Richiami sulla trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è uno strumento utile a semplificare e risolvere equazioni differenziali. Sia $f(t)$ una funzione continua nel tempo t ed $s = a + ib$ un numero complesso. La trasformata di Laplace F(s) è una funzione a dominio immaginario data da:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = L[f(t)]$$

Si è passati dalla variabile *t* di dominio reale, alla variabile *s* di dominio complesso mediante un operatore lineare.

La linearità può essere espressa come segue:

a) $L[\alpha f(t)] = \alpha L[f(t)] = \alpha F(s)$
b) $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$

Un'altra proprietà importante riguarda la derivata di una funzione $f(t)$ con $t \in R$ esprimibile come $\frac{df}{dt}$:

c) $L\left[\frac{df}{dt}\right] = L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$

La quarta proprietà riguarda l'integrazione:

d) $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$

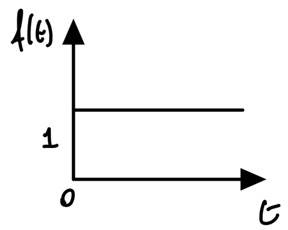
È possibile estendere la proprietà c) applicandola al concetto di derivata seconda:

e) $L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = L\left[\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}f(t)\right] = L\left[\frac{d}{dt}\dot{f}(t)\right] = sL[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s[sF(s) - f(0)] - \dot{f}(0)$

Allora: $L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$

Calcoliamo la Trasformata di Laplace di funzioni notevoli:

- $f(t) = 1$



$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} 1\, e^{-st}dt$$

Moltiplicando e dividendo per $-\frac{1}{s}$ otteniamo un integrale notevole:

$$-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}(-s)e^{-st}dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{+\infty} = -\frac{1}{s}(0) - \left(-\frac{1}{s}\right)e^0 = \frac{1}{s} = L[1]$$

- $f(t) = e^{at}$ (operando allo stesso modo)

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{at-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s-a)} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}\int_0^{+\infty} -(s-a)e^{-t(s-a)} dt =$$

$$= -\frac{1}{s-a}\left[e^{-t(s-a)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}$$

- $f(t) = \sin{(\omega t)}$

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Le Trasformate di funzioni notevoli, considerate solo nel dominio positivo (t≥0) sono di seguito riportate, :

Le funzioni sono indicate di ampiezza unitaria. Per la linearità, è immediato considerare l'eventuale costante moltiplicativa.

Trasformate di funzioni

f(t) ***f(t)u(t)***	***F(s)***
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n (n intero positivo)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sen}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$\mathrm{senh}\, \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

Scomposizione in fratti semplici

Consideriamo F(s) come rapporto tra due polinomi di grado *m* al numeratore e di grado *n* al denominatore:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s_n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Il primo coefficiente del polinomio $D(s)$ è unitario. Ciò non risulta essere un ostacolo in quanto pur avendo $a_n \neq 1$ avremmo potuto ottenere lo stesso tipo di polinomio dividendo tutti i coefficienti per tale termine.

Se consideriamo l'ipotesi che $m < n$ allora:

a) Caso di Radici Reali e distinte

$$F(s) = \sum_i \frac{k_i}{s-p_i} \tag{1}$$

Dove:

- p_i sono gli n-zeri (soluzioni dell'equazione $D(s) = 0$), considerati <u>distinti</u>, del polinomio del denominatore: $p_i \in \{1, \dots n\}$;
- $k_i = F(s)(s-p_i)|_{s=p_i}$

In questo modo è possibile scomporre $F(s)$ nella somma di polinomi più "semplici" nel senso che hanno al numeratore dei coefficienti ed al denominatore un polinomio di primo grado.

Se $F(s)$ rappresenta la Trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$, allora la scomposizione permette di calcolare in modo semplice $f(t)$ noto $F(s)$ ed espresso nella forma (1) infatti antitrasformando la (1) e considerando la linearità di questo operatore (inverso di un operatore lineare) si ha:

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\sum_i \frac{k_i}{s-p_i}\right] = \sum_i k_i L^{-1}\left[\frac{1}{s-p_i}\right] \to f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_i k_i e^{p_i t}$$

Esempio 1

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$p_i \to (s+1)(s+2) = 0 \to \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{cases}$$

$$k_i \rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}(s+1)|_{s=-1} = \dfrac{1}{-1+2} = 1 \\ k_2 = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}(s+2)|_{s=-2} = \dfrac{1}{-2+1} = -1 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

Dalla tabella delle trasformate notevoli:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Esempio 2

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s-3)}$$

$$p_i \rightarrow (s+1)(s-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = 3 \end{cases}$$

$$k_i \rightarrow \begin{cases} k_1 = \dfrac{s}{(s+1)(s-3)}(s+1)|_{s=-1} = \dfrac{1}{4} \\ k_2 = \dfrac{s}{(s+1)(s-3)}(s-3)|_{s=3} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-3}$$

~ ~

b) Caso di Radici Reali e coincidenti

Se, invece, $D(s) = 0$ ha soluzioni p_i multiple, come nel seguente caso:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-p)^n}$$

in cui al denominatore abbiamo un polinomio con n-radice uguali e multiple; allora si deve considerare la seguente scomposizione:

$$G(s) = \frac{k_1}{s-p} + \frac{k_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{k_n}{(s-p)^n}$$

Dove:

- p è sempre la radice multipla,
- mentre lo i-esimo coefficiente k_i è dato da:

$$k_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}}[G(s)(s-p)^n]_{s=p}$$

con ovvi significati dei simboli.

Esempio 3

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s-3)^2}$$

Avremo tre radici: una semplice e due multiple.

$$p_1 = -2 \,; p_2 = p_3 = 3$$

Da cui:

$$G(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{k_1}{s-3} + \frac{k_2}{(s-3)^2}$$

Essendo p_1 una radice semplice (non multipla) possiamo determinare A come nel caso precedente, mentre gli altri due:

$$k_1 = \frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[\frac{s+4}{(s+2)(s-3)^2}(s-3)^2\right]_{s=3}$$

$$= \frac{1}{0!}\frac{d}{ds}\left[\frac{s+4}{s+2}\right]_{s=3} = 1\left[\frac{1\,(s+2) - 1(s+4)}{(s+2)^2}\right]_{s=3} = \left[\frac{s+2-s-4}{(s+2)^2}\right]_{s=3} = -\frac{2}{25}$$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-2}}{ds^{2-2}}\left[\frac{s+4}{(s+2)(s-3)^2}(s-3)^2\right]_{s=3} = 1\,\frac{3+4}{3+2} = \frac{7}{5}$$

Allora

$$G(s) = \frac{A}{s+2} - \frac{2}{25}\frac{1}{s-3} + \frac{7}{5}\frac{1}{(s-3)^2}$$

A si determina nel modo precedentemente espresso:

$$A = G(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{s+4}{(s+2)(s-3)^2}(s+2)|_{s=-2} = \frac{-2+4}{(-2-3)^2} = \frac{2}{25}$$

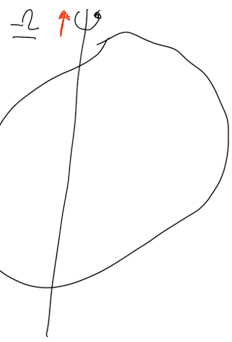
Infine:

$$G(s) = \frac{2}{25}\frac{1}{s+2} - \frac{2}{25}\frac{1}{s-3} + \frac{7}{5}\frac{1}{(s-3)^2}$$

~ ~

Richiami sui giroscopi

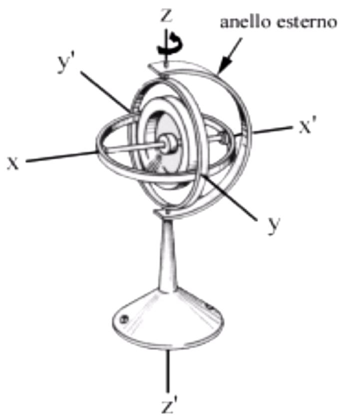
La trasformata di Laplace viene utilizzata per studiare la dinamica dei sensori, i giroscopi in prima analisi. Si definisce giroscopio un solido in rotazione attorno ad un asse, detto **asse di spin** con senso di rotazione espresso dalla freccia in figura. Tale corpo sarà caratterizzato da una velocità angolare $\underline{\Omega}$ avente stessa direzione dell'asse di rotazione e verso dell'osservatore che osserva tale rotazione avvenire in senso antiorario. Quando un corpo è in rotazione nasce il **momento angolare della quantità di moto** $\underline{H} = I\underline{\Omega}$ che è il fautore di tutti i movimenti giroscopici e la sua variazione nel tempo è la risultante delle coppie applicate al corpo: $\frac{d\underline{H}}{dt} = \underline{c}$.



Possiamo distinguere due casi:

- **Inerzia giroscopica** quando $\underline{c} = 0$ da cui si deduce che $\frac{d\underline{H}}{dt} = 0 \rightarrow \underline{H} = \boldsymbol{cost}$ in modulo, direzione e verso. La direzione dell'asse di spin sarà inerzialmente fissa.
- **Parallelismo delle rotazioni** quando $\underline{c} \neq 0$

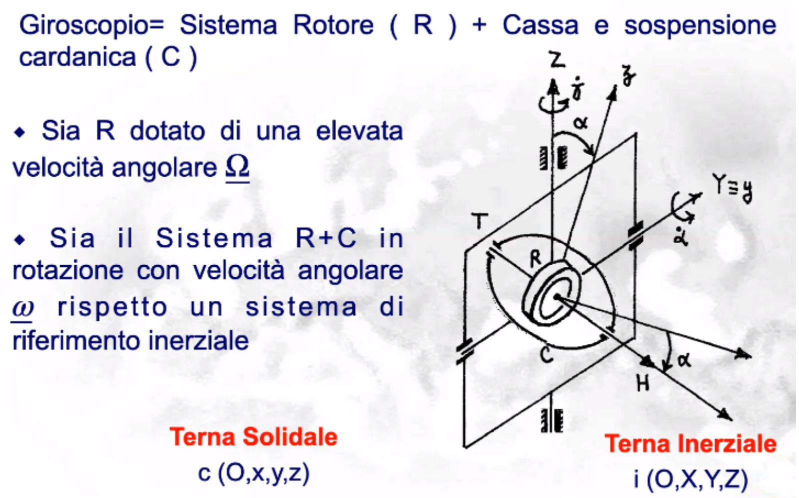
Approfondiamo il concetto di parallelismo delle rotazioni introducendo il concetto di rotore:



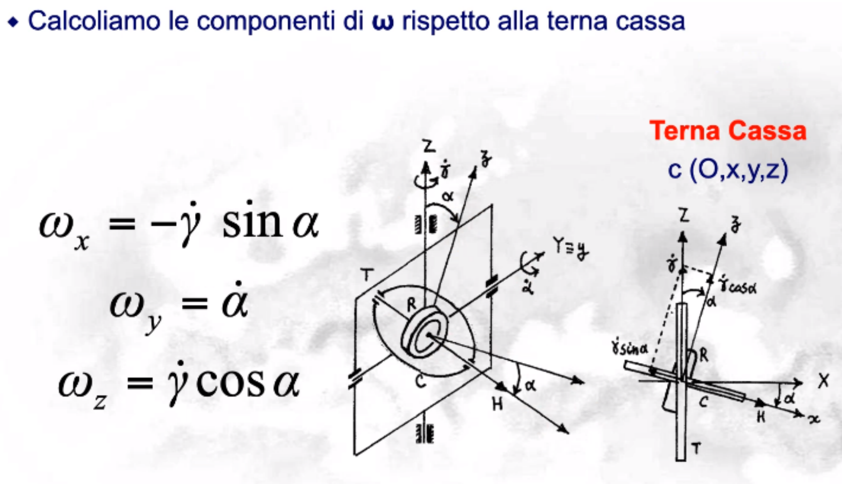
Consideriamo l'anello più interno che ha come asse di simmetria e di rotazione xx'. Tale anello è vincolato ad un altro anello intermedio, che gli permette di ruotare attorno a yy'. Il tutto è vincolato ad un ultimo anello esterno, che materializza il terzo asse di rotazione zz'. Questo sistema si definisce **sospensione cardanica**. L'intersezione dei tre assi è il **centro di simmetria** su cui il corpo risulta sospeso e in equilibrio indifferente. Applicando una coppia che fa ruotare il rotore attorno all'asse xx', si genereranno i vettori $\underline{\Omega}, \underline{H}$ lungo xx' stesso.

Il corpo, se messo in rotazione attorno a xx', avrà due gradi di libertà in quanto vincolato da tale rotazione.

Supponiamo che in t=0 abbiamo gli assi X, Y, Z come SdR inerziale. Supponendo che il R sia in rotazione e che tutto il sistema (rotore+sospensione cardanica) è messo in rotazione con velocità angolare $\underline{\omega}$. Tale vettore avrà delle componenti in X, Y, Z indicate con le componenti puntate (trascuriamo la componente di $\underline{\omega}$ lungo X perché lungo tale asse agisce anche la velocità angolare del rotore, molto maggiore rispetto a $\underline{\omega}$). Allora, le uniche velocità angolare con cui mettiamo in rotazione il sistema avranno soltanto due componenti dirette lungo gli assi Y e Z. La velocità angolare $\dot{\alpha}$ implica una rotazione α diretta lungo il piano xz.



Calcoliamo le componenti di $\underline{\omega}$ rispetto alla terna cassa (O,x,y,z), ora ruotata:



Avremo due momenti angolari: uno legato alla rotazione del rotore (H) e uno legato alla rotazione di tutto il sistema (legato a $\underline{\omega}$)

- Il **momento della quantità di moto (o Momento Angolare)** del sistema R+C:

$$\underline{I\omega} + \underline{H}$$

Momento angolare di R+C per la presenza di $\underline{\omega}$

Momento angolare di R per la presenza di $\underline{\Omega}$

I la matrice (o tensore) d'inerzia dell'insieme R+C

I è detto **tensore d'inerzia** ed è una matrice che ha lungo la diagonale principale i momenti di inerzia del corpo rispetto ai tre assi della terna considerata (terna cassa in questo caso).

- Il tensore d'inerzia è dato dalla matrice:

$$I = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}$$

- essendo I_x, I_y, I_z, i momenti d'inerzia rispetto ai tre assi principali mentre i termini fuori diagonale rappresentano i prodotti d'inerzia, nulli per la simmetria del sistema rispetto agli assi di riferimento.

Per il principio di conservazione della quantità di moto:

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

$$\frac{d}{dt}(\underline{I\omega} + \underline{H})_i = \underline{C}$$

⇧

momento della quantità di moto dell'insieme giroscopio-cardani