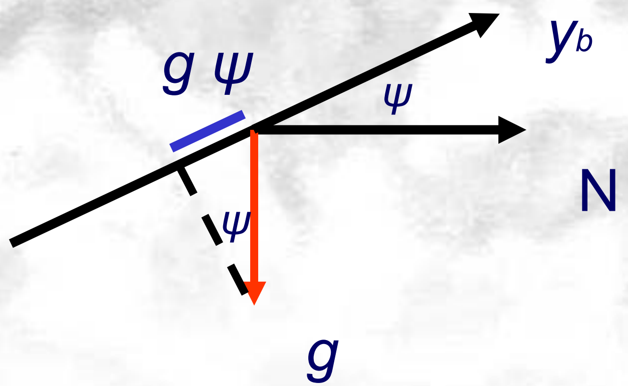
Orientamento in azimut: ottenuto facendo ruotare la piattaforma intorno all'asse *z* verticale fino a che l'asse *y* non raggiunga la linea meridiana.

Navigazione Inerziale

L'operazione di livellamento della piattaforma avviene in due stadi:

si ha dapprima un livellamento approssimato durante il quale le uscite degli accelerometri orizzontali, *proporzionali agli angoli di inclinazione* della piattaforma intorno agli assi N-S ed E-W vanno ad alimentare i motorini di coppia dei giroscopi;

$$\varepsilon_a \cong g\psi$$



Navigazione Inerziale

Infine si ha un **livellamento di precisione** durante il quale le uscite degli accelerometri **vengono dapprima filtrate** e poi vanno ai rispettivi giroscopi.

Il filtraggio si rende necessario per eliminare quelle accelerazioni aleatorie dovute a raffiche di vento, movimenti dell'aereo durante il rifornimento di carburante o dovuti al passaggio di personale, ecc.

Navigazione Inerziale

Anche l' operazione di **orientamento in azimut** avviene in due stadi:

un primo stadio (orientamento approssimato) utilizza le informazioni provenienti da una bussola giromagnetica corretta per la declinazione;

il secondo stadio, invece, termina quando **il giroscopio ad asse di ingresso E-W non accusa più alcuna componente della velocità angolare terrestre**.

La precisione che può essere raggiunta nell'operazione di livellamento **dipende dalla sensibilità degli accelerometri**;

infatti se **ε_a è la minima accelerazione che l'accelerometro è in grado di rilevare**, si ha equilibrio quando:

$$\varepsilon_a = g \sin\psi \cong g\psi$$

e quindi, per $\varepsilon_a = 10^{-4}\,\mathrm{g}$

può aversi una precisione nel livellamento dato da:

$$\psi \cong \frac{\varepsilon_a}{g} = \frac{10^{-4}\,g}{g} = 10^{-4}\,rad = 20{,}6''$$

Navigazione Inerziale

- La **precisione ottenibile nell'operazione di orientamento in azimut** dipende invece dalla **sensibilità dei giroscopi verticale**;
- se questi hanno una soglia di sensibilità ε_g, si ha equilibrio quando:

$$\varepsilon_g \cong \sigma \cos\phi \ \psi_z$$

- e quindi, per *ε_g=0.01 ° /h ad una latitudine di 45° , può aversi una precisione data da:*

$$\psi_z \cong \frac{\varepsilon_g}{\sigma \cos\phi} = \frac{0.01}{15\cos(45°)} = 3.5'$$

- *Si vede però che, con **l'aumentare della latitudine, a parità di soglia di sensibilità del giroscopio, si hanno errori maggior**i; per tale motivo l'operazione di orientamento è valida fino a latitudini di 80° .*

MECCANIZZAZIONE VERTICALE

Dispensa: C02_A04_04_INS_Sist_Piatt_Asservita_Canale_Verticale.pdf

ERRORI DEL CANALE VERTICALE

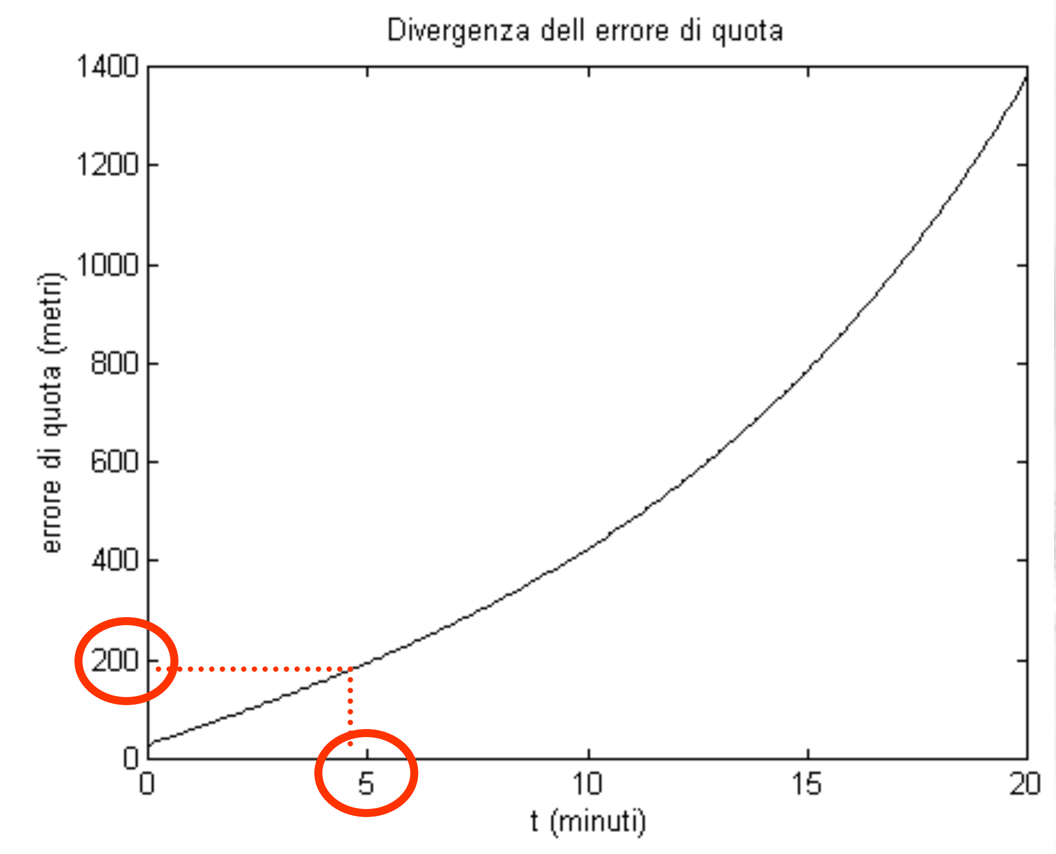
$$\delta h(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2\omega_0^2)}\delta f_z + \frac{s}{s^2 - 2\omega_0^2}\delta h(0) + \frac{1}{s^2 - 2\omega_0^2}\delta \dot{h}(0)$$

- ANTITRASFORMANDO:

$$\delta h = \frac{(\cosh\sqrt{2}\omega_0 t - 1)}{2\omega_0^2}\delta f_z + \cosh\sqrt{2}\omega_0 t\ \delta h(0) + \frac{\sinh\sqrt{2}\omega_0 t}{\sqrt{2}\omega_0}\delta V_0(0)$$ (**)

L'andamento di tale errore per:

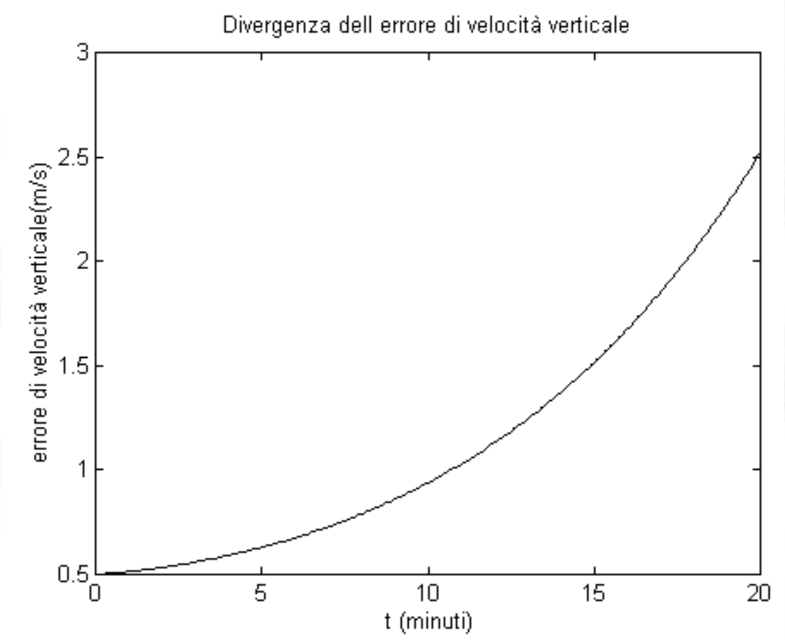
$$\delta h(0) = 30\ \text{m},\ \delta V_z(0) = 0.5\ \text{m/s},\ \delta f_z = 10^{-4}\ \text{m/s}^2$$



Derivando la (**) si ha:

$$\delta V_z = \frac{\sinh \sqrt{2}\omega_0 t}{\sqrt{2}\omega_0}\delta f_z + \sqrt{2}\omega_0 \sinh \sqrt{2}\omega_0 t \;\; \delta h(0) + \cosh \sqrt{2}\omega_0 t \;\; \delta V_0(0)$$

Graficamente con gli stessi valori dell'esempio precedente



QUANTO DETTO RENDE INUTILIZZABILE IL CANALE VERTICALE