

NAVIGAZIONE INERZIALE

EQ. FONDAMENTALE NAVIGAZIONE INERZIALE

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_x = f_x + (\rho_y + 2\sigma_y)V_z + (\rho_z + 2\sigma_z)V_y + g_x$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_y = f_y + (\rho_z + 2\sigma_z)V_x + (\rho_x + 2\sigma_x)V_z + g_y$$

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_z = f_z + (\rho_x + 2\sigma_x)V_y + (\rho_y + 2\sigma_y)V_x + g_z$$



Accelerometri



Giroscopi
(Orientamento Terna Misura)

IMU (Inertial Measurement Unit)

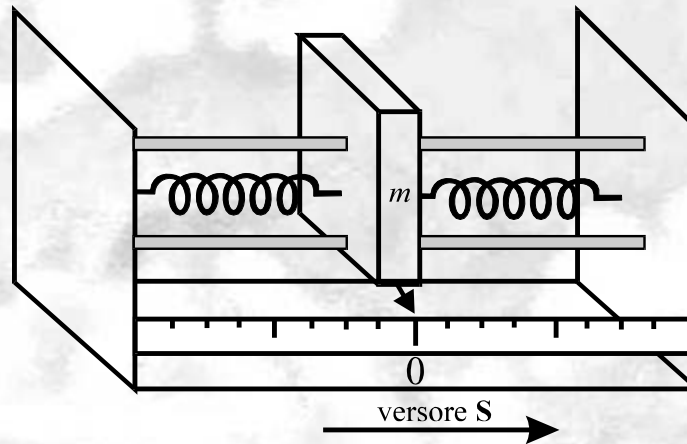
Navigazione Inerziale

PRINCIPIO DELL' ACCELEROMETRO

- ◆ Un **accelerometro** accelera, nel caso della navigazione inerziale, ha la finalità di misurare in modo particolare accelerazioni dovute alle variazioni di moto del veicolo.
- ◆ Purtroppo, come sarà mostrato, un accelerometro non è in grado di selezionare tra le varie accelerazioni presenti né di distinguere tra forze inerziali e forze gravitazionali, come affermato dal secondo postulato della teoria della relatività generale di Einstein, noto anche come principio di equivalenza

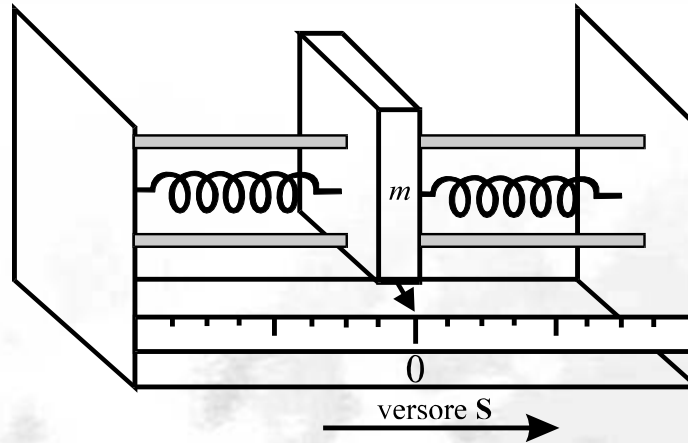
Navigazione Inerziale

- ◆ Un accelerometro, *schematicamente*, consiste in una massa m che può muoversi, **senza attrito**, lungo una direzione **S** (**asse di ingresso**) materializzata da due guide tra loro parallele fissate ad un supporto rigido.



accelerometro ad **un solo grado** di libertà.

Navigazione Inerziale

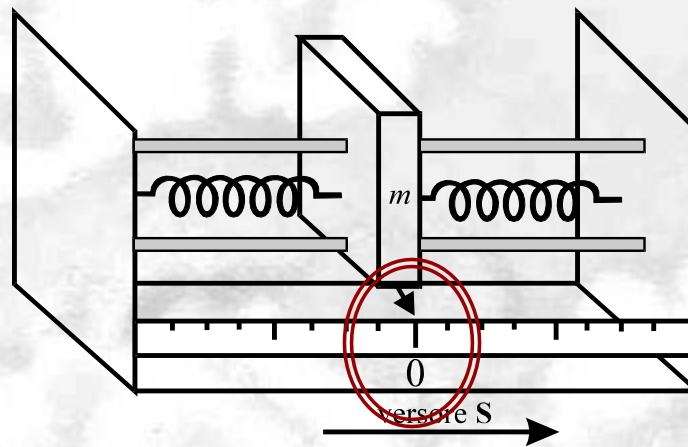


- ◆ La massa è sottoposta all'azione di due molle antagoniste di **coefficiente di elasticità K_m** assai elevato
- ◆ Se alla massa si applica un'accelerazione \mathbf{F} , un indice fisso alla massa stessa segnala **uno spostamento x funzione della componente di \mathbf{F} secondo l'asse sensibile dell'accelerometro:**

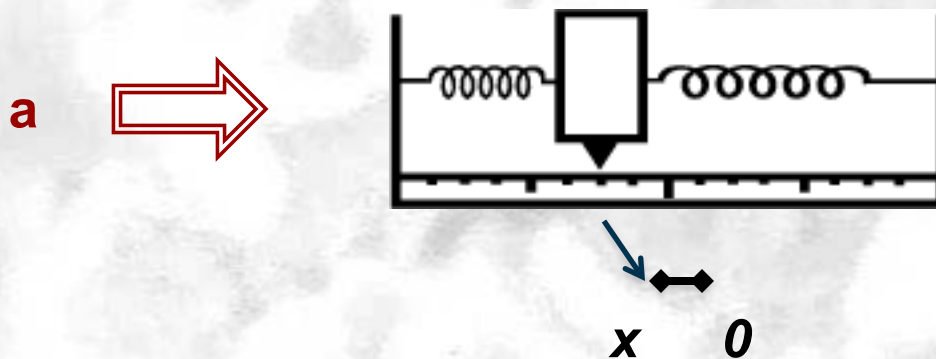
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x$$

Navigazione Inerziale

- ◆ In **assenza di accelerazioni** lungo l'asse d'ingresso, l'indice si pone sullo zero della scala;



- ◆ nel caso, invece, che sia applicata alla massa m un'accelerazione assoluta a , in presenza di un campo gravitazionale G , l'indice si sposterà di una quantità x .



Navigazione Inerziale

- ◆ Dalla Meccanica sappiamo che **la risultante tra forze applicate e forze d'inerzia** è costantemente nulla e pertanto può scriversi:

$$\mathbf{R}_r + m\mathbf{G} + K_m x\mathbf{S} - m\mathbf{a} = 0 \quad (2)$$

dove:

- ◆ \mathbf{R}_r è la risultante delle forze di reazione applicate dalla guida alla massa m ;
- ◆ $m\mathbf{G}$ è la forza di gravitazione cui è sottoposta la massa m ;
- ◆ $K_m x\mathbf{S}$ è la tensione esercitata dalla molla;
- ◆ $m\mathbf{a}$ è la forza d'inerzia.

Navigazione Inerziale

- ◆ Proiettando la relazione seguente lungo la direzione \mathbf{S} dell'asse sensibile dell'accelerometro, si ha, tenendo conto che \mathbf{R}_r è normale all'asse:

$$\cancel{\mathbf{R}_r} + m\mathbf{G} + K_m x \mathbf{S} - m\mathbf{a} = 0 \quad (2)$$



$$mG_s + K_m x - ma_s = 0$$

- ◆ da cui:

$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) \quad (3)$$

Specific Force

Navigazione Inerziale

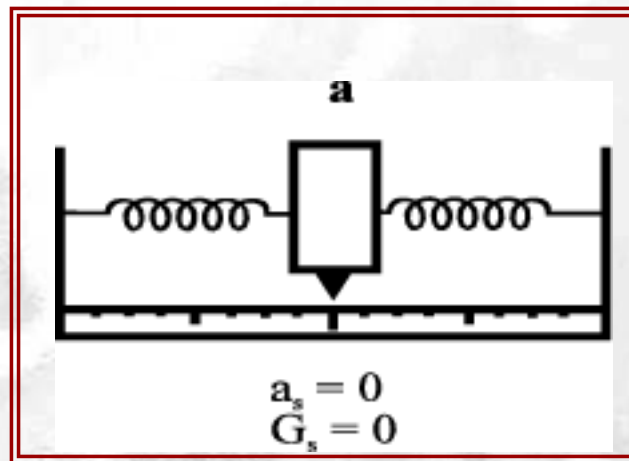
$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) \quad (3)$$

- ◆ Pertanto la lettura (*specific force* f) è proporzionale alla differenza tra le componenti dell'accelerazione assoluta a_s e di quella gravitazionale G_s lungo la direzione S
- ◆ Quindi l'**accelerometro** non è in grado di distinguere tra forze d'inerzia e forze gravitazionali ma permette di misurare soltanto tali differenze.

Navigazione Inerziale

S \perp **G**

- ◆ in assenza di accelerazioni l'indice segna zero (CASO a)



$$x = \frac{m}{K_m} (\cancel{X_s} - \cancel{G_s})$$

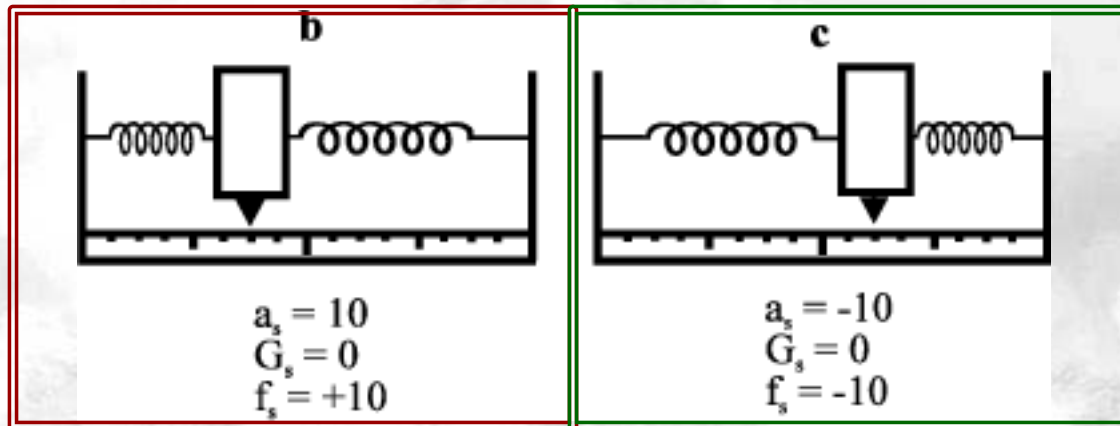


$$x = 0$$

Navigazione Inerziale

S \perp **G**

- ◆ In presenza di un' accelerazione diretta secondo l'asse di ingresso la massa è spinta dalla forza d'inerzia nella direzione opposta nello stesso



$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) = 10$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x = 10$$

$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) = -10$$

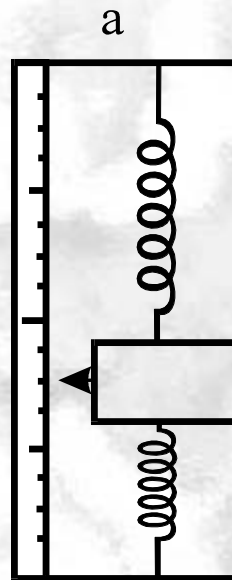
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x = -10$$

Navigazione Inerziale

- ◆ il **campo gravitazionale** e ogni altra accelerazione perpendicolare all'asse di ingresso non esercitano alcuna azione sulla massa m
- ◆ Pertanto **le letture fatte da un accelerometro il cui asse di ingresso è perpendicolare al campo locale non sono falsate dall'azione di tale campo.**

Navigazione Inerziale

- ◆ Se, invece, **l'asse di ingresso dell'accelerometro è diretto secondo la direzione del campo gravitazionale, anche in assenza di accelerazioni inerziali (accelerometro su una panca), l'indice indicherà il modulo di tale campo;**



$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) = -10$$

$$f_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = -10$$

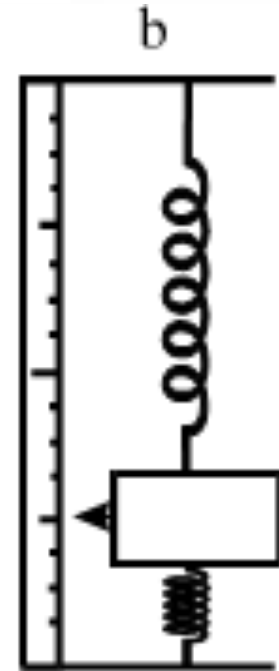
$$\begin{aligned} a_s &= 0 \\ G_s &= 10 \\ f_s &= -10 \end{aligned}$$

Navigazione Inerziale

- ◆ se invece si è in presenza di **un' accelerazione diretta verso l'alto** ($a = -10 \text{ m/s}^2$)
- ◆ L'effetto del **peso** della massa m e **dell'accelerazione si sommano**

$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) = -20$$

$$f_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x = -20$$



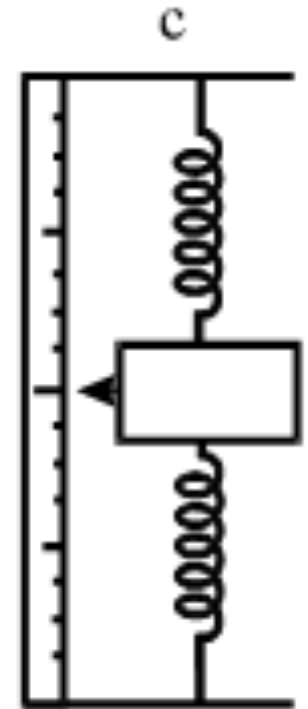
$$\begin{aligned} a_s &= -10 \\ G_s &= 10 \\ f_s &= -20 \end{aligned}$$

Navigazione Inerziale

- ◆ Al contrario, in presenza di un' accelerazione **diretta verso il basso (caduta libera del sensore nel vuoto)**, di modulo ($a \approx 10 \text{ m/s}^2$)
- ◆ Si ha l'effetto opposto

$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - G_s) = 0$$

$$f_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x = 0$$



$$\begin{aligned} a_s &= 10 \\ G_s &= 10 \\ f_s &= 0 \end{aligned}$$

Navigazione Inerziale

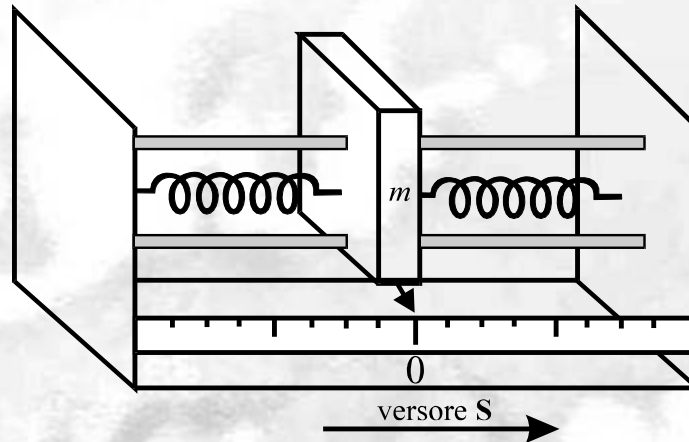
- ◆ È dunque impossibile costruire un accelerometro inerziale che non sia influenzato dalla presenza del campo gravitazionale;
- ◆ per cui si rende necessaria **la conoscenza di detto campo in un qualsiasi punto della superficie terrestre o dello spazio.**

$$x = \frac{m}{K_m} (a_s - \textcircled{G_s})$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{S} = K_m x$$

Navigazione Inerziale

Essendo l' accelerometro descritto ad **un solo grado** di libertà.

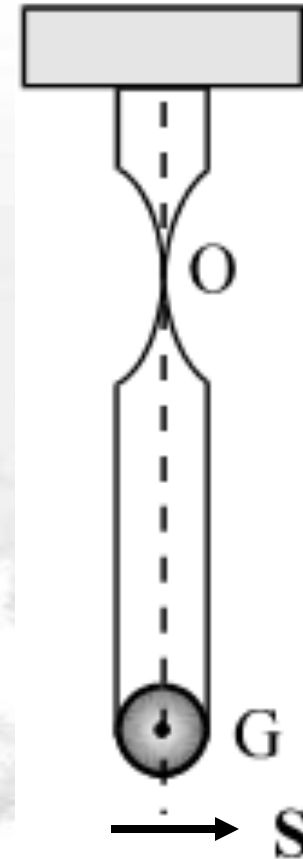


- ◆ Per definire completamente il vettore **a-G** **occorrono tre accelerometri** ad un grado di libertà i cui assi sensibili non siano complanari ed occorre inoltre conoscere l' orientamento di questi assi rispetto alla terna inerziale.

ACCELEROMETRO PENDOLARE

Navigazione Inerziale

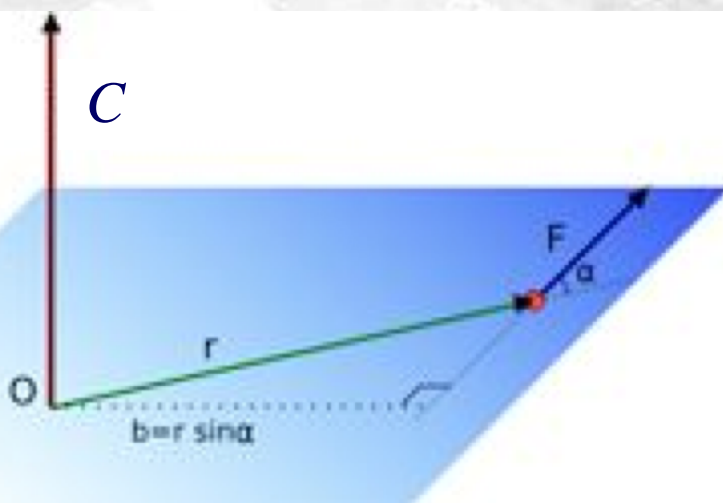
- ◆ L' accelerometro finora descritto ha un interesse esclusivamente teorico;
- ◆ nella pratica della navigazione inerziale si usano diversi tipi di accelerometri tra i quali quello pendolare.
- ◆ Questo consiste in una massa sospesa soggetta a rotazioni o a deflessioni in presenza di un' accelerazione diretta secondo la direzione di un asse d' ingresso S .



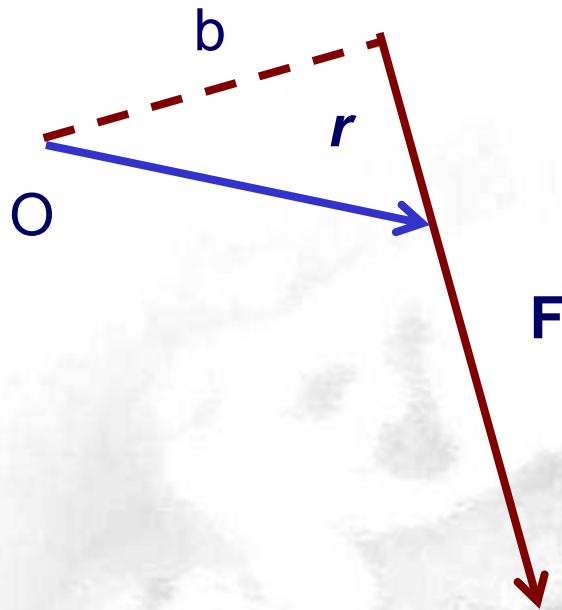
Definizione di Coppia (o meglio Momento di una Forza):

◆ Il momento di una forza \mathbf{F} rispetto a un punto O è un vettore che ha :

1. per direzione la perpendicolare al piano definito dalla forza e dal raggio vettore del punto di applicazione di F ;
2. verso e modulo definiti dalla seguente operazione



$$\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



$$\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF \sin \alpha = Fb$$

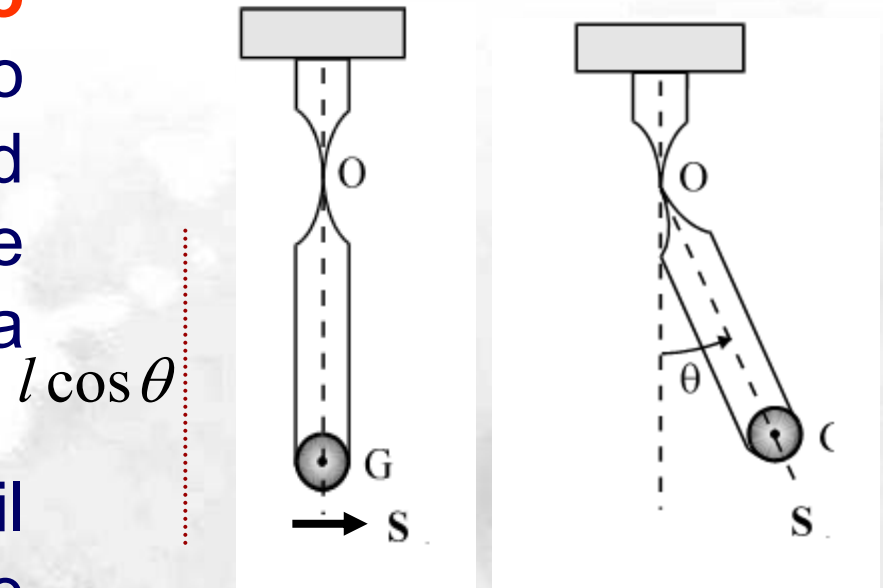
Verso?



ENTRANTE

Navigazione Inerziale

- ◆ Nella figura l' **elemento sensibile** è rappresentato da una massa solidale ad una lamina libera di oscillare nel piano del foglio e rigida nel piano normale.
- ◆ Se la **distanza** tra il baricentro della massa m e il fulcro è **indicata con l** , la massa si arresta quando la coppia applicata è uguale alla coppia resistente:



$$m f l \cos \theta = k_1 \theta$$

Coppia Applicata

Coppia Resistente

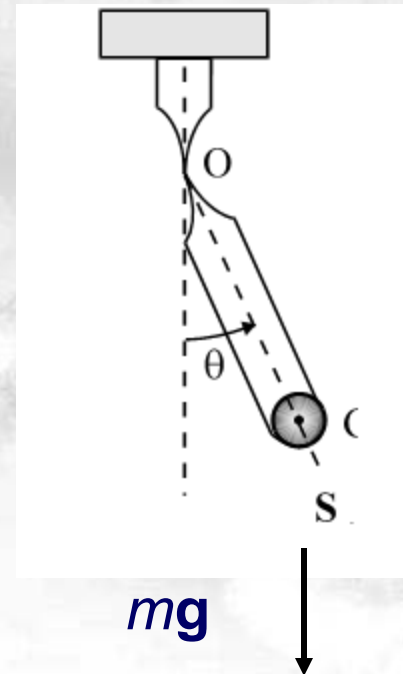
Navigazione Inerziale

- ◆ Il coefficiente k_1 è tale che l'angolo di deflessione θ è sempre molto piccolo in modo da poter considerare il coseno dell'angolo uguale ad 1.
- ◆ In caso contrario il sistema, essendo il braccio variabile, in quanto funzione del coseno dell'angolo θ **perderebbe la sua linearità**.
- ◆ Si ha, pertanto:

$$m f_1 l \cos \theta = k_1 \theta \quad \rightarrow \quad f = \frac{k_1}{ml} \theta \quad (6)$$

Navigazione Inerziale

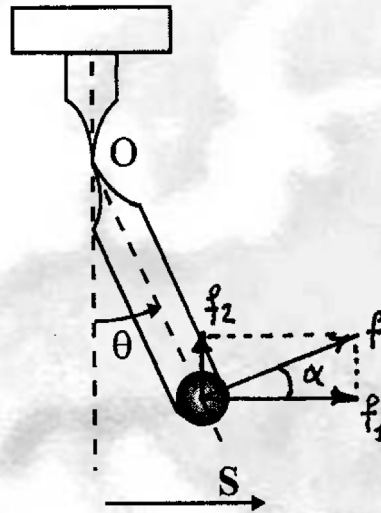
- ◆ La rotazione viene trasformata in un segnale elettrico attraverso un dispositivo detto *pickoff* simile a quello usato nei giroscopi
- ◆ pertanto l'accelerazione misurata è proporzionale a detto segnale.
- ◆ L'inconveniente di un tale accelerometro è che, qualora deflesso, esso è soggetto non soltanto ad accelerazioni dirette secondo l'asse d'ingresso **ma anche a componenti dirette ortogonalmente a tale asse.**



Navigazione Inerziale

- ◆ Di conseguenza l'accelerometro verrebbe sollecitato da una seconda coppia:

$$C_2 = mf_2 l \sin \theta \cong mf \sin \alpha l \theta$$



$$\theta = \frac{mlf_1}{k_1} = \frac{mlf \cos \alpha}{k_1}$$

- ◆ Sostituendo a θ il valore:

$$C = \frac{m^2 f^2 l^2}{2k_1} \sin 2\alpha \quad (7)$$

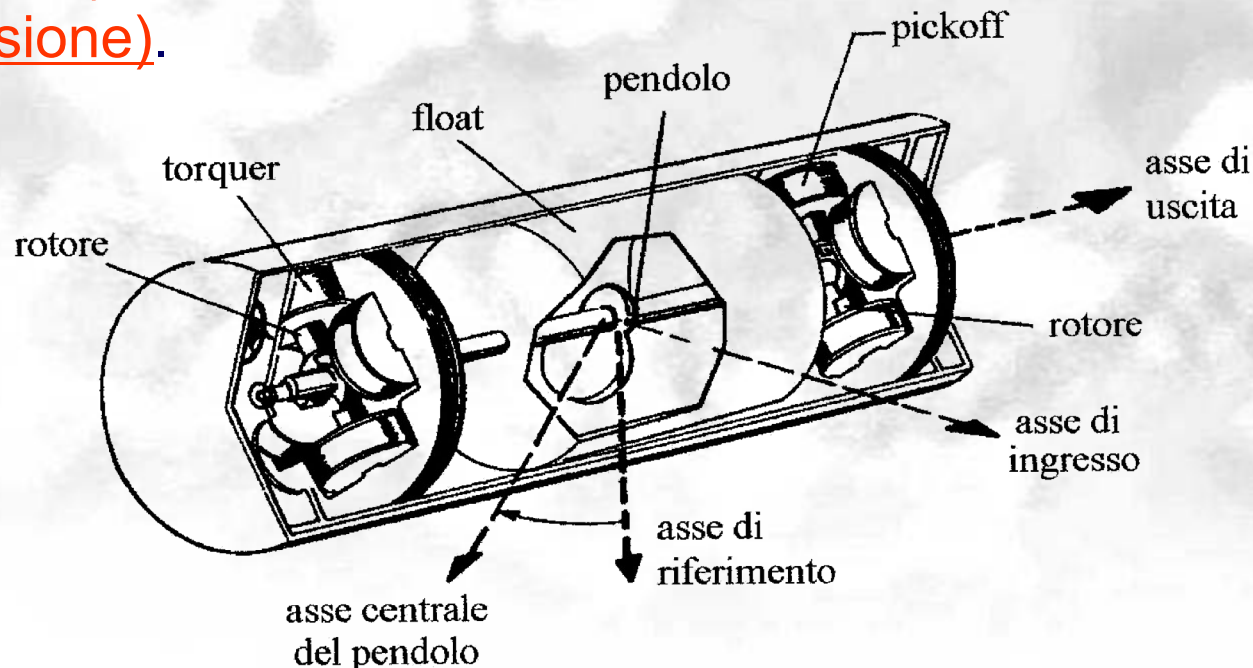
Navigazione Inerziale

$$C = \frac{m^2 f^2 l^2}{2k_1} \sin 2\alpha$$

- ◆ che diviene massima per $\alpha = 45^\circ$.
- ◆ L'errore che ne deriva viene definito col termine *cross-coupling error*.
- ◆ Per evitare tale inconveniente l'accelerometro è costruito in modo che la massa non abbandona mai la sua posizione di riposo anche in presenza di accelerazioni.
- ◆ Affinché ciò si verifichi il segnale elettrico proveniente dal *pickoff*, amplificato, va ad un motorino di coppia (*torquer*) che trasforma il detto segnale in una coppia tale da riportare l'asse del pendolo nella posizione di riposo.

Navigazione Inerziale

- ◆ Uno dei primi accelerometri pendolari fu usato nel sistema di navigazione inerziale del veicolo spaziale Apollo;
- ◆ esso consisteva in un sistema pendolare costituito da un cilindro zavorrato **circondato da un fluido** che, oltre a fornire una spinta, provvedeva a creare una coppia di smorzamento viscoso (proporzionale quindi alla derivata dell'angolo di deflessione).

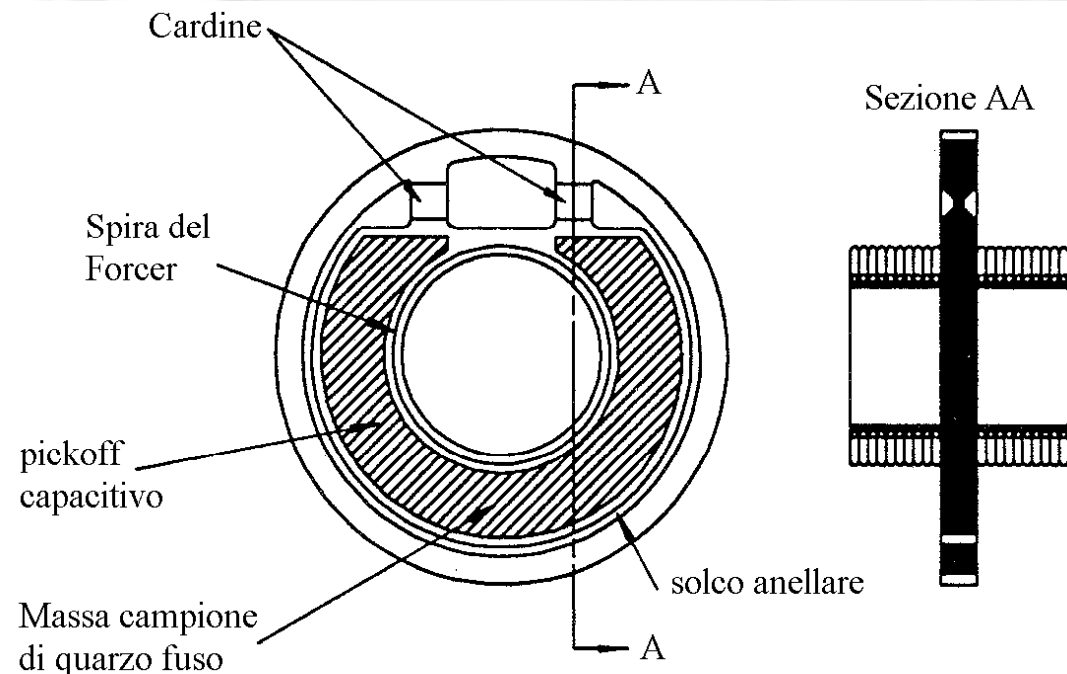


Accelerometro pendolare elettromagnetico

Navigazione Inerziale

- ◆ Un accelerometro miniaturizzato, usato come componente di molti moderni sistemi inerziali, è l'accelerometro pendolare elettromagnetico noto anche con la sigla **EPA** (*Electromagnetic Pendulous Accelerometer*)

- ◆ L'elemento sensibile di tale accelerometro è una piccola lamina a forma di corona circolare sostenuta da un tratto flessibile in silicio fuso;



◆ La lamina è posta tra le armature fisse di un condensatore, con funzione di *pickoff*, **in modo da rendere identiche le due capacità a lamina centrata.**

◆ Se l'accelerazione sposta la lamina verso una delle due armature del condensatore una capacità aumenta e l'opposta diminuisce generando, così, **un segnale elettrico di uscita che alimenta una bobina (con funzioni di *torquer*) il cui campo magnetico riallinea il sistema**

