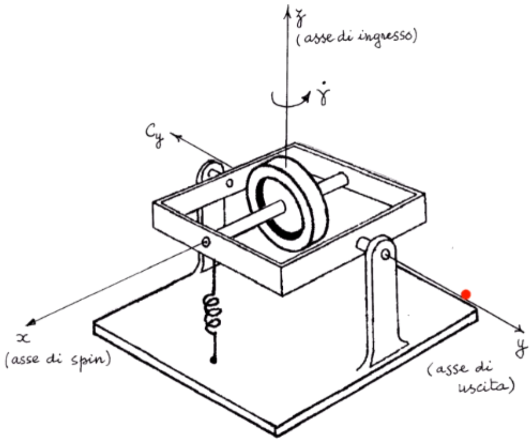
Giroscopio ad un grado di libertà

Si consideri un giroscopio avente un grado di libertà e cioè vincolato al suo asse *x* (di spin) mediante un unico anello che permette le rotazioni solo intorno ad un asse y ortogonale all'asse di spin. Se attorno ad un asse z, perpendicolare al piano x-y, (detto di ingresso) si pone forzatamente in rotazione il sistema, nascerà una reazione del sensore che tenderà, per il parallelismo delle rotazioni, a sovrapporre il suo asse di spin all'asse di ingresso. La rotazione che permetterà questa condizione avverrà attorno all'asse *y* (di uscita) con velocità angolare $\dot{\alpha}$. È possibile misurare la rotazione attorno all'asse di uscita per ottenere una stima della velocità angolare $\dot{\gamma}$ attorno all'asse di ingresso *z* detto anche asse sensibile del sensore. Tuttavia, l'azione di una molla antagonista tenderà a riportare l'asse di spin nella sua posizione iniziale, generando una **coppia di richiamo elastico** $C_\alpha = K_m \alpha$ (diretta lungo *y*) proporzionale allo spostamento angolare avvenuto. Tale coppia, dunque, contrasta la **coppia** $\boldsymbol{C_y}$ che tende a far sovrapporre l'asse di spin all'asse di ingresso ed è diretta verso *-y*.

Supponiamo di immergere il sistema in un fluido. Nasceranno delle **coppie viscose**, proporzionali alla velocità angolare $\dot{\alpha}$: $C'_\alpha = K_v \dot{\alpha}$ diretta lungo *y*.



Tutte queste coppie generanno la **coppia di precessione** $I\ddot{\alpha}$ di direzione e verso coincidente con y.

Il sistema sarà in equilibrio quando la risultate delle coppie sarà nulla e quindi considerando che l'unica che ha verso opposto ad y è la coppia di precessione $C_y = H\dot{\gamma}$, si ha:

$$I\ddot{\alpha} + K_v\dot{\alpha} + K_m\alpha = C_y = H\dot{\gamma} \tag{1}$$

Equazione differenziale del secondo ordine che rappresenta la risposta dinamica del sensore all'ingresso, da stimare, $\dot{\gamma}$.

a) Rate Gyro

Si consideri il precedente sistema in assenza di fluido, e cioè: $K_v = 0$. L'equazione (1) diventa:

$$I\ddot{\alpha} + K_m\alpha = H\dot{\gamma} \tag{2}$$

Si ponga che:

1. $\dot{\gamma}(t) = cost.$

2. All'istante $t_0 = 0$ ci si è in una condizione di equilibrio (posizione canonica), e quindi

$$\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$$

Ricordando che:

$$L[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - \dot{f}(0) - sf(0)$$

e supposto che ad $\alpha(t)$ nel dominio del tempo corrisponde $\alpha(s)$ nel dominio di Laplace, trasformando la (2) si ha:

$$s^2 I\alpha(s) + K_m \alpha(s) = \frac{H\dot{\gamma}}{s}$$

$$I\alpha(s)\left(s^2 + \frac{K_m}{I}\right) = \frac{H\dot{\gamma}}{s}$$

Ponendo $\omega_n^2 = \frac{K_m}{I}$ detta **frequenza naturale**:

$$I\alpha(s)(s^2 + \omega_n^2) = \frac{H\dot{\gamma}}{s}$$

$$\alpha(s) = \frac{H}{I}\dot{\gamma}\frac{1}{s}\frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$

Il termine $\frac{1}{s^2+\omega_n^2}$ è la trasformata di $\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}$ mentre $\frac{1}{s}$ nel dominio di Laplace equivale ad un integrazione nel dominio del tempo. Applicando l'antitrasformata:

$$\alpha(t) = \frac{H}{I}\dot{\gamma}\int_0^t \frac{\sin(\omega_n \tau)}{\omega_n} d\tau = \frac{H}{I}\frac{\dot{\gamma}}{\omega_n}\int_0^t \sin(\omega_n \tau) d\tau$$

Si moltiplica e divide per $-\omega_n$ affinchè si ottenga un integrale notevole:

$$\alpha(t) = -\frac{H}{I}\frac{\dot{\gamma}}{\omega_n^2}\int_0^t -\omega_n \sin(\omega_n \tau) d\tau$$

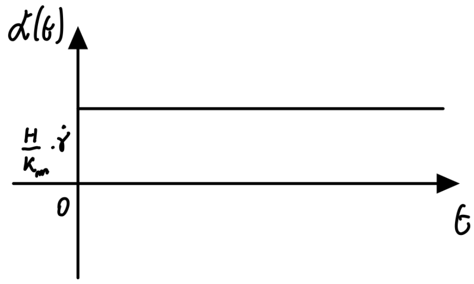
Considerando che $\omega_n^2 = \frac{K_m}{I}$

$$\alpha(t) = -\frac{H}{I}\frac{\dot{\gamma}}{\frac{K_m}{I}}[\cos(\omega_n \tau)]_0^t$$

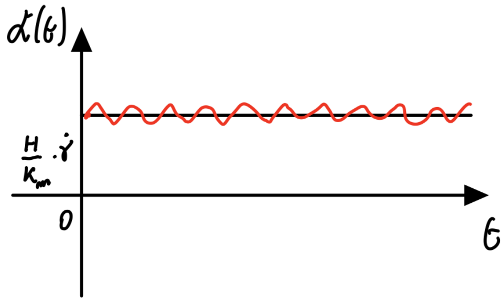
$$= -\frac{H\dot{\gamma}}{K_m}[\cos(\omega_n t) - 1]$$

$$\alpha(t) = \frac{H}{K_m}\dot{\gamma} - \frac{H}{K_m}\dot{\gamma}\cos(\omega_n t)$$

In assenza del secondo termine, quella mostrata in figura seguente è la risposta $\alpha(t)$ del sensore, che reagirà all'applicazione di $\dot{\gamma}$ con una rotazione del suo asse di spin pari a $\frac{H}{K_m}\dot{\gamma}$, nuova posizione di equilibrio dell'asse di spin.



Considerando anche il secondo termine invece la rotazione dell'asse di spin oscillerà intorno a tale posizione di equilibrio.



Trascurando le oscillazioni è possibile stimare l'ingresso $\dot{\gamma}$:

$$\alpha(t) = \frac{H}{K_m}\dot{\gamma} \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{K_m}{H}\alpha(t)$$

Nell'equazione appena scritta, $\alpha(t)$ rappresenta la misura diretta, grazie a cui stimiamo (indirettamente) $\dot{\gamma}$. Il sensore che consente di adempiere tale scopo si chiama **rate gyro**, che stima le velocità angolari.

b) Girometro (o Giroscopio integratore)

Consideriamo un Giroscopio ad un grado di libertà immerso in un fluido, ma privo di molla ($K_m = 0$). Si pone l'ipotesi che stavolta $\dot{\gamma}(t) \neq cost$

$$I\ddot{\alpha}(t) + K_v\dot{\alpha}(t) = H\dot{\gamma}(t)$$

Seguendo gli stessi passaggi logici precedenti e considerando all'istante iniziale $t_0 = 0$: $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$.

Applicando la trasformata di Laplace:

$$s^2 I\alpha(s) + sK_v\alpha(s) = H\dot{\gamma}(s)$$

$$s\alpha(s)I\left(s + \frac{K_v}{I}\right) = H\dot{\gamma}(s)$$

Ponendo $\beta = \frac{K_v}{I}$ definito un **coefficiente di smorzamento**

$$s\alpha(s)I(s + \beta) = H\dot{\gamma}(s)$$

$$\alpha(s) = \frac{H}{I}\frac{\dot{\gamma}(s)}{s}\frac{1}{s+\beta} \qquad (**)$$

Consideriamo la seguente trasformata, per cui vale la scomposizione in fratti semplici:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+\beta)} = \frac{k_1}{s+p_1} + \frac{k_2}{s+p_2}$$

Da $s(s+\beta) = 0 \rightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -\beta \end{cases}$,

Mentre i coefficienti: $\begin{cases} k_1 = F(s)(s+p_1)|_{s=-p_1=0} = \frac{1}{s+\beta}|_{s=0} = \frac{1}{\beta} \\ k_2 = F(s)(s+p_2)|_{s=-p_2=\beta} = \frac{1}{s}|_{s=-\beta} = -\frac{1}{\beta} \end{cases}$

Allora:

$$F(s) = \frac{1}{\beta}\frac{1}{s} - \frac{1}{\beta}\frac{1}{s+\beta}$$

Sostituendo in (**):

$$\alpha(s) = \frac{H}{I}\dot{\gamma}(s)\left(\frac{1}{\beta}\frac{1}{s} - \frac{1}{\beta}\frac{1}{s+\beta}\right)$$

$$\alpha(s) = \frac{H}{I}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\dot{\gamma}(s)}{s} - \frac{1}{\beta}\frac{\dot{\gamma}(s)}{s+\beta}\right)$$

A questo punto si applica l'antitrasformata, ricordando che:

- la divisione per *s* corrisponde ad un integrazione
- e che $\frac{1}{s+\beta} \rightarrow e^{-\beta t}$ da cui si capisce perchè β è detto **coefficiente di smorzamento** in quanto, come si nota dall'esponenziale, all'aumentare del tempo si smorza la risposta dinamica del sensore.

Applicando l'antitrasformata si ha:

$$\alpha(t) = \frac{H}{\beta I}\int_0^t \dot{\gamma}(\tau)d\tau - \frac{H}{\beta I}\dot{\gamma}(t)e^{-\beta t}$$

$$\alpha(t) = \frac{H}{K_v}\int_0^t \dot{\gamma}(\tau)d\tau - \frac{H}{K_v}\dot{\gamma}(t)e^{-\beta t}$$

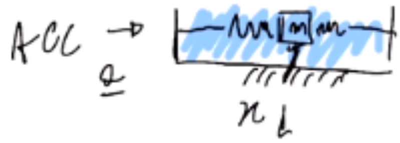
Il secondo contributo a tale risposta: $\frac{H}{K_v}\dot{\gamma}(t)e^{-\beta t}$ è una funzione esponenziale con esponente negativo: all'aumentare del tempo tale funzione tende a zero. Dopo un intervallo di tempo Δt detto **transitorio**, possiamo scrivere:

$$\alpha(t) = \frac{H}{K_v}\int_0^t \dot{\gamma}(\tau)d\tau \rightarrow \int_0^t \dot{\gamma}(\tau)d\tau = \frac{K_v}{H}\alpha(t)$$

$\frac{K_v}{H}$ è detto **guadagno del sensore**.

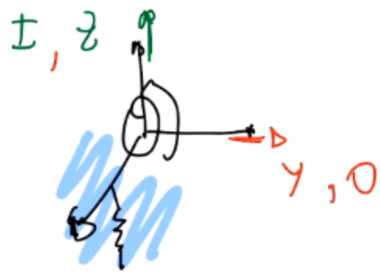
Riepilogando, i sensori IMU trattati sono accelerometri e giroscopi meccanici. Anche l'accelerometro viene immerso in un fluido e si raggiunge l'equilibrio nella seguente condizione:

$$m\ddot{x} + K_v\dot{x} + K_m x = m\underline{a}$$



L'equilibrio del giroscopio si esprime con un'equazione di forma analoga che coinvolge delle coppie, anziché delle forze, in quanto si analizzano delle rotazioni:

$$I\ddot{\alpha} + K_v\dot{\alpha} + K_m\alpha = H\underline{\dot{\gamma}}$$



Possiamo concludere affermando che le risposte dinamiche sono, formalmente, le stesse

Per far si che un sistema IMU possa rilevare i modi tri-dimensionali di un mobile qualsiasi allora i suoi sensori devono misurare, in un sistema solidale al mobile (terna body o anche terna di misura) le tre componenti delle accelerazioni $\underline{a}$ e delle velocità angolari $\underline{\omega}$ che ne caratterizzano il moto. Per tale motivo bisogna che un IMU sia costituito da 3 accelerometri e da 3 giroscopi ad un grado di libertà, con asse sensibile (o di ingresso) parallelo alle 3 direzioni della terna body (o di misura).

Per applicazioni particolari (moti 2-D o superficiali) sarà possibile anche avere solo 2 accelerometri e 2 giroscopi ad un grado di libertà o un giroscopio a 2 gradi di libertà.

~ ~