NAVIGAZIONE INERZIALE

Navigazione Inerziale

- Come anticipato, nei sistemi inerziali a piattaforma asservita la conoscenza dell'**orientamento** è essenziale;
- infatti sarebbe inutile disporre di accelerometri di elevata precisione se poi non fosse noto, con uguale accuratezza, l'orientamento dei loro assi sensibili rispetto alla terna di riferimento.
- In modo analogo, nei sistemi *strapdown*, si rende necessario conoscere in ogni istante l'orientamento della terna di misura, legata al velivolo, rispetto ad una terna di riferimento e pertanto occorre misurare la velocità angolare dell'aeromobile rispetto alla detta terna.

- Teoricamente il problema potrebbe essere risolto disponendo di una massa di riferimento **perfettamente sospesa rispetto al suo centro d'inerzia** e con velocità angolare inizialmente nulla;

- infatti, **per il principio d'inerzia, la detta massa conserverebbe un orientamento fisso rispetto ad una terna inerziale**.

Navigazione Inerziale

- Purtroppo una minima coppia perturbatrice provocherebbe una deviazione angolare data dalla relazione:

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{C}{I}t^2$$

- in cui:

  C è la coppia perturbatrice;

  I il momento d'inerzia.

- A titolo d'esempio, se $I = 10^2$ cgs, $C = 10^{-2}$ cgs,dopo appena **un minuto** si avrebbe una **deviazione angolare di ben 10°**.

- E' necessario pertanto l'uso di un **giroscopio**.

Navigazione Inerziale

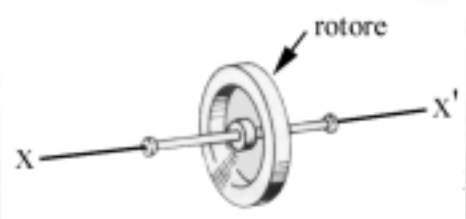
- Per ottenere una buona precisione nell'orientamento occorre che la massa sia animata da una elevata velocità angolare $\underline{\Omega}$ rispetto all'asse di momento d'inerzia massimo;
- Occorre cioè che la massa abbia un elevato MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (o *momento angolare*) definito da:

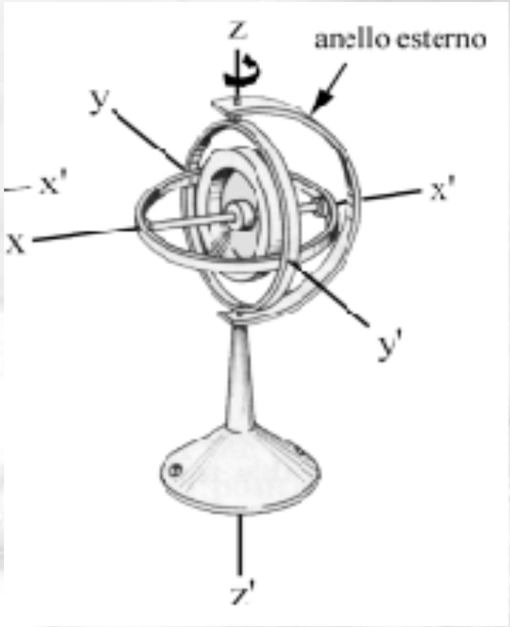
$$\underline{H} = I\underline{\Omega}$$

TEORIA DEL GIROSCOPIO

Strumentazione Giroscopica

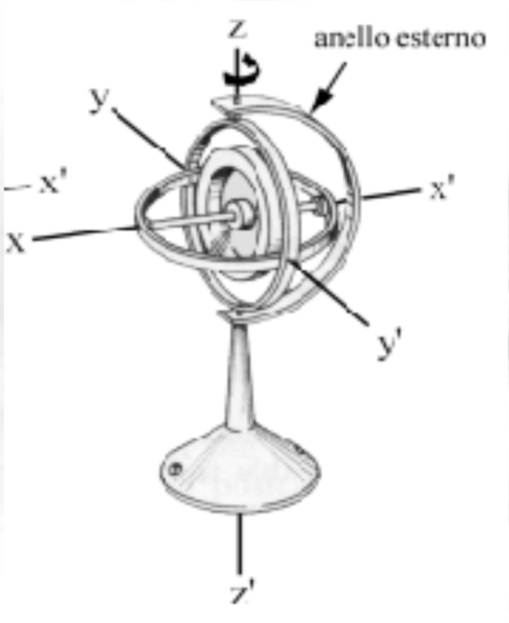
- Un *giroscopio* è costituito da un **corpo solido di rotazione** (***rotore***) dotato di elevata velocità angolare rispetto ad un asse (***asse di spin***) coincidente con l'asse di simmetria del rotore.
- Questo è montato su una **<u>sospensione cardanica</u>** avente la funzione di permettere al suo asse di assumere tutti gli orientamenti possibili nello spazio





il vincolo che il centro di gravità del rotore coincida con l'intersezione dei tre assi della sospensione cardanica.

Quindi a rotore fermo che tipo di equilibrio raggiunge il solido di rotazione in assenza di forze (coppie) esterne

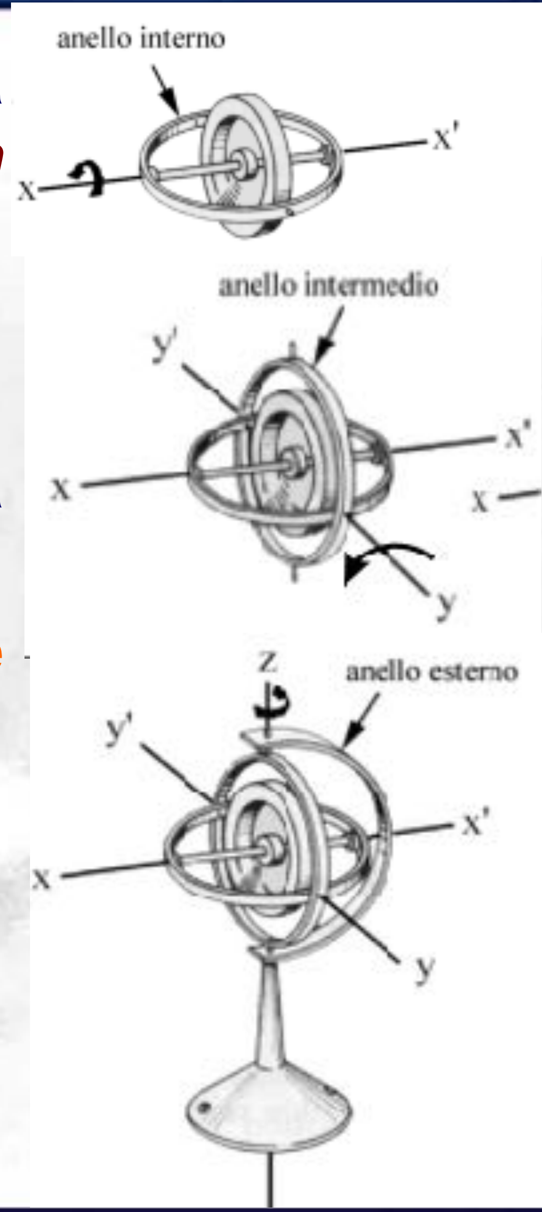


Equilibrio Indifferente

comportandosi cioè come un solido avente un punto fisso e sottratto completamente all'azione della gravità.

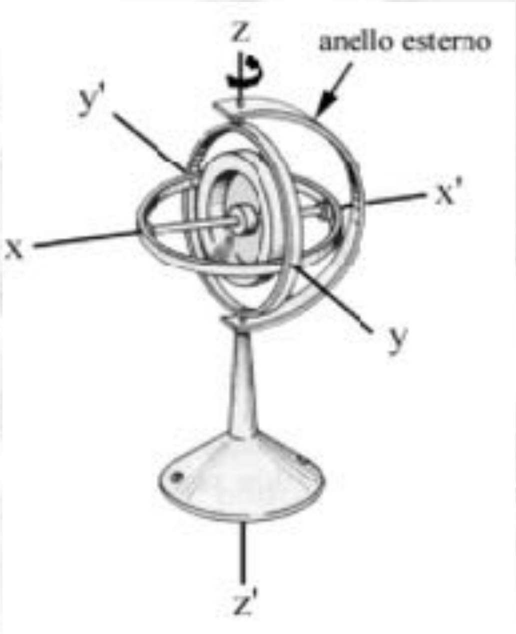
Strumentazione Giroscopica

- La sospensione Cardanica è costituita da **un anello interno che porta l'*asse di spin xx'***,
- **un anello intermedio che permette al giroscopio di ruotare intorno all'asse *yy'***
- da un anello esterno che consente la rotazione intorno all'asse *zz'*
- Il giroscopio, in tal modo, **è completamente libero**.



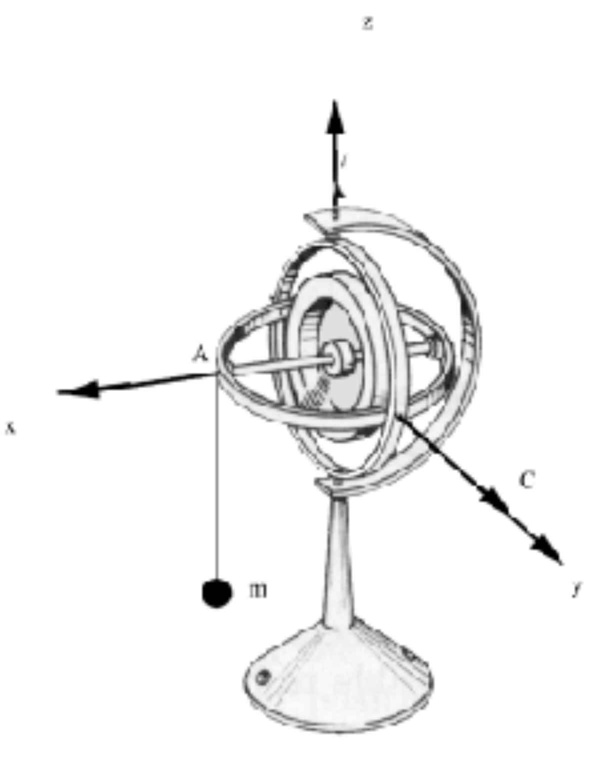
Strumentazione Giroscopica

- Così definito il giroscopio quanti gradi di libertà ha?
- Ha ***due gradi di libertà*** , *se riferito ad un sistema di riferimento ad esso solidare (qual è il sistema oxyz)* non tenendosi conto della rotazione del rotore attorno all'asse di rotazione che costituirebbe il terzo grado di libertà.



Strumentazione Giroscopica

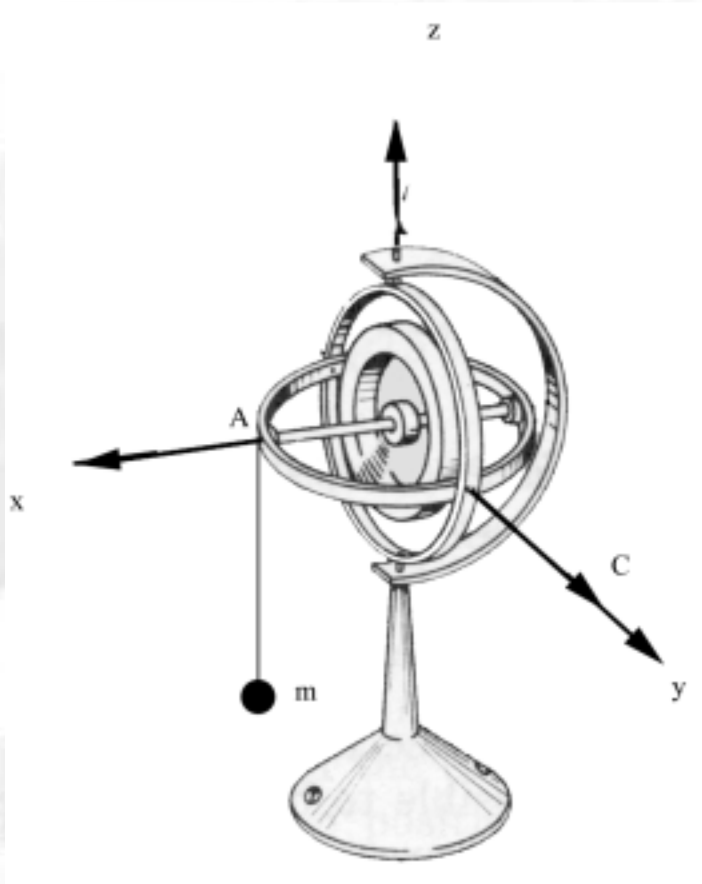
- Avendolo sospeso per il suo centro di massa **se il rotore è fermo**, il giroscopio, disposto in una direzione qualsiasi, la conserva;
- **cioè l'asse di spin punta su una direzione fissa rispetto alla Terra presa come sistema di riferimento**.
- Se poi, sempre a rotore fermo, si dispone l'asse di spin orizzontale e si applica ad una delle sue estremità un pesetto, **si nota come l'asse si inclina raggiungendo una posizione di equilibrio nell'istante in cui il rotore assume la posizione orizzontale.**



Strumentazione Giroscopica

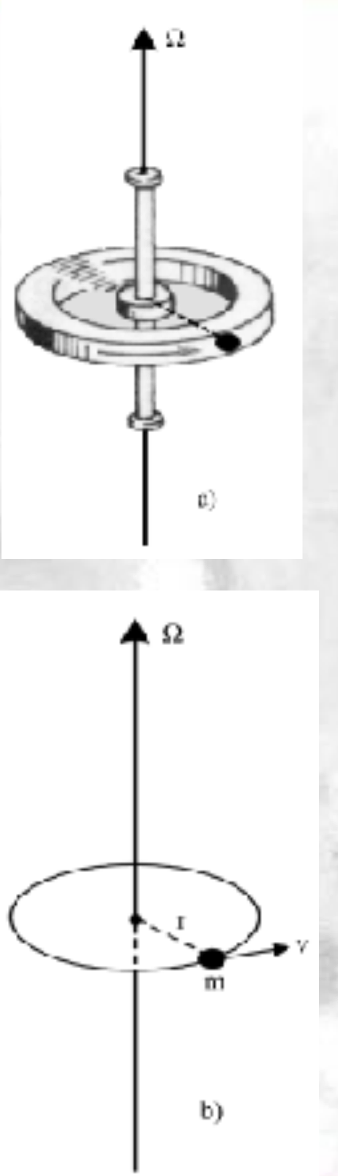
- Tornando al Giroscopio:

  - A rotore fermo (Statore) se applichiamo un pesetto m sull'asse di spin nasce, infatti, una coppia intorno all'asse yy'
  - che si annulla soltanto quando l'asse del rotore si dispone lungo la verticale,
  - Solo in quest'ultima condizione il braccio si annulla



ANALISI DEI FENOMENI GIROSCOPICI

- Per la comprensione dei fenomeni giroscopici è utile premettere alcune nozioni di **Fisica**.
- Si abbia un corpo solido (***rotore***) ruotante ad elevata velocità intorno ad un asse ad esso simmetrico.
- Immaginiamo **di scomporre il rotore in tante masse elementari** .
- Nella figura di fianco viene rappresentata una generica massa *m* posta ad una distanza *r* dall'asse di rotazione.



- Si definisce ***velocità angolare*** Ω della massa *m*, l'angolo che il raggio della circonferenza relativo alla massa descrive nell'unità di tempo.

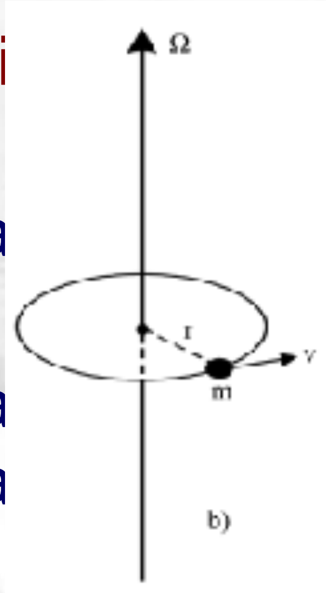
- L'unità di misura è il **radiante al secondo** (sistema SI) anche se, spesso, la velocità angolare viene espressa dal **numero dei giri *n* che la massa compie in un minuto**.

- La velocità angolare in radianti al secondo si può ottenere dalla relazione:

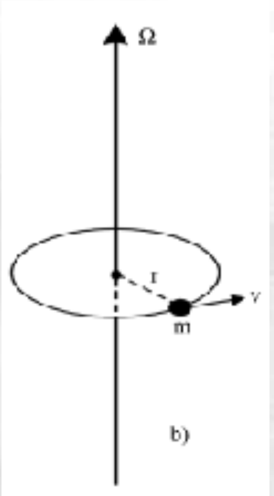
$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$$

- La velocità angolare è una ***grandezza vettoriale***;
- essa, infatti, non può essere definita soltanto da un valore numerico (come, per esempio, il tempo, la massa che sono grandezze scalari) ma anche da una ***direzione*** e da un ***verso***.

- La velocità angolare viene quindi indicata con un segmento orientato (***vettore***) avente:
- come **direzione** quella dell'asse intorno a cui ruota il corpo,
- come grandezza (**modulo**) il valore della velocità angolare espressa in unità SI,
- come **verso** quello tale che una persona con la testa all'estremità del vettore vede ruotare la massa nel senso ***diretto*** o ***antiorario***.
- Da questo momento le grandezze vettoriali verranno simbolicamente indicate con carattere in grassetto (ad esempio $\boldsymbol{\Omega}$ rappresenta il vettore velocità angolare)



La *velocità periferica* ***v*** della massa elementare *m* è, invece, la misura dell'arco percorsa nell'unità di tempo; la direzione è tangenziale alla traiettoria descritta, il verso è tale da poter generare una rotazione anti-oraria (se vista opportunamente) e il suo modulo è legato alla velocità angolare dalla relazione:



$$|\underline{v}| = \Omega r$$

- Il prodotto della massa *m* per la velocità ***v*** viene definita ***quantità di moto*** $\underline{q}$:

$$\underline{q} = m\underline{v}$$

- mentre il prodotto di q per il raggio r definisce il **momento angolare o momento della quantità di moto** e si indica con il simbolo $\underline{H}$**:**

$$\underline{H} = \underline{r} \times \underline{q}$$

- che può anche essere scritto (essendo $\underline{q} \perp \underline{r}$):

$$v = \Omega r$$

$$|\underline{H}| = mr\overset{\downarrow}{v} = mr\Omega r = mr^2\Omega$$

Posto $I = mr^2$

$$\underline{H} = I\underline{\Omega}$$

Tornando al Giroscopio: il rotore, nel suo assieme, una volta messo in rotazione intorno al proprio asse, acquista <u>un momento della quantità di moto $\underline{H}$</u>, rappresentato da un vettore avente la stessa direzione e lo stesso senso di $\boldsymbol{\Omega}$, e come momento di inerzia *I* la sommatoria delle masse elementari che costituiscono il rotore per il quadrato delle loro rispettive distanze: $I = m_1 r^2 + m_2 r^2 + \ldots + m_n r^2$

$$\underline{H} = I\underline{\Omega}$$

- Il parametro *I* esprime il ***momento di inerzia*** che, per un rotore di forma e dimensioni assegnate, è tanto maggiore quanto più grandi sono le **masse dei diversi punti che lo costituiscono** e,
- per un rotore di massa data, **tanto più grande quanto maggiori sono le distanze delle diverse parti del rotore dall'asse di rotazione**.
- Per tale motivo si preferisce dare al rotore la forma ***toroidale*** solido che ha la massa quanto più delocalizzata possibile rispetto l'asse di spin

- Dalla Fisica è noto che **il momento della quantità di moto di un sistema, al quale non sia applicata alcuna coppia esterna, è costante (Principio di conservazione della quantità di moto)**.
- Definizione rigorosa:
- **la derivata del momento della quantità di moto, calcolata rispetto ad una terna inerziale, è uguale al momento C della coppia applicata**

$$\frac{d\underline{H}}{dt} = \underline{C} \qquad \text{se } \underline{C} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = cost$$

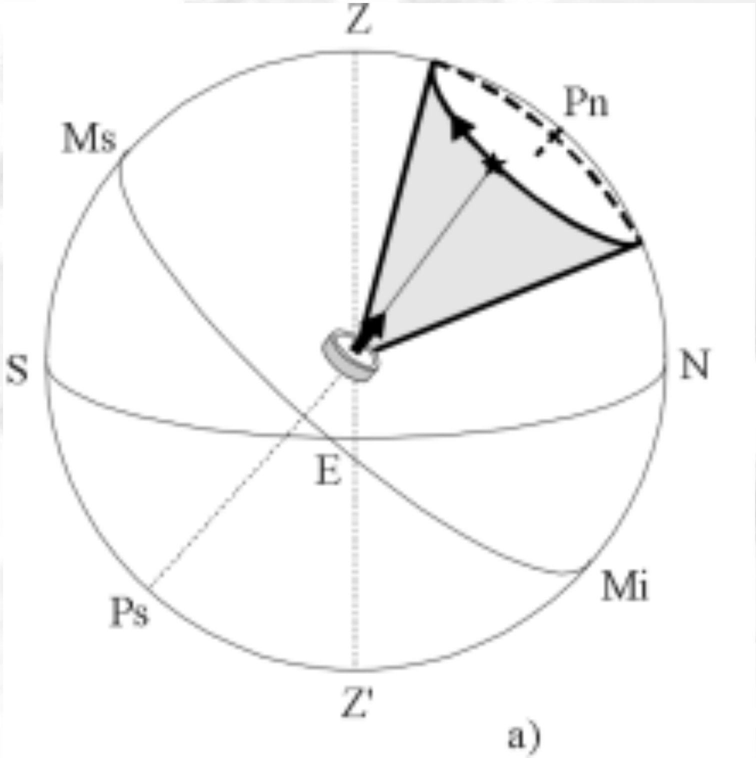
- Esempio di applicazione di questa legge
- Per esempio se **una persona posta su uno sgabello** girevole viene fatta ruotare, la velocità di rotazione diminuisce se il soggetto allarga le braccia, al contrario aumenta se porta le braccia il più vicino possibile all'asse di rotazione.
- Infatti nel primo caso, allargando le braccia, aumenta il momento di inerzia I e, affinché $\boldsymbol{H}$ rimanga costante, deve diminuire $\boldsymbol{\Omega}$; il contrario si ha nel caso opposto

- Le proprietà dei giroscopi, una volta che il rotore è messo in rapida rotazione, dipendono dal *principio di conservazione del momento della quantità di moto* e possono così riassumersi.

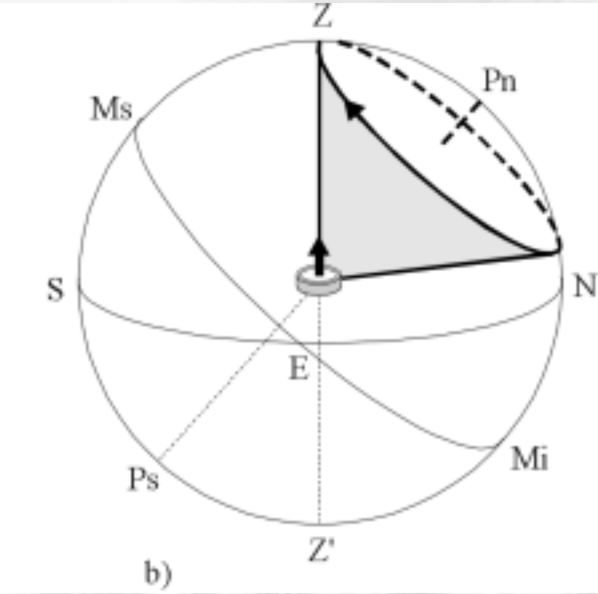
1 - ***Inerzia o rigidità giroscopica***

Disponendo l'asse di spin in una data direzione, ***in assenza di coppie esterne, o anche di coppie interne*** *al sistema dovute, per esempio, a resistenze di attrito dei perni o alla non coincidenza del centro di sospensione con il centro di gravità,* ***esso conserva tale direzione*** *rispetto a una terna di assi orientati sulle stelle fisse (****terna inerziale****).*

- Per esempio, se il rotore viene diretto **su una stella**, l'asse di spin, *a causa della rotazione terrestre*, si muoverà apparentemente **seguendo esattamente il moto apparente della stella**



- In particolare, se inizialmente, in una località di latitudine φ l'asse di spin viene disposto verticalmente, cioè puntato verso lo zenit, nel tempo impiegato dalla Terra a ruotare intorno al proprio asse (un giorno sidereo uguale a 23 h 56 min 04 s pari a 86 164 s),
- si vedrà l'asse del rotore descrivere, *intorno alla direzione del polo celeste elevato*, **un cono la cui semiapertura è uguale esattamente al complemento della latitudine del luogo**.



$$\frac{d\underline{H}}{dt} = \underline{C}$$

Se $\underline{C} \neq \underline{0}$ tendenza al parallelismo delle rotazioni

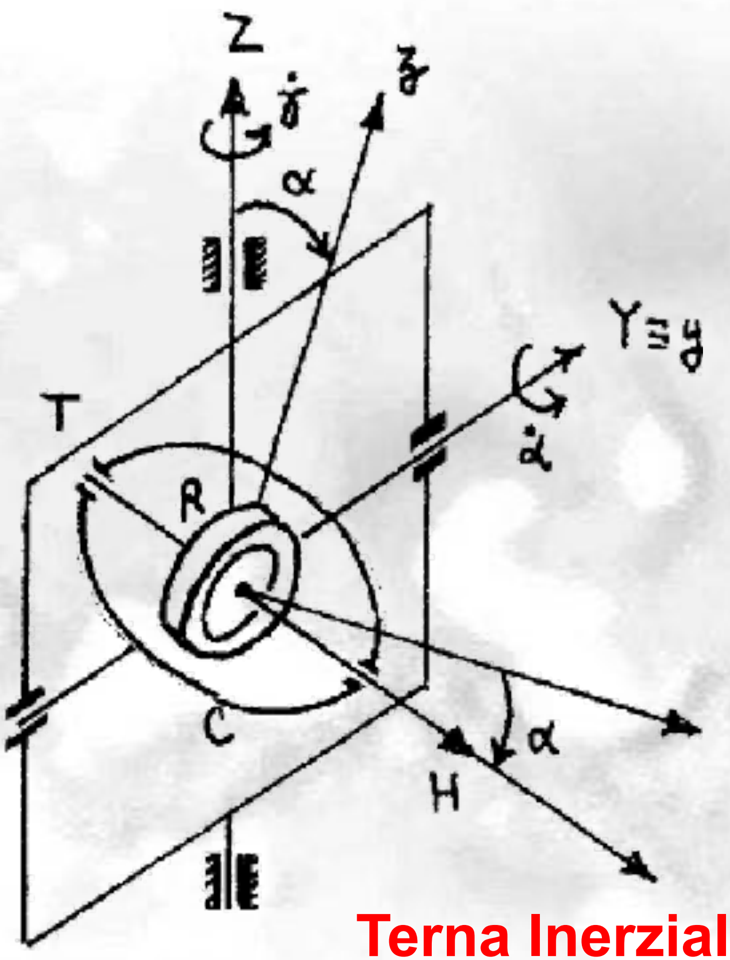
Dimostriamo tale proprietà considerando un Giroscopio a due gradi di libertà

Parallelismo delle Rotazioni
Giroscopio a
Due gradi di Libertà

Giroscopio= Sistema Rotore (R) + Cassa e sospensione cardanica (C)

- Sia R dotato di una elevata velocità angolare $\underline{\Omega}$

- Sia il Sistema R+C in rotazione con velocità angolare $\underline{\omega}$ rispetto un sistema di riferimento inerziale



Terna Solidale

c (O,x,y,z)

Terna Inerziale

i (O,X,Y,Z)

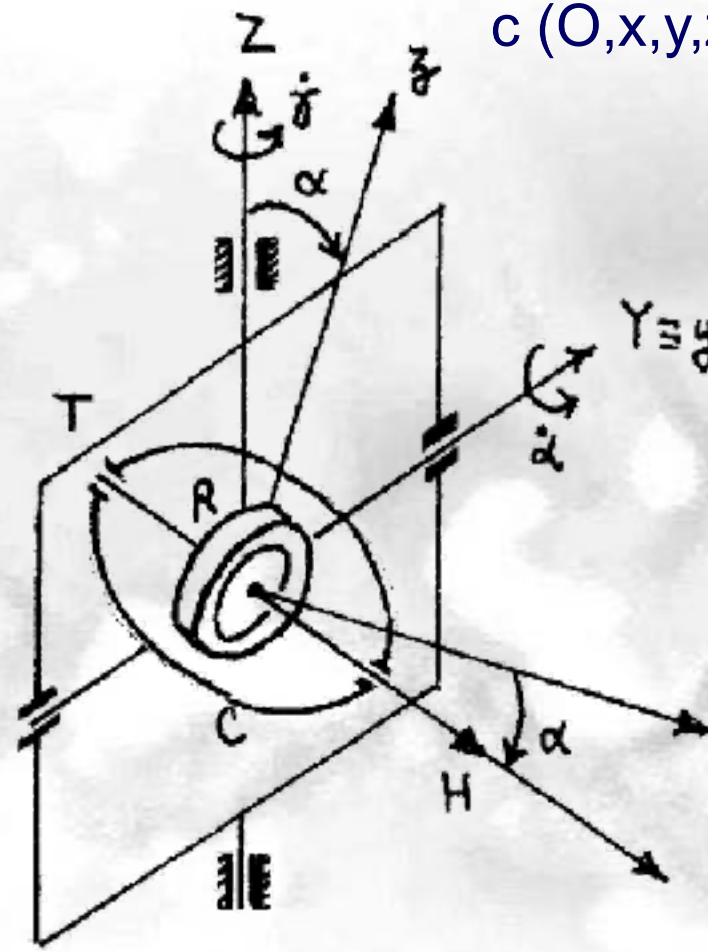
- Essendo R animato dalla velocità angolare $\underline{\Omega}$ allora nascerà una Momento angolare

$$\underline{H} = I\underline{\Omega}$$

- $\underline{H}$ costante rispetto al sistema c

Terna Solidale

c (O,x,y,z)



1. Consideriamo un particolare sistema di riferimento inerziale che abbia y ≡ Y
2. Trascuriamo la componente $\boldsymbol{\omega_X}$ rispetto l'elevata velocità angolare $\underline{\Omega}$

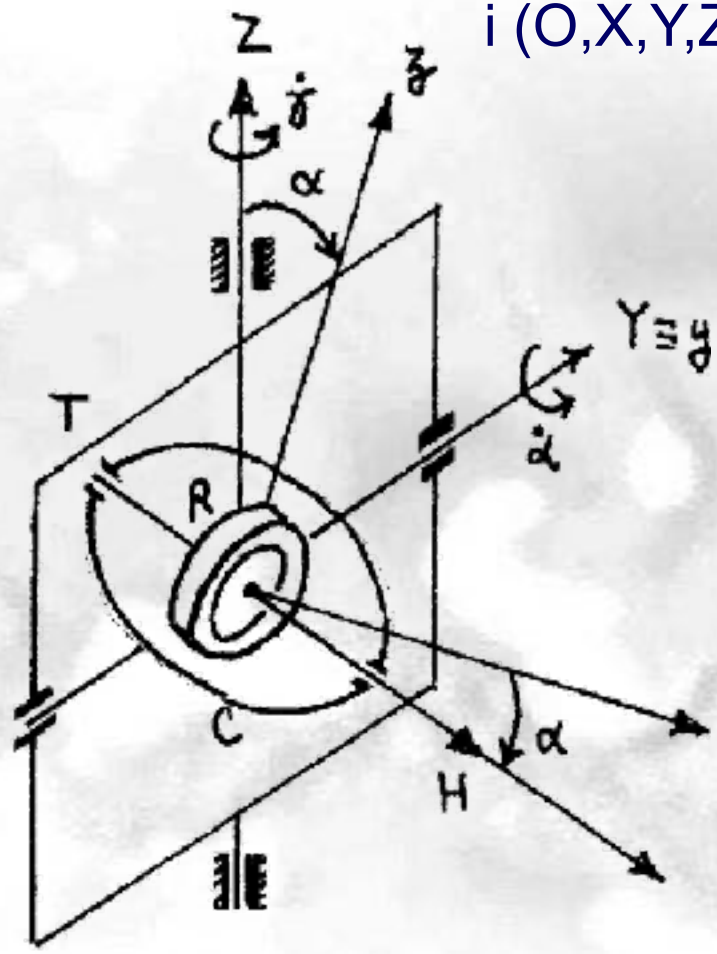
Si avrà pertanto:

$$\omega^i_y = \dot{\alpha}$$

$$\omega^i_z = \dot{\gamma}$$

Terna Inerziale

i (O,X,Y,Z)

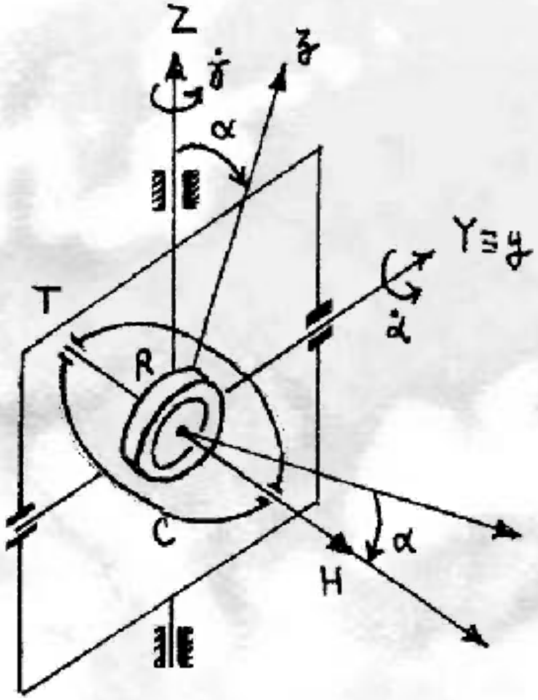


- Calcoliamo le componenti di **ω** rispetto alla terna cassa

$$\omega_x = -\dot{\gamma}\ \sin\alpha$$

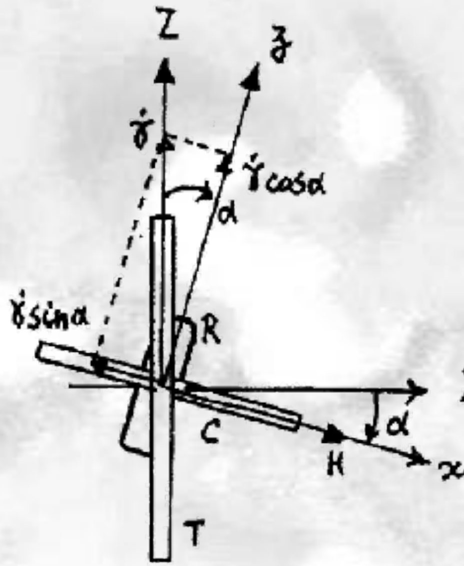
$$\omega_y = \dot{\alpha}$$

$$\omega_z = \dot{\gamma}\cos\alpha$$



Terna Cassa

c (O,x,y,z)



$\omega_x = -\dot{\gamma}\sin\alpha \qquad \omega_y = \dot{\alpha} \qquad \omega_z = \dot{\gamma}\cos\alpha$

Navigazione Inerziale

- Il **momento della quantità di moto (o Momento Angolare)** del sistema R+C:

$$I\underline{\omega} + \underline{H}$$

Momento angolare di R+C per la presenza di $\underline{\omega}$

Momento angolare di R per la presenza di $\underline{\Omega}$

I la matrice (o tensore) d'inerzia dell'insieme R+C

Navigazione Inerziale

- Il tensore d'inerzia è dato dalla matrice:

$$I = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}$$

- essendo I_x, I_y, I_z, i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi principali mentre i termini fuori diagonale rappresentano i prodotti d'inerzia, nulli per la simmetria del sistema rispetto agli assi di riferimento.

- Dal

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega}+\underline{H})_i=\underline{C}$$

momento della quantità di moto dell'insieme giroscopio-cardani

- cioè la derivata del momento della quantità di moto (Gyro+Cardani), *calcolata rispetto ad una terna inerziale*, è uguale al momento $\underline{C}$ della coppia applicata.

Navigazione Inerziale

- Dalla Fisica si ha:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega} + \underline{H})_i = \underline{C}$$

- cioè la derivata del momento della quantità di moto, *calcolata rispetto ad una terna inerziale*, è uguale al momento **c** della coppia applicata.

- Calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{dt}(\underline{H})_i$$

- per il teorema di Coriolis può anche scriversi:

$$\frac{d}{dt}(\underline{H})_i = \frac{d}{dt}(\underline{H})_c + \omega \times \underline{H}$$

- Il primo termine del secondo membro è calcolato rispetto ad una terna solidale alla cassa del rotore e pertanto è nullo in quanto **l'asse di spin è rigido** rispetto alla detta terna e **la velocità angolare è considerata costante**

Navigazione Inerziale

- di conseguenza si ha:

$$\frac{d}{dt}(\underline{H})_i = \omega \times \underline{H}$$

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega} + \underline{H})_i = \frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i + \frac{d}{dt}(\underline{H})_i = \underline{C}$$

da cui:

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega} + \underline{H})_i = \frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i + \omega \times \underline{H} = \underline{C} \qquad (1)$$

Calcoliamo $\omega \times \underline{H}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\dot{\gamma}\sin\alpha & \dot{\alpha} & \dot{\gamma}\cos\alpha \\ H & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + H\dot{\gamma}\cos\alpha\hat{j} - H\dot{\alpha}\hat{k} \qquad (2)$$

Navigazione Inerziale

Calcoliamo $\dfrac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i$

Partiamo da:

$$I\underline{\omega} = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\dot{\gamma}\sin\alpha \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\gamma}\cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_x\dot{\gamma}\sin\alpha \\ I_y\dot{\alpha} \\ I_z\dot{\gamma}\cos\alpha \end{vmatrix}$$

Derivando

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i = \frac{d}{dt}\left(\begin{vmatrix} -I_x\dot{\gamma}\sin\alpha \\ I_y\dot{\alpha} \\ I_z\dot{\gamma}\cos\alpha \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -I_x\ddot{\gamma}\sin\alpha - I_x\dot{\gamma}\dot{\alpha}\cos\alpha \\ I_y\ddot{\alpha} \\ I_z\ddot{\gamma}\cos\alpha - I_z\dot{\gamma}\dot{\alpha}\sin\alpha \end{vmatrix} \quad (3)$$

$\omega \times H = C$

Navigazione Inerziale

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_i + \omega \times \underline{H} = \underline{C}$$

- Proiettiamo la relazione vettoriale precedente sugli assi *y*, *z*, del sistema solidale alla cassa ricordando le (2) e (3) :

Calcoliamo il prodotto vettoriale al I° membro

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_y + (\underline{\omega} \times \underline{H})_y = C_y$$

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_z + (\underline{\omega} \times \underline{H})_z = C_z$$

$$\left(\underline{\omega} \times \underline{H}\right)_y = H\dot{\gamma}\cos\alpha$$

$$\left(\underline{\omega} \times \underline{H}\right)_z = -H\dot{\alpha}$$

Navigazione Inerziale

Calcoliamo le derivate al I° membro

Ricordando che:

$$\omega_y = \dot{\alpha}$$
$$\omega_z = \dot{\gamma}\cos\alpha$$

Si ha:

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_y = I_y\ddot{\alpha}$$
$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_z = I_z\ddot{\gamma}\cos\alpha - I_z\dot{\gamma}\dot{\alpha}\sin\alpha$$

Navigazione Inerziale

Sostituendo quanto determinato:

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_y + (\underline{\omega} \times \underline{H})_y = C_y$$

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_z + (\underline{\omega} \times \underline{H})_z = C_z$$

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_y = I_y\ddot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}(I\underline{\omega})_z = I_z\ddot{\gamma}\cos\alpha - I_z\dot{\gamma}\dot{\alpha}\sin\alpha$$

$$\left(\underline{\omega} \times \underline{H}\right)_y = H\dot{\gamma}\cos\alpha$$

$$\left(\underline{\omega} \times \underline{H}\right)_z = -H\dot{\alpha}$$

Navigazione Inerziale

- di conseguenza :

$$I_y \ddot{\alpha} + H\dot{\gamma}\cos\alpha = C_y$$

$$I_z \ddot{\gamma}\cos\alpha - \dot{\gamma}\dot{\alpha}\sin\alpha - H\dot{\alpha} = C_z$$

- Nell’ipotesi in cui l’angolo α è piccolo ($\cos\alpha = 1$) e trascurando il termine $\dot{\gamma}\dot{\alpha}$ poiché di secondo ordine, si ha:

$$I\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} = C_y$$

$$I\ddot{\gamma} - H\dot{\alpha} = C_z$$

- avendo posto: $I_y = I_z = I$

RISOLUZIONE EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Si veda dispensa
C02_A03_02_IMU_Gyro_Soluzione_equazione_differenziale_v01

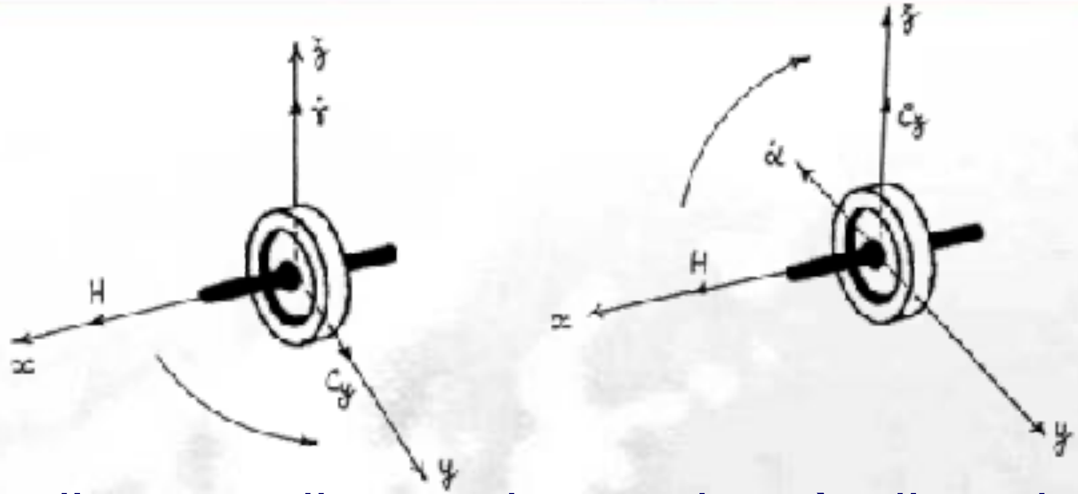
Navigazione Inerziale

$$\dot{\gamma} = \frac{C_y}{H} + \frac{C_z}{H}\sin\omega t + \frac{C_y}{H}\cos\omega t$$

$$\dot{\alpha} = \frac{C_z}{H} + \frac{C_y}{H}\sin\omega t - \frac{C_z}{H}\cos\omega t \qquad (4)$$

- Le velocità angolari C_y/H e C_z/H rappresentano i moti di *precessione* del giroscopio
- mentre i moti periodici di piccola ampiezza ed elevata frequenza sono detti *nutazioni*.

Navigazione Inerziale



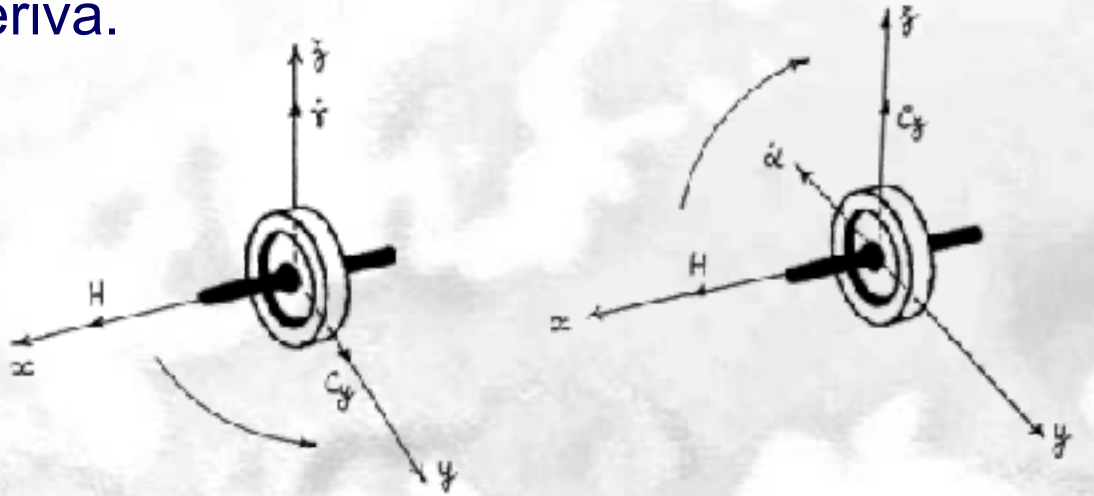
- Trascurando il moto di nutazione, si può dire che quando l'asse del giroscopio è libero (due gradi di libertà) e viene applicata una coppia C_y (o C_z) su un asse perpendicolare all'asse di spin (*asse d'ingresso*), ne deriva una velocità angolare $\dot{\gamma}$ (o $\dot{\alpha}$) intorno all'*asse di uscita* *z* (o *y*) secondo la relazione:

$$\dot{\gamma} = \frac{C_y}{H} \quad \text{o} \quad \dot{\alpha} = \frac{-C_z}{H}$$

Parallelismo delle rotazioni

Navigazione Inerziale

- Sinteticamente si ha: $\underline{C} = \underline{\omega} \times \underline{H}$ (5)
- essendo $\underline{C}$ la coppia applicata e $\underline{\omega}$ la velocità di precessione che ne deriva.



- La regola per stabilire il verso del moto di precessione è la seguente: il vettore $\underline{H}$ tende a sovrapporsi alla coppia $\underline{C}$ questa proprietà è nota sotto il nome di

tendenza al parallelismo delle rotazioni.

Navigazione Inerziale

- Nel caso in cui venga applicata soltanto la coppia

$$C_y = C \ , \ C_z = 0$$

- si ha: $$\dot{\gamma} = \frac{C}{H}$$

- Dopo un intervallo di tempo *t* si ha un disallineamento dell'asse del giroscopio dato dalla relazione:

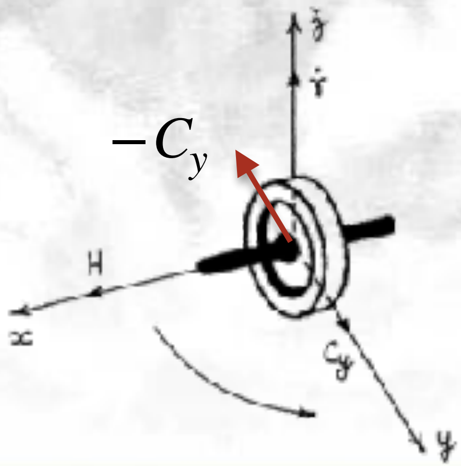
$$\gamma = \frac{C}{I\Omega} t$$

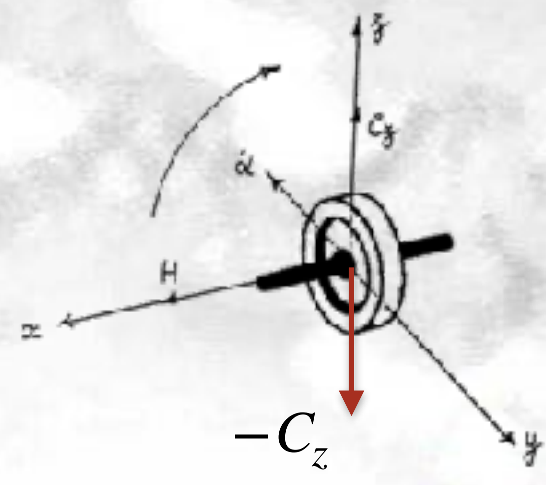
- Di conseguenza, si può verificare che per gli stessi valori di *I* e *C* dell'esempio precedente, per Ω = 24 000 giri al minuto (pari a 2.5 x 10^3 rad/s) si avrebbe una deviazione γ di appena un primo d'arco dopo circa 2 ore.

- In presenza di **coppie indesiderate**, dovute ad attriti o ad altre cause (<u>per esempio alla non coincidenza del baricentro con il centro di sospensione</u>), il giroscopio subisce un lento moto di precessione che viene definito come moto di *deriva*.

- Se, viceversa, si trascina l'asse del giroscopio in un movimento di precessione forzata $\dot{\gamma}$ intorno all'asse *z* (o $\dot{\alpha}$ intorno all'asse *y)* nasce una coppia di reazione uguale e contraria alla coppia esterna C_y (o C_z) che sarebbe in grado di produrre la precessione $\dot{\gamma}$ (o $\dot{\alpha}$).

$$\underline{C}_F = -\underline{C}_L = \underline{H} \times \underline{\omega}$$





Navigazione Inerziale

$$\underline{C}_F = -\underline{C}_L = \underline{H} \times \underline{\omega}$$

- essendo $\underline{\omega}$ la velocità di precessione forzata a cui è sottoposto l'asse di spin e $\underline{C}_F$ la coppia di reazione che ne deriva.
- Anche in questo caso viene confermata la tendenza al parallelismo delle rotazioni, cioè l'asse di spin si muove in modo tale da cercare di sovrapporsi all'asse rispetto al quale è applicata la rotazione forzata.
- Tale principio trova ampia applicazione in navigazione aerea nei giroscopi ad **un grado di libertà**.

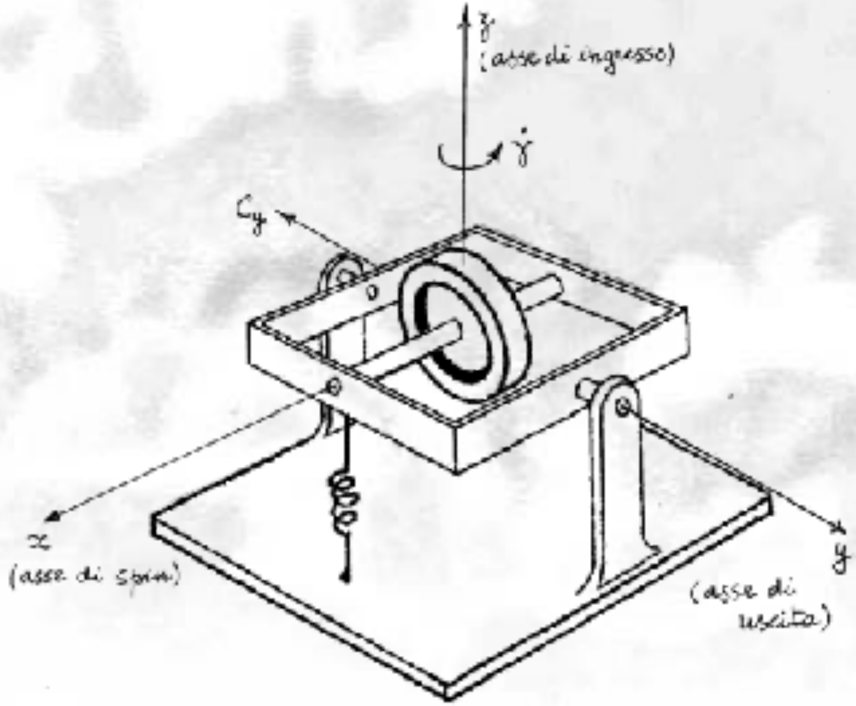
Navigazione Inerziale

- **Un giroscopio a due gradi di libertà,** impiegato nei sistemi a piattaforma asservita, è in grado di evidenziare ogni rotazione di questa intorno agli assi *y* e *z* attraverso dei rivelatori di rotazione (*pickoff*).
- Ovviamente **un tale giroscopio non è sensibile a rotazioni intorno al proprio asse di spin** e pertanto se si vogliono misurare tutte le componenti di una rotazione **è necessario utilizzare due giroscopi con gli assi di spin tra loro ortogonali con la ridondanza di un asse**.

GIROSCOPIO AD UN GRADO DI LIBERTA'

Navigazione Inerziale

- Un notevole interesse in navigazione inerziale hanno anche i giroscopi ad un solo grado di libertà:
- il loro asse di spin è libero di ruotare unicamente intorno all'asse di uscita, per esempio intorno all'asse *y*, o intorno all'asse *z*. In tal caso l'asse *z* o l'asse *y* rappresentano rispettivamente gli assi di ingresso.

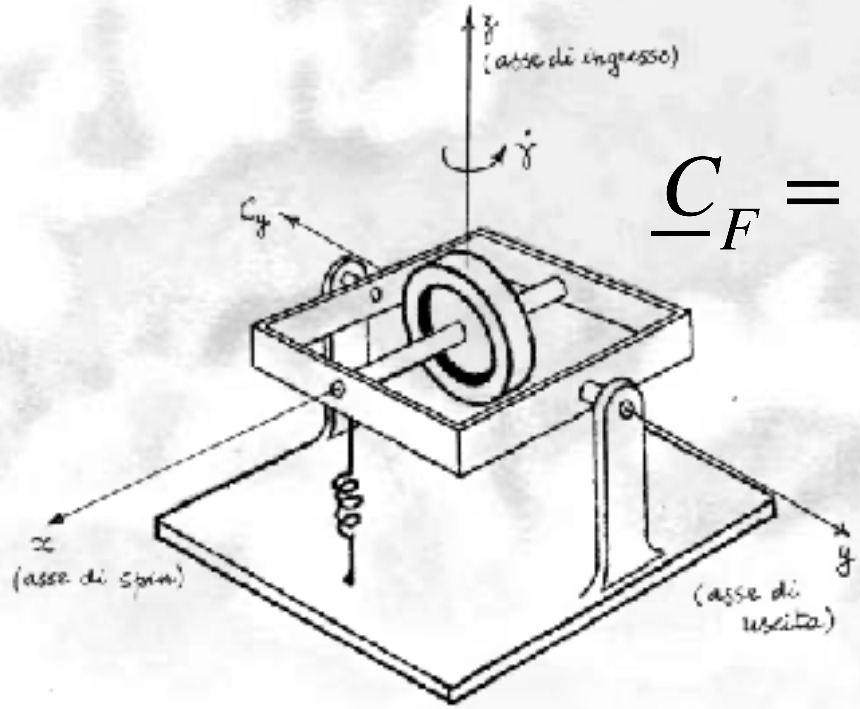


Navigazione Inerziale

- Trascinando in rotazione il sistema intorno all'asse *z* con velocità angolare $\dot{\gamma}$ nasce una coppia di reazione C_y (**precessione forzata**) uguale a:

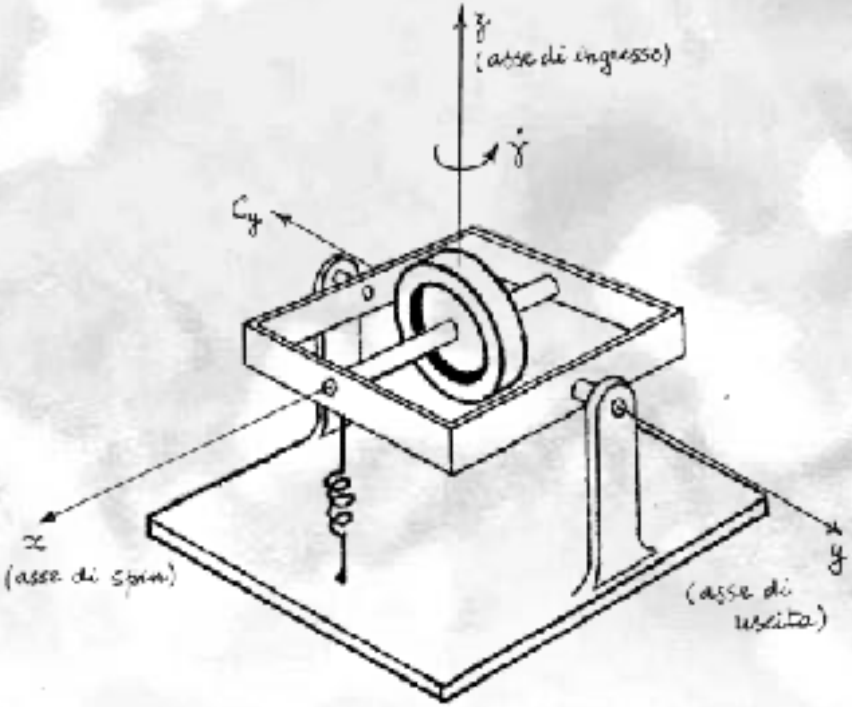
$$C_y = -H\dot{\gamma}$$

- che tende a portare l'asse di spin a sovrapporsi all'asse di ingresso *z*.



$$\underline{C}_F = -\underline{C}_L = \underline{H} \times \underline{\omega}$$

- Nei giroscopi il moto di precessione forzata può essere contrastato da una **coppia di richiamo elastico** (la molla in figura) proporzionale alla rotazione angolare e/o da una coppia di attrito viscoso proporzionale alla velocità angolare; di conseguenza all'asse del giroscopio possono essere applicate le seguenti coppie:

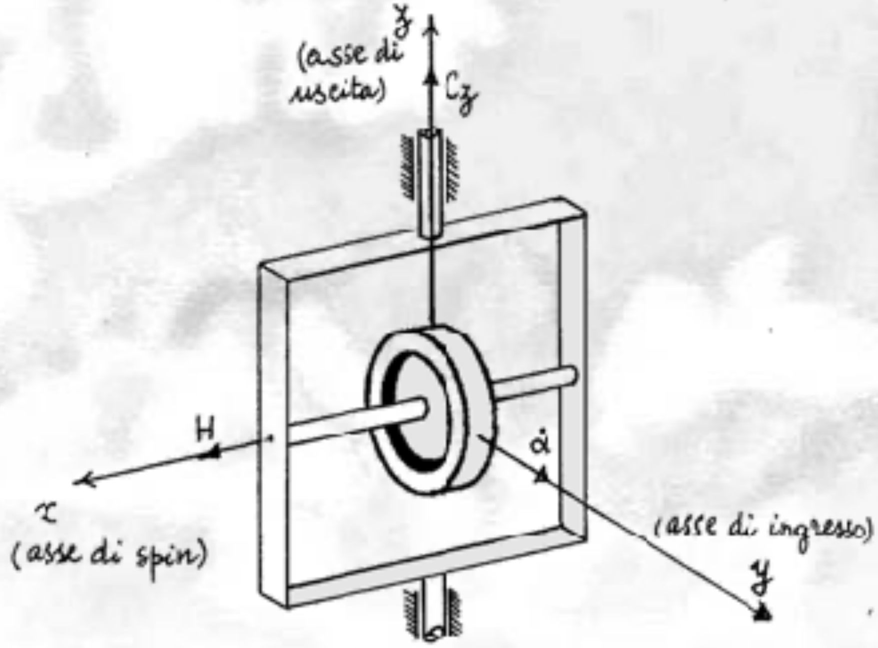


- Coppia di precessione $-H\dot{\gamma}$
- Coppia elastica $K_m\alpha$
- Coppia viscosa $K_v\dot{\alpha}$

Navigazione Inerziale

- **L'equilibrio** si ottiene quando la somma di tali coppie e della coppia d'inerzia $I\ddot{\alpha}$ (essendo I *il momento d'inerzia del sistema rotore-anello rispetto all'asse y* e $\ddot{\alpha}$ l'accelerazione angolare) è nulla; si ha:

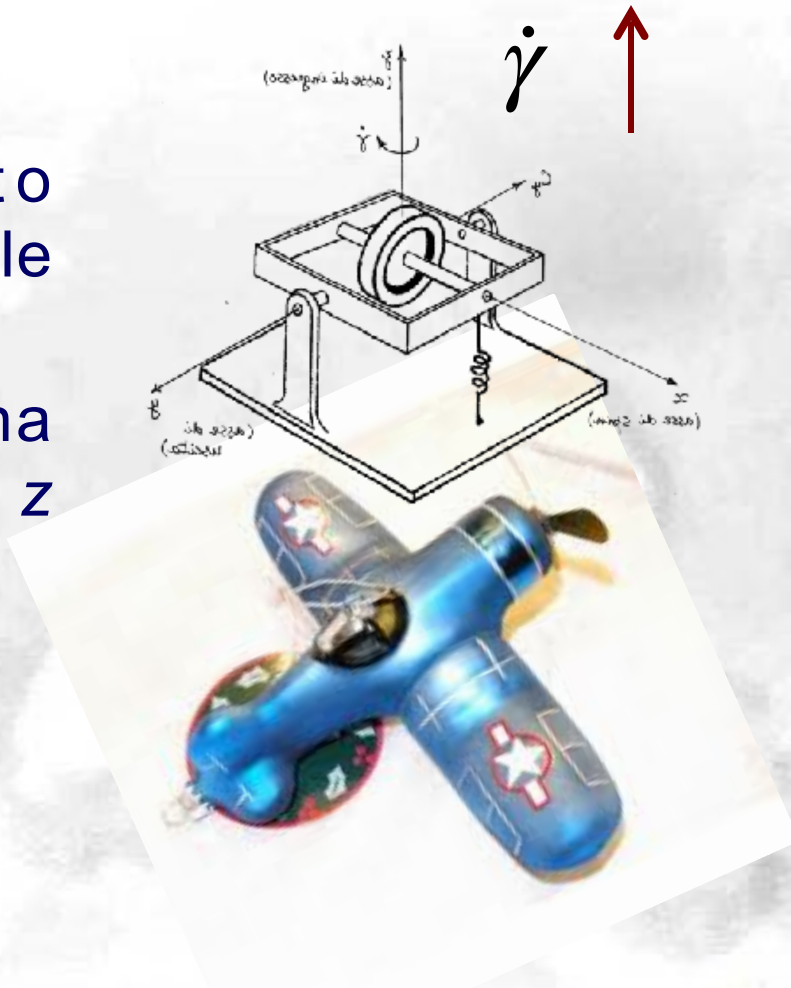
$$I\ddot{\alpha} + K_v\dot{\alpha} + K_m\alpha = H\dot{\gamma} \quad (6)$$



RATE GYRO

Navigazione Inerziale

- Un esempio di giroscopio ad un solo grado di libertà è dato dall'indicatore di virata



Il cui asse di spin è posto parallelamente all'asse trasversale dell'aereo;

Supponiamo la presenza di una velocità angolare intorno all'asse *z* (*imbardata*).

Navigazione Inerziale

- Consideriamo l'azione di una sola coppia elastica

- la (6) diventa:

$$I\ddot{\alpha} + K_m\alpha = H\dot{\gamma}$$

RISOLUZIONE EQUAZIONE DIFFERENZIALE
RISPOSTA DINAMICA DEL SENSORE

- Dopo un transitorio di pochi millesimi di secondo si ha:

$$\alpha = \frac{H}{K_m}\dot{\gamma} \quad (7)$$

- cioè l'angolo di deflessione è funzione della velocità angolare di virata $\dot{\gamma}$.
- Un tale giroscopio è detto *girometro* o *rate-gyro*.

GIROSCOPIO INTEGRATORE
(Girometro)

- I giroscopi per la navigazione inerziale sono invece smorzati da una coppia $K_v\dot{\alpha}$ che può essere ottenuta dalla presenza di un liquido ad elevato coefficiente di viscosità;

$$I\ddot{\alpha} + K_v\dot{\alpha} + K_m\alpha = H\dot{\gamma}$$

$$\Downarrow$$

$$I\ddot{\alpha} + K_v\dot{\alpha} = H\dot{\gamma}$$

Navigazione Inerziale

- che a regime dà: $$\alpha = \frac{H}{K_v}\int_0^t \dot{\gamma}\,dt$$
- L'angolo di deflessione è proporzionale all'integrale della velocità angolare $\dot{\gamma}$
- per questo un tale giroscopio viene detto ***giroscopio integratore*** (*rate integrating gyro*).
- Il rapporto $\frac{H}{K_v} = G$
- G (*guadagno*) è sempre maggiore di uno in modo da dare a tali giroscopi **elevata sensibilità**, ovvero la **capacità di esaltare piccole rotazioni.**