Risoluzione Equazione Differenziale per lo studio del moto di precessione (fenomeno del parallelismo delle rotazioni)

Si consideri un Rotore (R) ed una Sospensione cardanica (C), quest'ultima costituita da: un anello più interno che materializza l'asse di spin del rotore - xx'; tale anello è vincolato ad un altro anello intermedio, che gli permette di ruotare attorno a yy'; il tutto è vincolato ad un ultimo anello esterno, che materializza il terzo asse di rotazione zz'. Sia l'intersezione dei tre assi il centro di simmetria di R pertanto corpo risulta sospeso e in equilibrio indifferente.

Si consideri R in rotazione intorno all'asse xx', tale asse sarà la direzione dei vettori velocità angolare $\underline{\Omega}$, e momento angolare della quantità di moto, $\underline{H}$.

R avrà così **due gradi di libertà** in quanto vincolato a ruotare in torno a xx' e libero di farlo solo intorno ad yy' e zz'.

Supponiamo che all' t=0 l' SdR materializzato dalla sospensione cardanica $(0,x,y,z)_C$ sia coincidente con un SdR inerziale $(0,X,Y,Z)_i$.

Se al sistema R+C applichiamo una coppia $\underline{C}(C_X, C_y, C_z)$ allora nascerà un moto che osserveremo nell'SdS inerziale (i), definito di precessione, con una velocità angolare $\underline{\omega}(\omega_X, \omega_y, \omega_z)$ regolato dall'equazione differenziale espressa dal principio di conservazione del momento angolare della quantità di moto e cioè:

$$\frac{d}{dt}\underline{L} = \frac{d}{dt}\left(I\underline{\omega} + \underline{H}\right)_i = \underline{C}$$

dove I è il **tensore d'inerzia** , una matrice che ha lungo la diagonale principale i momenti di inerzia del corpo rispetto ai tre assi della terna considerata.

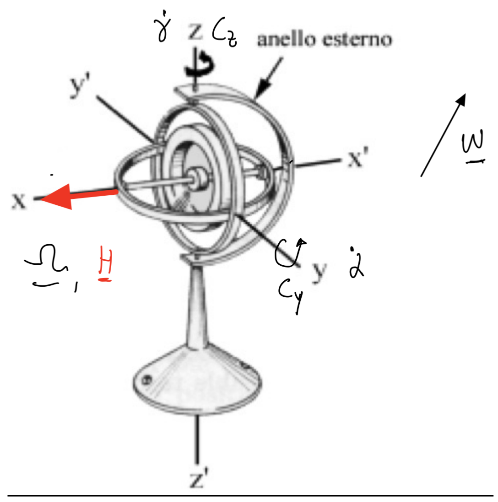
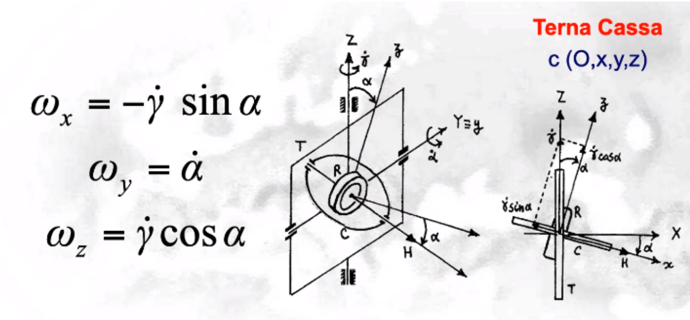


Figura 1

Lungo l'asse X inizialmente coincidente con x trascuriamo il moto di precessione se confrontato con l'elevata velocità angolare $\underline{\Omega}$ con cui mettiamo in rotazione il rotore R e pertanto si consideri solo le componenti lungo gli altri due assi e cioè $\underline{\omega}(0, \dot{\alpha}, \dot{\gamma})$. Il moto di precessione risultante può essere scomposto come la somma dei moti intorno all'asse Y ed all'asse Z. Concentriamoci sul primo moto che avviene con velocità angolare $\dot{\alpha}$ intorno ad Y e che produrrà una rotazione α dell'asse di spin nel piano XZ comportando che l'SdR (c) solidale al sistema R+C non coinciderà più col sistema inerziale (i). Calcoliamo le componenti di $\underline{\omega}$ in questo sistema di riferimento



Applichiamo la linearità dell'operatore derivata al primo membro della (1), si ha:

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i + \frac{d}{dt}(\underline{H})_i = \underline{C}$$

Applichiamo il teorema di Coriolis al vettore $\underline{H}$:

$$\frac{d}{dt}\underline{H_i} = \frac{d}{dt}\underline{H_c} + \underline{\omega} \times \underline{H}$$

Poiché nell'SdR (c) solidale al Rotore $H_c = cost$ e $\frac{d}{dt}\underline{H_c} = \underline{0}$, pertanto:

$$\frac{d}{dt}\underline{H_i} = \underline{\omega} \times \underline{H}$$

Considerando le componenti dei vettori nel SdR (c): $\underline{\omega} = \begin{bmatrix} -\dot{\gamma} sin\alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma} cos\alpha \end{bmatrix}$; $\underline{H_c} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Le ultime due componenti y e z di $\underline{H_c}$ sono nulle in quanto tale vettore è diretto solo lungo l'asse di spin.

Determiniamo il prodotto vettoriale:

$$\underline{\omega} \times \underline{H} = \det\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\dot{\gamma} sin\alpha & \dot{\alpha} & \dot{\gamma} cos\alpha \\ H & 0 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\imath}0 + \hat{\jmath}(H\dot{\gamma} cos\alpha) + \hat{k}(-H\dot{\alpha})$$

$$\underline{\omega} \times \underline{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ H\dot{\gamma} cos\alpha \\ -H\dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Della (1) calcoliamo adesso:

$$\frac{d}{dt}\left[I\underline{\omega}\right] = \frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\gamma}sin\alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma}cos\alpha \end{pmatrix}\right] = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} -I_x\dot{\gamma}sin\alpha \\ I_y\dot{\alpha} \\ I_z\dot{\gamma}cos\alpha \end{bmatrix}$$

Nell'ipotesi di corpo rigido, il momento d'inerzia è costante mentre le velocità angolari $\dot{\alpha}, \dot{\gamma}$ varieranno nel tempo.

Calcolando la derivata temporale otteniamo il vettore accelerazione angolare:

$$\frac{d}{dt}\left[I\underline{\omega}\right] = \begin{bmatrix} -I_x(\ddot{\gamma}sin\alpha + \dot{\gamma}\dot{\alpha}cos\alpha) \\ I_y\ddot{\alpha} \\ I_z(\ddot{\gamma}cos\alpha - \dot{\gamma}\dot{\alpha}sin\alpha) \end{bmatrix}$$

Il principio della conservazione della quantità di moto, allora, diventa:

$$\frac{d}{dt}\underline{L} = \begin{bmatrix} -I_x\ddot{\gamma}sin\alpha - I_x\dot{\gamma}\dot{\alpha}cos\alpha \\ I_y\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma}cos\alpha \\ I_z\ddot{\gamma}cos\alpha - I_z\dot{\gamma}\dot{\alpha}sin\alpha - H\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix}$$

Poiché lungo la direzione *x* prevale la velocità angolare del rotore, consideriamo soltanto le ultime due equazioni:

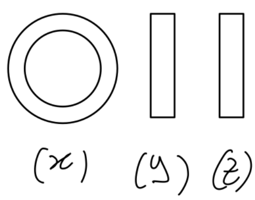
$$\begin{cases} I_y\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma}cos\alpha = C_y \\ I_z\ddot{\gamma}cos\alpha - I_z\dot{\gamma}\dot{\alpha}sin\alpha - H\dot{\alpha} = C_z \end{cases}$$

Quanto scritto si tratta di un sistema di equazioni differenziali del II ordine. Supponendo di studiare tale fenomeno in un intervallo di tempo infinitesimo dt, possiamo affermare che anche le rotazioni in questione saranno infinitesime e pertanto $cos\alpha \to 1$, $sin\ \alpha \to 0$.

Dunque:

$$\begin{cases} I_y\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} = C_y \\ I_z\ddot{\gamma} - H\dot{\alpha} = C_z \end{cases}$$

Considerando che il sistema ha la stessa forma se visto rispetto alle direzioni *y* e *z*, anche I_y e I_z saranno uguali: $I_y = I_z = I$



Le equazioni diventeranno:

$$\begin{cases} I\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} = C_y \\ I\ddot{\gamma} - H\dot{\alpha} = C_z \end{cases}$$

Esse si riferiscono ad un dominio temporale ma, volendo studiare le velocità angolari $\dot{\alpha}, \dot{\gamma}$ integreremo soltanto una volta. Per ottenere ciò, sfruttiamo la trasformata di Laplace. Siano:

$$\dot{\alpha}(s) = L[\dot{\alpha}(t)];\ \dot{\gamma}(s) = L[\dot{\gamma}(t)]$$

Applicando le proprietà della trasformata di Laplace sulle derivate prime e seconde e sulle costanti:

$$\begin{cases} sI\dot{\alpha}(s) + H\dot{\gamma}(s) = \dfrac{C_y}{s} & (*) \\ sI\dot{\gamma}(s) - H\dot{\alpha}(s) = \dfrac{C_z}{s} & (**) \end{cases}$$

Da (*) ricavo:

$$H\dot{\gamma}(s) = \frac{C_y}{s} - sI\dot{\alpha}(s) \rightarrow \dot{\gamma}(s) = \frac{C_y}{Hs} - \frac{sI}{H}\dot{\alpha}(s)$$

Sostituendo in (**):

$$sI\left[\frac{C_y}{Hs} - \frac{sI}{H}\dot{\alpha}(s)\right] - H\dot{\alpha}(s) = \frac{C_z}{s}$$

$$-\frac{I}{H}C_y + \frac{s^2I^2}{H}\dot{\alpha}(s) + H\dot{\alpha}(s) = \frac{C_z}{s}$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano $\dot{\alpha}(s)$

$$\dot{\alpha}(s)\left(\frac{s^2I^2}{H} + H\right) = \frac{I}{H}C_y - \frac{C_z}{s}$$

Si calcola il minimo comune multiplo dei termini in parentesi e lo si porta al denominatore di $\dot{\alpha}(s)$. Al secondo membro, si moltiplica per $\frac{1}{H}$:

$$\frac{\dot{\alpha}(s)}{H}(s^2I^2 + H^2) = \frac{1}{H}\left(IC_y - \frac{C_zH}{s}\right)$$

Semplificando H e mettendo in evidenza I^2 al primo membro:

$$\dot{\alpha}(s)I^2\left(s^2 + \frac{H^2}{I^2}\right) = IC_y - \frac{C_zH}{s}$$

Ponendo $w^2 = \frac{H^2}{I^2}$ e dividendo ambo i membri per I^2:

$$\dot{\alpha}(s)(s^2 + w^2) = \frac{C_y}{I} - \frac{C_z}{s}\frac{H}{I^2}$$

$$\dot{\alpha}(s) = \frac{C_y}{I}\frac{1}{(s^2 + w^2)} - \frac{C_zH}{I^2}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2 + w^2)}$$

Per tornare al dominio del tempo è necessario applicare l'antitrasformata. Guardando l'equazione appena scritta, si nota che si tratta di un'antitrasformata notevole:

$$F(s) = \frac{w}{s^2 + w^2} \rightarrow \sin(wt)$$

$$\frac{F(s)}{s} \rightarrow \int_0^t f(\tau)d\tau$$

In particolare, l'antitrasformata di $\frac{1}{(s^2+w^2)}$ sarà: $\frac{\sin(wt)}{w}$

Antitrasformando:

$$\dot{\alpha}(t) = L^{-1}\left[\frac{C_y}{I}\frac{1}{(s^2+w^2)} - \frac{C_z H}{I^2}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+w^2)}\right]$$

Per la proprietà di linearità:

$$\dot{\alpha}(t) = L^{-1}\left[\frac{C_y}{I}\frac{1}{(s^2+w^2)}\right] - L^{-1}\left[\frac{C_z H}{I^2}\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+w^2)}\right]$$

Portando fuori le costanti:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{I}L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+w^2)}\right] - \frac{C_z H}{I^2}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+w^2)}\right]$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{I}\frac{\sin(wt)}{w} - \frac{C_z H}{I^2}\int_o^t \frac{\sin(w\tau)}{w}\,d\tau$$

In precedenza, avevamo posto $w = \frac{H}{I}$.

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{I}\frac{1}{\frac{H}{I}}\sin(wt) - \frac{C_z H}{I^2 w}\frac{1}{w}\int_o^t w\sin(w\tau)\,d\tau$$

Abbiamo moltiplicato e diviso l'integrale per *w* in modo da ottenere un integrale notevole.

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{H}\sin(wt) - \frac{C_z H}{I^2 w^2}\int_o^t w\sin(w\tau)\,d\tau$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{H}\sin(wt) - \frac{C_z H}{I^2\frac{H^2}{I^2}}\left[-\cos(wt)\right]_0^t$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{H}\sin(wt) - \frac{C_z}{H}\left[-\cos(wt)+1\right]$$

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{C_y}{H}\sin(wt) + \frac{C_z}{H}\cos(wt) - \frac{C_z}{H}$$

Ricavando $\dot{\alpha}(t)$ dalla (**) e sostituendo nella (*) dopo passaggi analoghi si ha:

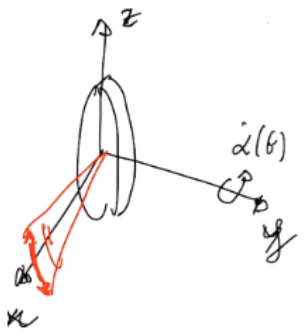
$$\dot{\gamma}(t) = \frac{C_y}{H} + \frac{C_z}{H}\sin(\omega t) - \frac{C_y}{H}\cos(\omega t)$$

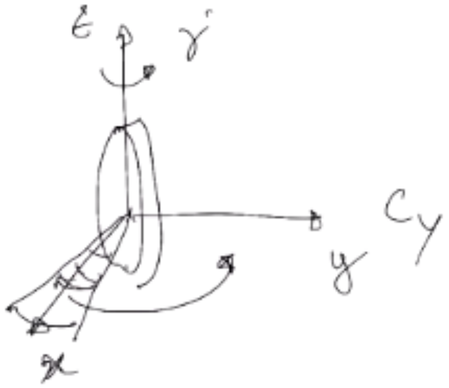
Pertanto i moti risultanti dall'applicazione dalla coppia $\underline{C}$ sono:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -\frac{C_z}{H} + \frac{C_y}{H}\sin(wt) + \frac{C_z}{H}\cos(wt) \\ \dot{\gamma}(t) = \frac{C_y}{H} + \frac{C_z}{H}\sin(\omega t) - \frac{C_y}{H}\cos(\omega t) \end{cases} \quad (1)$$

Abbiamo ottenuto l'espressione della velocità angolare $\dot{\alpha}(t)$ attorno ad *y* (e $\dot{\gamma}(t)$ attorno a *z*) nel dominio del tempo. In entrambe le equazioni i secondi e terzi termini della somma al secondo membro sono moti periodici di ampiezza inversamente proporzionale al momento angolare H. Poiché $\underline{H} = I\underline{\Omega}$

ed essendo $\underline{\Omega}$ di valore elevato, i rapporti che esprimono l'ampiezza dei moti saranno piccoli, per cui avremo dei moti periodici attorno all'asse di spin. Tale fenomeno è noto con il nome di **nutazione**.

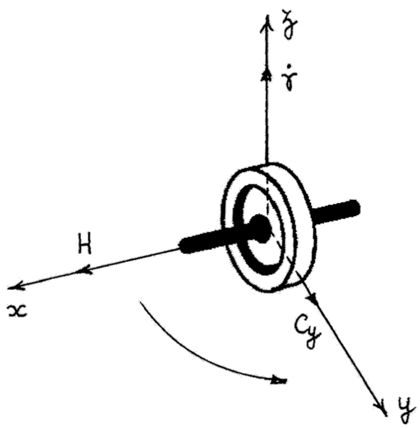


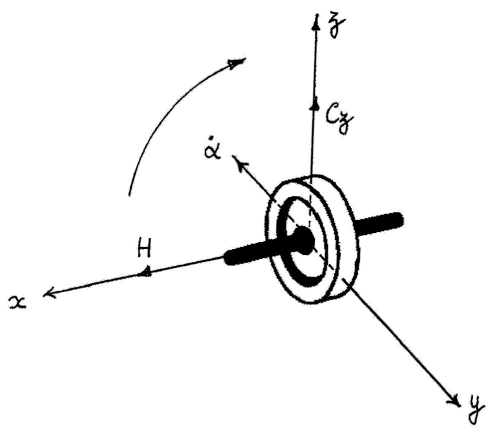


Trascurando il moto di nutazione, si può dire che quando l'asse del giroscopio è libero (due gradi di libertà) e viene applicata una coppia C_y (o C_z) su un asse perpendicolare all'asse di spin (asse d'ingresso), ne deriva una velocità angolare $\dot{\gamma}(t)$ (o $\dot{\alpha}(t)$) intorno all'asse di uscita z (o y) secondo la relazione:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = -\dfrac{C_z}{H} \\ \dot{\gamma}(t) = \dfrac{C_y}{H} \end{cases}$$

detti **moti di precessione** che comportano il fenomeno giroscopico del parallelismo delle rotazioni e cioè l'asse di spin tende ad essere parallelo alla direzione della coppia applicata.





~ ~