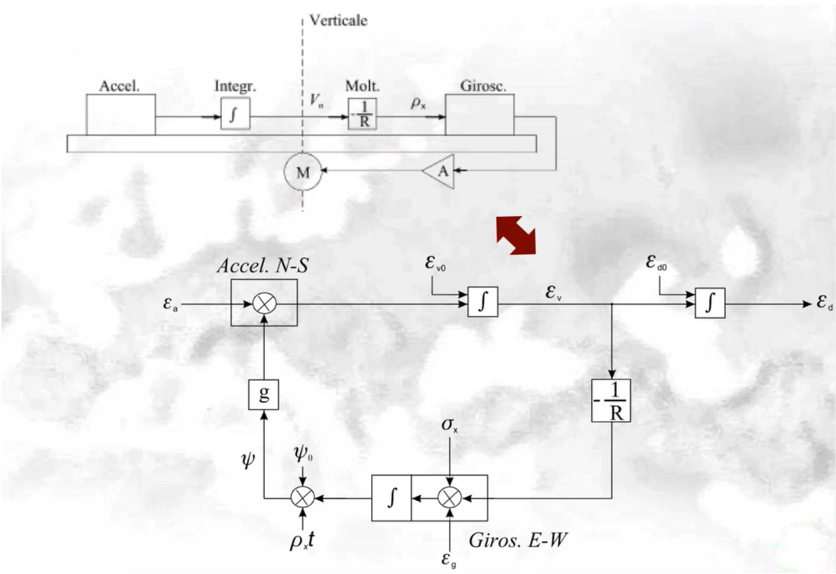
Comportamento della piattaforma di Schuler - Errori relativi

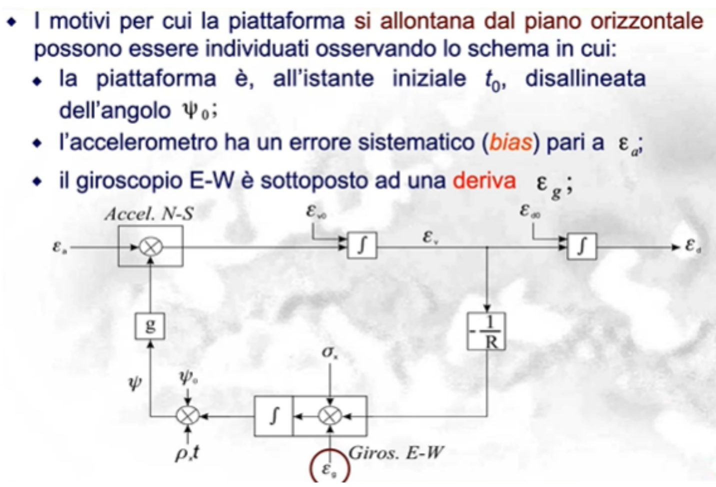
Analizziamo di seguito tutte le possibili fonti di errori che potranno generare un disallineamento della piattaforma.

Consideriamo lo schema a blocchi della piattaforma: il primo blocco, in alto a sinistra, è costituito da un accelerometro con asse sensibile diretto lungo la direzione N-S. Se tale accelerometro produce un errore sulla misura, tale errore integrato produrrà un errore in velocità e poi, integrato una seconda volta, in distanza (dunque sulla posizione). Ancora, un errore di misura sulla velocità che viene moltiplicato per $-\frac{1}{R}$ si traduce come una velocità angolare, dunque una precessione indesiderata. Tale velocità angolare, una volta integrata, implica un angolo di disallineamento ψ il quale, moltiplicato per g, rappresenterà la componente dell'accelerazione di gravità, che non si vuole misurare.

Anche il giroscopio è un sensore e, in quanto tale, può essere soggetto ad un errore di misura. Supponiamo che tale sensore sia affetto da una propria deriva ε_g (considerabile come un bias) che provocherà un ulteriore disallineamento che, seguendo lo stesso procedimento di prima, produrrà una componente dell'accelerazione di gravità indesiderata.



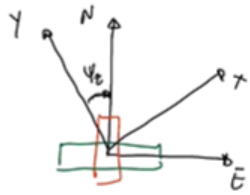
Vediamo sinteticamente i tre errori analizzati:



Un altro problema può essere dovuto al fatto che la piattaforma non è direzionata verso la direzione N. Supponiamo che la piattaforma sia orizzontale e, di conseguenza, perpendicolare alla direzione della verticale. In questo caso, l'asse sensibile dell'accelerometro avrà asse sensibile diretto verso N e il giroscopio avrà asse sensibile diretto verso E

Se il giroscopio lungo la direzione della verticale è affetto da un errore di misura ε_{g_z} costante, la piattaforma sarà animata da un moto di precessione attorno all'asse z e se inizialmente la piattaforma godeva dei sensori orientati nelle direzioni desiderate (N, E), a causa di questo errore, sarà disallineata di un angolo ψ_z dato da:

$$\psi_z = \int_0^t \varepsilon_{g_z} dt$$

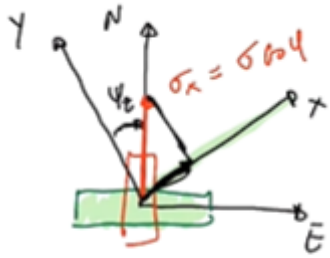


I sensori orizzontali, dunque, non saranno più diretti verso N ed E, ma saranno disallineati di una quantità pari ψ_z.

Lungo la direzione N esiste la componente orizzontale della velocità angolare terrestre:

$$\sigma_x = \sigma cos\varphi$$

Essa, nel caso di piattaforma perfettamente orizzontale, non sarà rilevata dal Giroscopio E-W e quindi non produrrà nessun effetto perché sarà perpendicolare all'asse sensibile del giroscopio. Tuttavia, se non si verifica questa ortogonalità, il giroscopio misurerà anche una parte di questa componente e produrrà una precessione indesiderata.



Schematicamente, gli effetti indesiderati saranno:

a) Il disallineamento iniziale della piattaforma: ψ_0
b) Un errore dell'accelerometro N-S: $\varepsilon_{a_{NS}}$
c) Un errore del giroscopio E-W: $\varepsilon_{g_{EW}}$
d) Un errore del giroscopio sulla verticale ε_{g_z}

Queste fonti di errore produrranno una precessione:

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{R}\int_0^t \psi dt \quad (*)$$

Derivando la quale si ottiene l'equazione che rappresenta questo moto:

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0 \quad (**)$$

<u>Studio delle singole fonti di errore</u>

Caso (a) e (b)

Raggruppiamo queste due fonti di errori perché possono essere viste l'una la causa dell'altra e viceversa. Un disallineamento produce non errore di misura di accelerazione e viceversa.

Supponiamo che all'istante iniziale $t = 0$ si abbia un disallineamento $\psi(0) = \psi_0$. Per capire che deriva produce e come essa si traduce nel calcolo della posizione, studiamo l'equazione (**) sfruttando la trasformata di Laplace:

$$s^2\psi(s) - \dot{\psi}(0) - s\psi(0) + \omega_0^2\psi(s) = 0$$

Nell'ipotesi di disallineamento iniziale senza deriva: $\dot{\psi}(0) = 0$

$$s^2\psi(s) - s\psi(0) + \omega_0^2\psi(s) = 0$$

Mettendo $\psi(s)$ in evidenza e portando $s\psi_0$ al secondo membro si ottiene:

$$\psi(s)(s^2 + \omega_0^2) = s\psi_0$$

$$\psi(s) = \frac{s\psi_0}{(s^2 + \omega_0^2)}$$

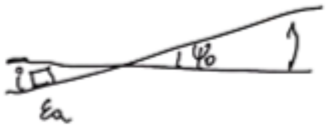
Nel dominio del tempo, l'andamento della precessione della piattaforma è dato dall'antitrasformata dell'equazione appena scritta:

$$\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega_0 t)$$

Quest'equazione fa comprendere che, nel tempo, la piattaforma oscillerà attorno alla posizione iniziale secondo un moto periodo di ampiezza ψ_0 con periodo di Schuler (T=84.4 minuti)

L'accelerometro, non più orizzontale, sarà affetto da un errore dovuto all'influenza di g

$$\varepsilon_a = g\psi = g\psi_0 \cos(\omega_0 t)$$



Integrando l'errore dell'accelerometro si ottiene l'errore sulla velocità, integrando a sua volta il quale, determina l'errore sulla distanza:

$$\varepsilon_V = \int \varepsilon_a dt$$

$$\varepsilon_d = \int \varepsilon_V dt$$

Calcoliamo singolarmente i seguenti integrali:

$$\varepsilon_V = \int_0^t g\psi_0 \cos(\omega_0 \tau) d\tau = g\psi_0 \int_0^t \cos(\omega_0 \tau) d\tau$$

Per risolvere l'integrale, moltiplico e divido per ω_0:

$$\frac{g\psi_0}{\omega_0} \int_0^t \omega_0 \cos(\omega_0 \tau) d\tau = \frac{g\psi_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau)$$

Dunque, la piattaforma nell'intervallo di tempo [0, t] si sarà disallineata stimando una velocità fittizia data dall'equazione appena scritta.

Determiniamo l'errore sulla stima della posizione:

$$\varepsilon_d = \int \varepsilon_V dt = \int_0^t \frac{g\psi_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau)\, d\tau = -\frac{g\psi_0}{\omega_0^2} \int_0^t -\omega_0 \sin(\omega_0 \tau)\, d\tau = -\frac{g\psi_0}{\omega_0^2} [\cos(\omega_0 \tau)]_0^t$$

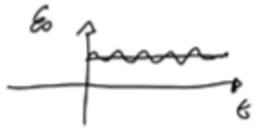
$$= -\frac{g\psi_0}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{g\psi_0}{\omega_0^2}(1)$$

Sapendo che $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$:

$$-R\psi_0\cos(\omega_0 t) + R\psi_0$$

$$\varepsilon_d = R\psi_0[1 - \cos(\omega_0 t)]$$

Questa è l'equazione dell'errore sulla posizione dovuta al disallineamento della piattaforma. In particolare, nel dominio del tempo, l'errore sulla posizione sarà dato da un termine costante $R\psi_0$ e da una funzione periodica, per cui oscillerà proprio intorno a $R\psi_0$



Per definizione si tratta di <u>un errore di prima specie</u> in quanto non aumenta nel tempo, ma è contenuto in un range.

Caso (c)

Analizziamo adesso il caso in cui il giroscopio E-W è affetto da un errore di misura: esso farà precessionare la piattaforma di una quantità legata proprio a tale errore, indicato con $\varepsilon_{g_{E-W}}$. Dunque, l'equazione che regola tale fenomeno sarà (*) a cui aggiungiamo il termine di deriva $\varepsilon_{g_{E-W}}$:

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{R}\int_0^t \psi dt + \varepsilon_{g_{EW}}$$

Derivando tale equazione nel tempo, otterremo l'accelerazione con cui precessiona la piattaforma:

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{R}\psi + 0$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$$

Formalmente è la stessa equazione di prima, ma sarà integrata con estremi differenti, perché se supponiamo che all'istante iniziale non ci sia disallineamento, ci sarà comunque la deriva del giroscopio: $\psi(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = \varepsilon_{g_{E-W}}$.

Nel dominio di Laplace:

$$s^2\psi(s) - s\psi(0) - \dot{\psi}(0) + \omega_0^2\psi(s) = 0$$

$$s^2\psi(s) - \varepsilon_{g_{EW}} + \omega_0^2\psi(s) = 0$$

$$\psi(s)(s^2 + \omega_0^2) = \varepsilon_{g_{EW}}$$

$$\psi(s) = \frac{\varepsilon_{g_{EW}}}{(s^2 + \omega_0^2)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\psi(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\varepsilon_{g_{EW}} = \frac{\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Questa equazione fa comprendere che la piattaforma si disallineerà nel tempo animata da un moto periodico con periodo di Schuler ed ampiezza massima pari al valore $\frac{\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}$.

L'accelerometro, a causa di tale rotazione, misurerà una componente di $\underset{\sim}{g}$ generando un errore ε_a

$$\varepsilon_a = g\psi = \frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

Integrando, come prima, otteniamo una stima dell'errore di velocità e, integrando ulteriormente, di distanza:

$$\varepsilon_V = \int_0^t \varepsilon_a d\tau \ ; \ \varepsilon_d = \int_0^t \varepsilon_V d\tau$$

Calcoliamo ambo gli integrali:

$$\varepsilon_V = \int_0^t \frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}\sin(\omega_0\tau)d\tau = \frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0\tau)d\tau = -\frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0^2}\int_0^t -\omega_0\sin(\omega_0\tau)d\tau$$

$$-\frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0^2}[\cos(\omega_0\tau)]_0^t = \frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0^2} - \frac{g\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$$

Sapendo che $\omega_0^2 = \frac{g}{R}$:

$$\varepsilon_V = R\varepsilon_{g_{EW}}[1 - \cos(\omega_0 t)]$$

L'errore sulla stima di velocità sarà dato da un valore costante (bias) e un termine periodico che farà oscillare la stima attorno a tale valore.

Calcoliamo l'errore sulla distanza:

$$\varepsilon_d = R\varepsilon_{g_{EW}}\int_0^t [1 - \cos(\omega_0\tau)]d\tau = R\varepsilon_{g_{EW}}[\tau]_0^t - R\varepsilon_{g_{EW}}\int_0^t \cos(\omega_0\tau)\,d\tau$$

$$\varepsilon_d = R\varepsilon_{g_{EW}}t - \frac{R\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}[\sin(\omega_0\tau)]_0^t = R\varepsilon_{g_{EW}}t - \frac{R\varepsilon_{g_{EW}}}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

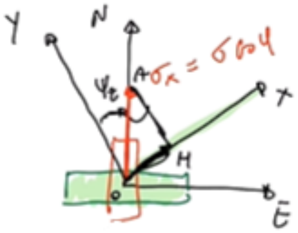
$$\varepsilon_d = R\varepsilon_{g_{EW}}\left[t - \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right]$$

L'errore sulla stima di posizione cresce col tempo, per cui si tratta di <u>un errore di seconda specie</u>.

Caso (d)

L'ultimo errore da trattare è quello del giroscopio verticale che produce un disallineamento ψ_z che implica la componente della velocità di rotazione terrestre σ_x di cui possiamo determinare indicata, in figura, come OH:

$$\sigma_x = \sigma cos\varphi sin\psi_z$$



Il giroscopio sarà soggetto ad una deriva data, per piccoli disallineamenti, da:

$$\varepsilon_{g_{EW}} = \sigma cos\varphi\, \psi_z = \sigma cos\varphi \int_0^t \varepsilon_{g_z} d\tau$$

Dunque, la deriva del giroscopio verticale produca una deriva del giroscopio orizzontale E-W. Tale deriva varia nel tempo. In precedenza, abbiamo ricavato l'equazione di $\varepsilon_{g_{EW}}$:

$$\dot{\psi} = -\frac{g}{R}\int_0^t \psi d\tau + \sigma cos\varphi \int_0^t \varepsilon_{g_z} d\tau$$

Deriviamo nel tempo:

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{R}\psi + \sigma cos\varphi \varepsilon_{g_z}$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = \sigma cos\varphi \varepsilon_{g_z}$$

Supponiamo che all'istante iniziale la piattaforma non ha disallineamento né deriva. Tuttavia, dall'istante $t = 0$ inizierà a derivare per via del bias del giroscopio verticale: $\psi(0) = 0 = \dot{\psi}(0)$.

Nel dominio di Laplace, seguendo sempre gli stessi passaggi:

$$s^2\psi(s) - 0 - 0 + \omega_0^2\psi(s) = \frac{\sigma cos\varphi \varepsilon_{g_z}}{s}$$

$$\psi(s)(s^2 + \omega_0^2) = \frac{1}{s}\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi = \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)}\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi$$

Antitrasformando:

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0}\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi d\tau = \frac{\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi}{\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0\tau)d\tau = -\frac{\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi}{\omega_0^2}[\cos(\omega_0\tau)]_0^t$$

$$\psi(t) = \frac{\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi}{\omega_0^2}[-\cos(\omega_0 t) + 1]$$

Tale disallineamento sarà un fenomeno periodico con periodo di Schuler che oscillerà attorno al valore $\frac{\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi}{\omega_0^2}$, che rappresenterà il bias costante del disallineamento.

Tale oscillazione produce un errore dell’accelerometro

$$\varepsilon_a = g\psi = \frac{\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi g}{\omega_0^2}[1-\cos(\omega_0 t)] = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi[1-\cos(\omega_0 t)]$$

Integrando ottengo l’errore di stima sulla velocità:

$$\varepsilon_v = \int_0^t \varepsilon_a d\tau = \int_0^t R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi[1-\cos(\omega_0 t)]\, d\tau = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi \int_0^t [1-\cos(\omega_0 t)]\, d\tau$$

$$= R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi[\tau]_0^t - R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi \int_0^t \cos(\omega_0 \tau)\, d\tau = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi t - \frac{R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi}{\omega_0}[\sin(\omega_0\tau)]_0^t$$

$$\varepsilon_v = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi\left[t - \frac{\sin(\omega_0\, t)}{\omega_0}\right]$$

È un errore di seconda specie in quanto aumenta linearmente nel tempo.

Integrando otteniamo l’errore di stima sulla posizione:

$$\varepsilon_d = \int_0^t \varepsilon_v\, d\tau = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi \int_0^t \left(\tau - \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0^2}\right) d\tau = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi\left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\cos(\omega_0\tau)}{\omega_0^2}\right]_0^t$$

$$\varepsilon_d = R\varepsilon_{g_z}\sigma cos\varphi\left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2}\right]$$

L’errore sulla posizione sarà la somma tre contributi: il primo è una potenza di ordine pari di *t* che, elevato al quadrato, sarà una parabola; il secondo è un termine periodico; il terzo è un bias costante. Nel tempo, l’errore sulla posizione è la somma di questi tre contributi, oscillando con andamento parabolico e che, dunque, varia con molta rapidità. In conclusione, si tratta di <u>un errore di terza specie</u>. Ciò implica che il canale verticale è parecchio influente sul calcolo della posizione del mobile.