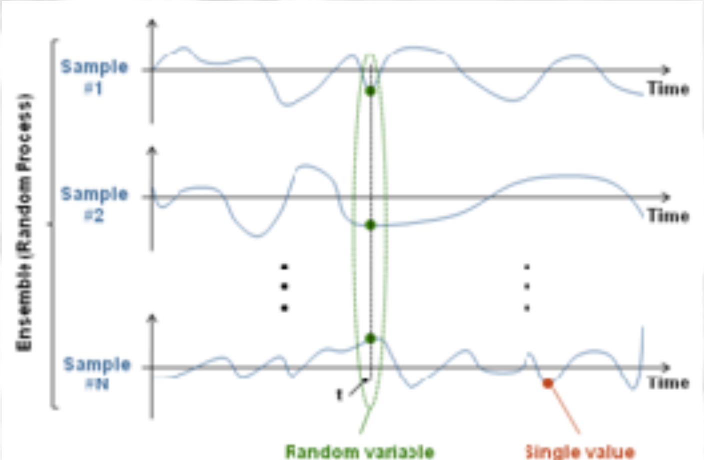
PROCESSI STOCASTICI
(RANDOM PROCESS)

Processi stocastici

- Un **processo stocastico** (random process) è una funzione casuale X(t) (scalere o vettoriale) i cui valori sono variabili aleatorie.
- Es. Misurare la temperatura della superficie terrestre (varia in funzione del tempo)



Fissato *t* il processo random (o stocastico) è un vettore di variabili aleatorie (Caratterizzati da media e MVC)

Processi stocastici

- Avendo specificato che fissata l'epoca di osservazione il valore di una processo random è una variabile aleatoria risulta <u>chiaro</u> che ad epoca fissata il processo segue la

- **Funzione densità di probabilità** (PDF – Probability Density Function) $f(X_i)$ che descrive la densità di probabilità che una realizzazione della variabile aleatoria X_i occorra.

✈PDF che gode delle seguenti proprietà:

$$f(X_i) \geq 0$$

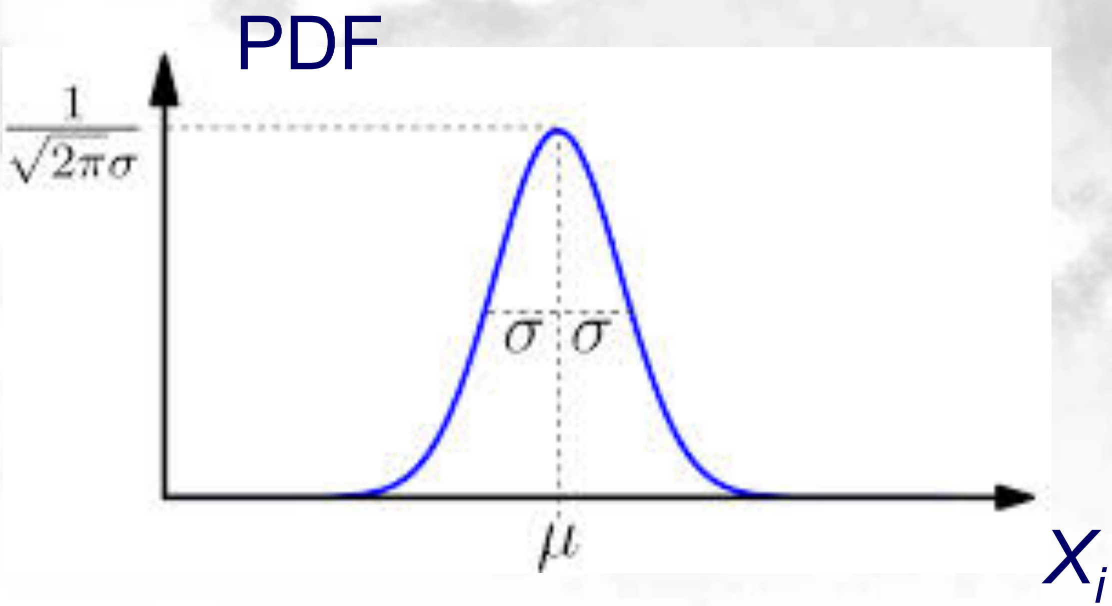
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X_i)\,dX_i = 1$$

$$P(X_{i,1} < X_i < X_{i,2}) = \int_{X_{i,1}}^{X_{i,2}} f(X_i)\,dX_i$$

Per la Distribuzione di Gauss indicata con:

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(X_i-\mu)^2 / \sigma^2}$$

PDF della variabile aleatoria X_i



Processi stocastici

- Considerando invece la variabilità nel tempo, abbiamo:
- Momento del ***Primo Ordine del processo random è la* sua media**.
- Che può essere calcolata considerando la media delle variabili aleatorie che lo compongono, e cioè

$$\mu_i = E(X_i) = \int_0^{\infty} x_i f(x_i) dx_i$$

Processi stocastici

✈ Momento del *Secondo Ordine*,

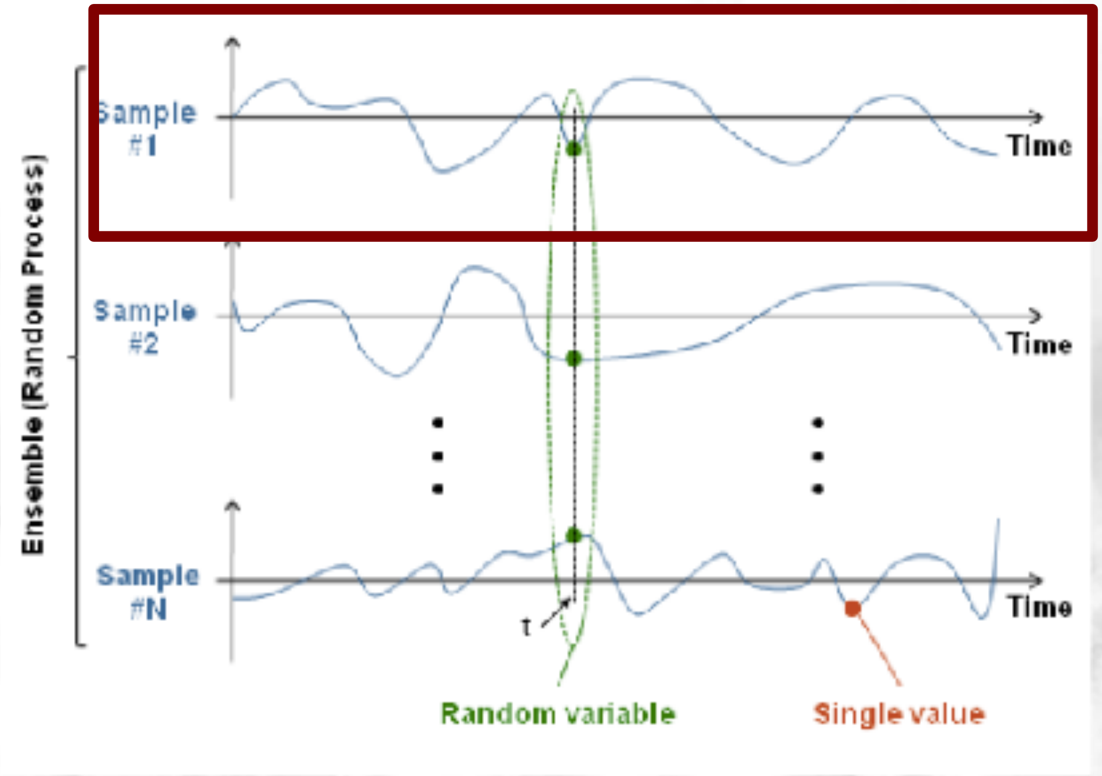
Funzione di Autocorrelazione, definita come:

$$R_X(t_1,t_2) = E\left(\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^T(t_2)\right) = \begin{vmatrix} E\left(X_1(t_1)X_1(t_2)\right) & E\left(X_1(t_1)X_2(t_2)\right) & \dots & E\left(X_1(t_1)X_n(t_2)\right) \\ E\left(X_2(t_1)X_1(t_2)\right) & E\left(X_2(t_1)X_2(t_2)\right) & \dots & E\left(X_2(t_1)X_n(t_2)\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E\left(X_n(t_1)X_1(t_2)\right) & E\left(X_n(t_1)X_2(t_2)\right) & \dots & E\left(X_n(t_1)X_n(t_2)\right) \end{vmatrix}$$

Considerate due epoche qualsiasi, t_1 e t_2

Per $t_1 = t_2$ la funzione di autocorrelazione coincide con la MVC di un vettore ***X*** aleatorio

✈Per capirne il significato consideriamo una singola componente del vettore **X**



vediamo cosa rappresenta la funzione di autocorrelazione per questo "segnale random"

- La funzione di autocorrelazione sta ad indicare come il segnale è **correlato** con se stesso nel tempo. Nel caso di un processo stazionario* la funzione di autocorrelazione dipende esclusivamente dalla distanza temporale tra le epoche scelte (τ), infatti:

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

Funzione di τ

*Processo si definisce stazionario quando la sua densità di probabilità è indipendente dal tempo

- Per un processo stazionario la funzione di autocorrelazione ha le seguenti proprietà:

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$

$$\Downarrow$$

$$R_X(0) = E(X^2)$$

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$$

$$R_X(0) \geq \left| R_X(\tau) \right|$$

✈Per meglio capire il significato della funzione di autocorrelazione, consideriamo il segnale rettangolare di figura:

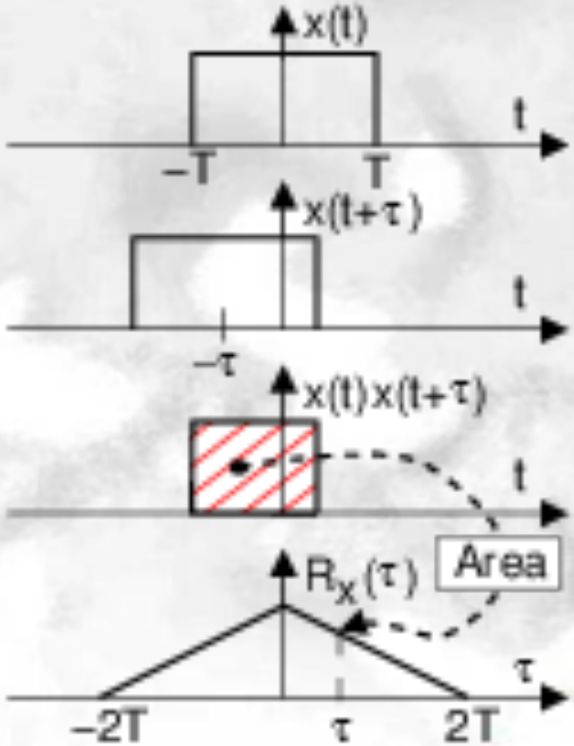
Segnale per $\tau=0$

Segnale per $\tau\neq0$

Prodotto tra i segnali

Funzione di autocorrelazione

$$R_X(\tau) = E(X(t)X(t+\tau))$$



✈Più il picco della funzione di aucorrelazione è pronunciato e più i campioni che sono molto vicini temporalmente non sono correlati tra loro e pertanto il processo stocastico ha <u>una variazione più rapida</u> con il tempo

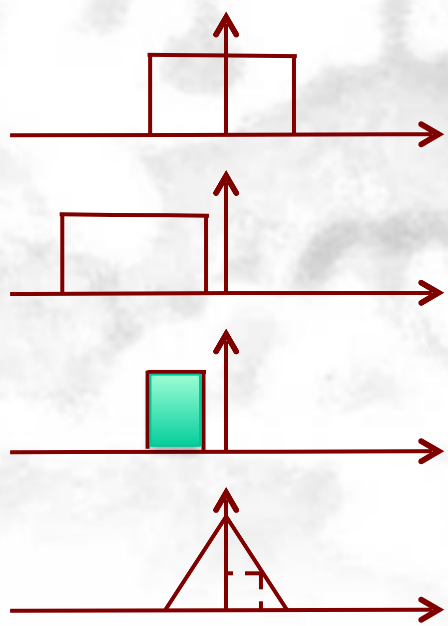
Variazione Rapida | Variazione meno Rapida

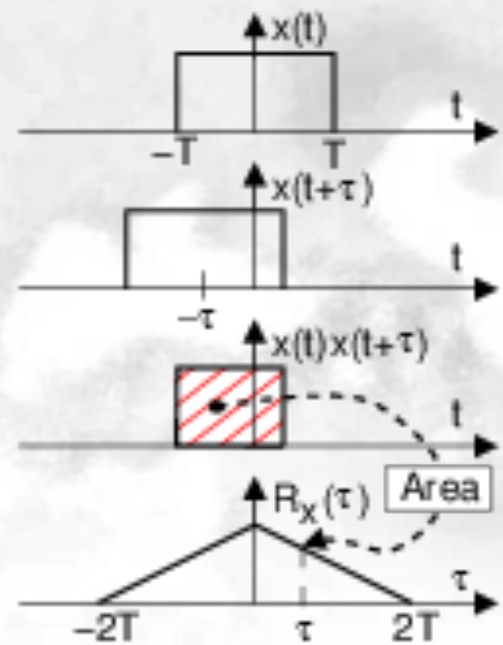
$X(t)$

$X(t+\tau)$

$X(t)X(t+\tau)$

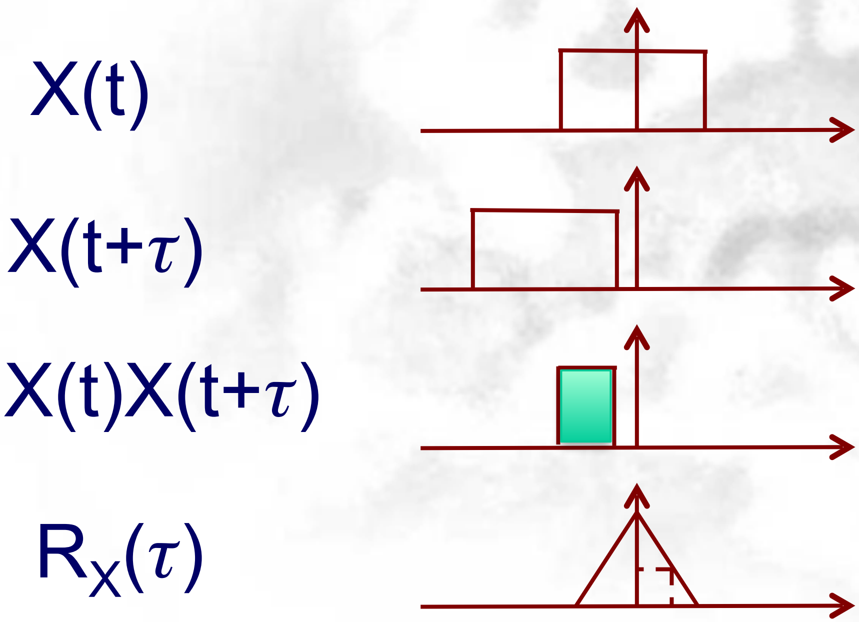
$R_X(\tau)$



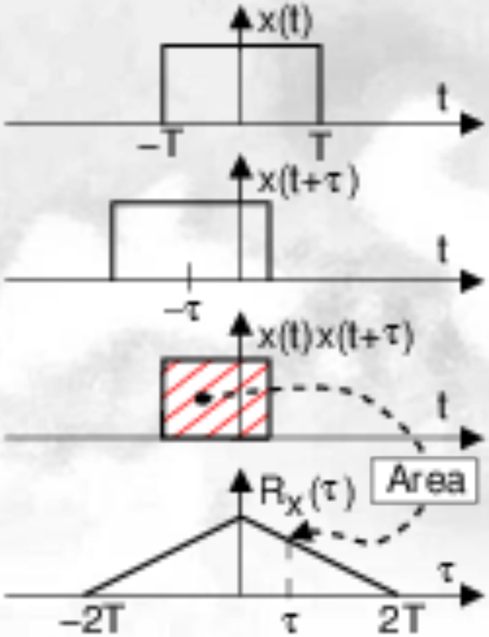


- Quindi se la funzione di autocorrelazione decresce velocemente con τ (caso di figura in rosso) allora il processo varia rapidamente

Variazione Rapida



Variazione meno Rapida



- La **densità spettrale di potenza**, $S_X(j\omega)$, ovvero Power Spectral Density (PSD) è la Trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, infatti:

$$S_X(j\omega) = \Im(R_X(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Trasformata di Fourier

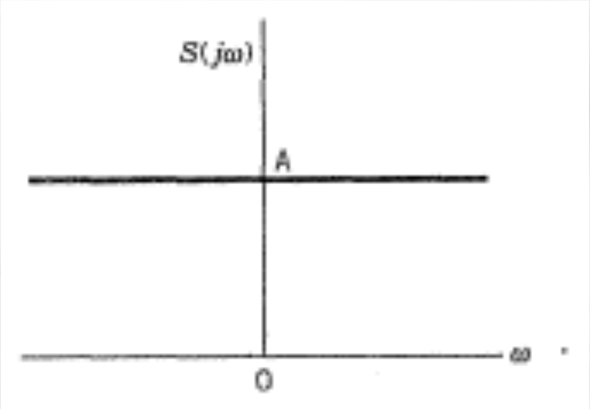
Dove ω è la frequenza angolare in relazione con la frequenza lineare *f* infatti: $f = 2\pi\omega$

✈L'anti trasformata di Fourier della **densità spettrale di potenza**, $S_X(j\omega)$, è pertanto la funzione di autocorrelazione, infatti dalla definizione si fa:

$$R_X(\tau) = \mathfrak{I}^{-1}(S_X(j\omega))$$

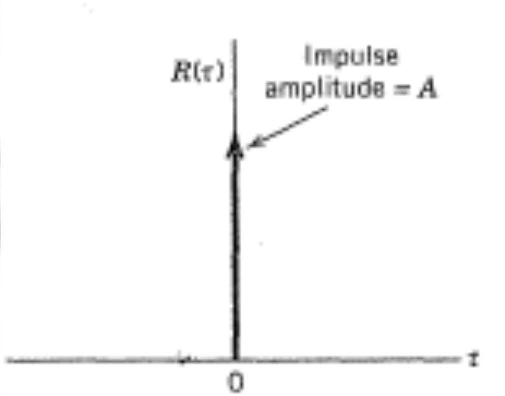
Rumore Bianco

✈**Rumore Bianco*** è un processo stocastico stazionario con densità spettrale di potenza costante (pari ad A) e cioè;



$$S_X(j\omega) = A$$

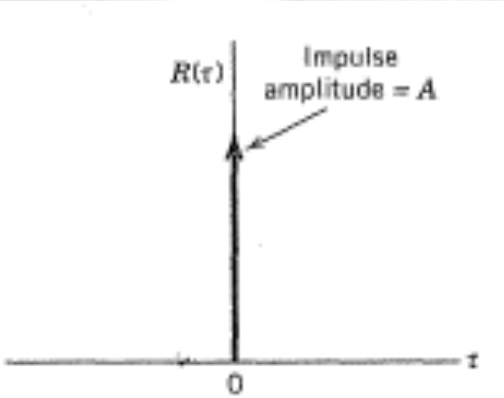
Anti trasformando si ha:



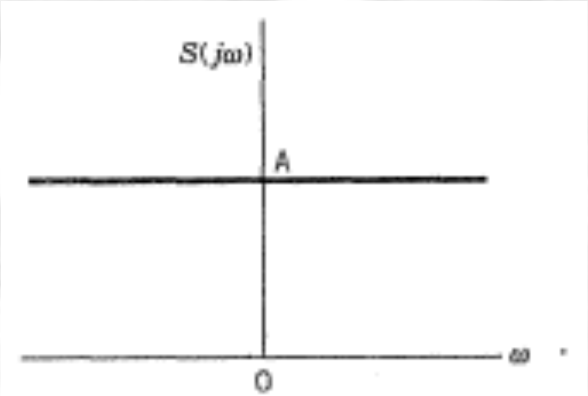
$$R_X(\tau) = \Im^{-1}(S_X(j\omega)) = A\delta(\tau)$$

*Questo termine *bianco* deriva dalla definizione, in ottica, di luce bianca cioè onda elettromagnetica che contiene **tutte** le frequenza

- **Data la formulazione del Rumore Bianco** possiamo dire che ad esso si associa un rumore (ideale) con potenza infinita (PSD costante in frequenza) e che varia con velocità infinita (autocorrelazione uguale alla delta di Dirac)

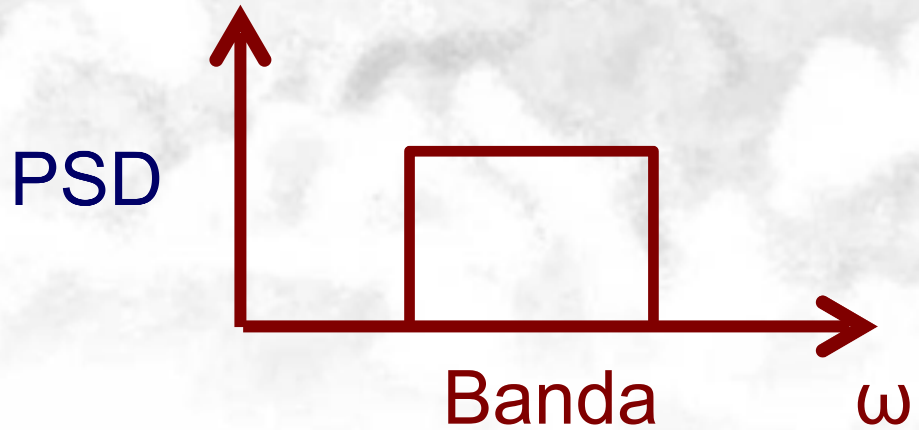


Funzione di Autocorrelazione



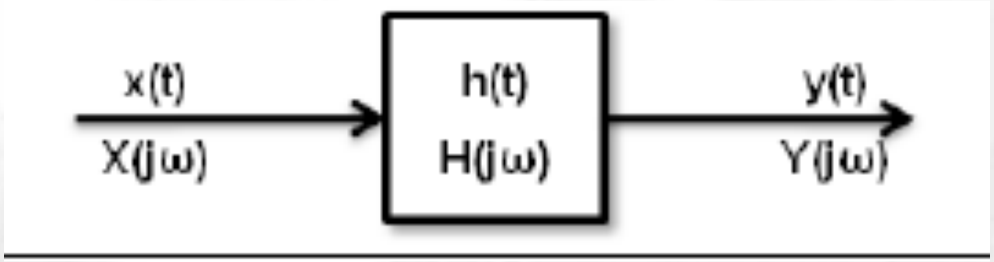
Densità Spettrale

- Anche se fisicamente impossibile da realizzare il rumore bianco è molto utile perché permette di approssimare rumori bianchi in bande *limitate.*
- Cioè la funzione PSD è costante sono in un intervallo di frequenze e zero altrove



Importanza del Rumore Bianco

- Indichiamo con y un processo stocastico, con trasformata di Fourier Y(jω), uscita di un sistema lineare del tipo:



Sistema Lineare

Dove.
x(t) è un processo stocastico di input con trasformata di Fourier X(jω)
e H è una *shaping* matrix che trasforma x in y

$$y(t) = h(t)x(t)$$

- Le relazioni tra le PSD del processo di ingresso, e cioè $S_X(j\omega)$, e del processo di uscita, e cioè $S_Y(j\omega)$, del sistema lineare è:

$$S_Y(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)S_X(j\omega) = |H|^2 S_X(j\omega)$$

- Se il segnale di ingresso è un rumore bianco con PSD costante uguale ad 1:

$$S_X(j\omega) = 1$$

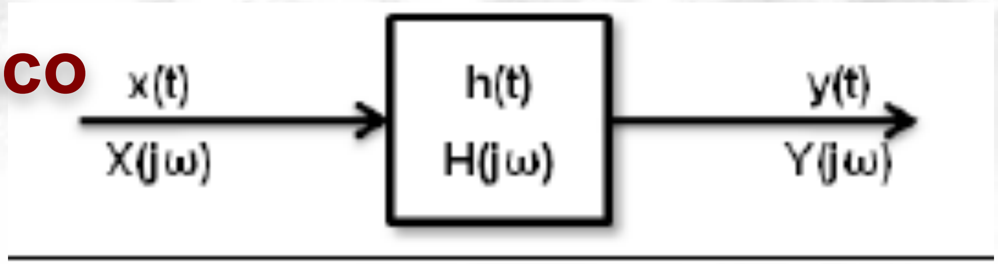
La PSD del segnale di uscita Y dipenderà solo da H

$$S_Y(j\omega) = |H|^2$$

$$S_Y(j\omega) = \left|H\right|^2$$

- Di qui il motivo del termine *shaping* (modellare) in quanto un qualsiasi segnale Y (e cioè caratterizzato da una PSD generica) può essere ottenuto come uscita di un sistema lineare con ingresso un rumore bianco opportunamente modellandolo (e cioè scegliendo in maniera opportuna la matrice H).

Rumore Bianco
PSD = 1

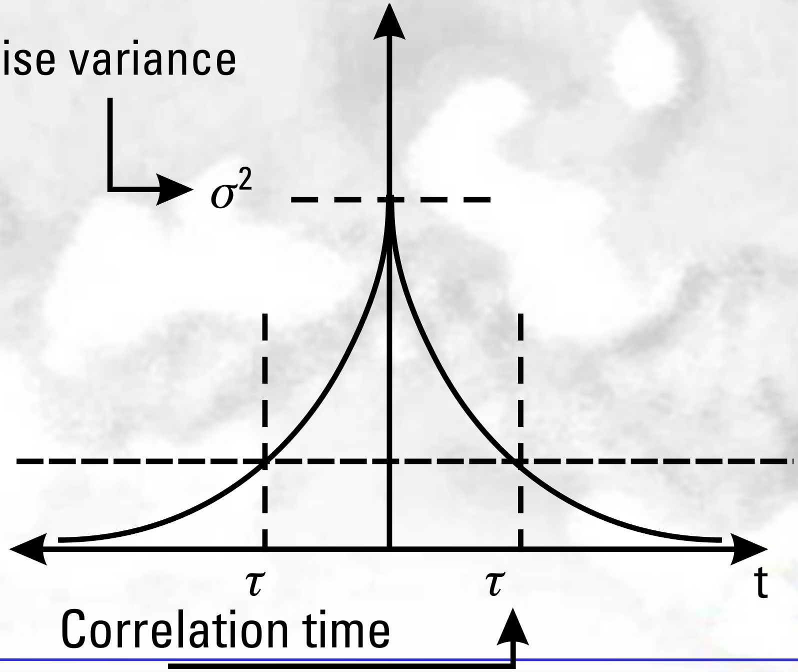


PROCESSO GAUSS-MARKOV

- Il processo di Gauss-Markov $x(t)$ è un processo stazionario con funzione di autocorrelazione esponenziale. Questo meglio approssima l'andamento dei **biad** dei MEMS.
- Pertanto la Funzione di autocorrelazione $R_x(t)$ e la PSD $S_x(j\omega)$ sono:

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|t|}$$

$$S_x(j\omega) = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$



Autocorrelazione

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|t|}$$

PSD

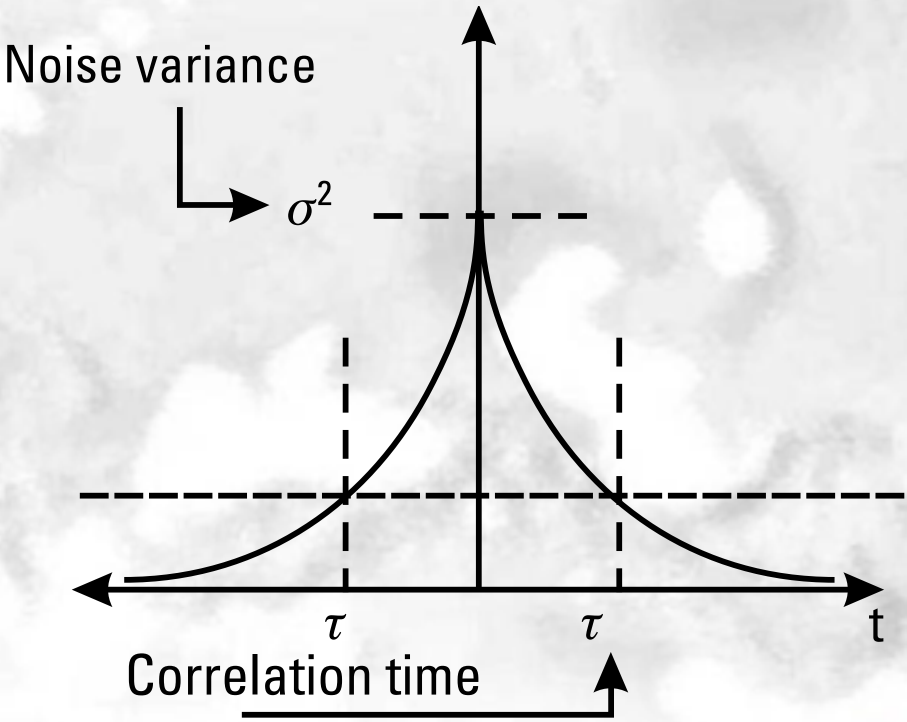
$$S_x(j\omega) = \frac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$

dove:

σ^2 è la *noice variance* (massimo della funzione di autocorrelazione)

$\beta = \dfrac{1}{\tau}$ è l'inverso della costante di tempo τ.

τ si calcola come valore di t corrispondente a $R_x(\tau) = \dfrac{1}{e}$



- Il processo di Gauss-Markov $x(t)$ può essere ottenuto come uscita di un operatore lineare che ha in ingresso un rumore bianco $w(t)$

$$w(t) \longrightarrow \boxed{\text{Shaping filter}} \longrightarrow x(t)$$

$S_w(jw) = 1$

$S_x(jw)$ $\quad S_x(j\omega) = \dfrac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$

$R_w(\tau) = \delta(\tau)$

$R_x(\tau)$ $\quad R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|t|}$

- operatore lineare (Shaping Filter) tale che:

$$h(t) \longrightarrow H(s) = \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s + \beta}$$

time — Laplace Domain

- Noto $H(s)$ $\quad H(s) = \dfrac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}$
- e considerato che: $\quad x(s) = H(s)w(s)$ $\quad$ Laplace Domain
- si ha: $\quad x(s) = \dfrac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta}w(s)$

Laplace Domain

$$x(s) = \frac{\sqrt{2\sigma^2\beta}}{s+\beta} w(s) \quad \Rightarrow \quad sx(s) + \beta x(s) = \sqrt{2\sigma^2\beta}\, w(s)$$

Time Domain

- si ha: $\dot{x}(t) = -\beta x(t) + \sqrt{2\sigma^2\beta}\, w(t)$