Equazione fondamentale della navigazione inerziale

Per ricavare l'equazione fondamentale della navigazione inerziale, bisogna partire dal secondo principio della dinamica:

$$\left(\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right)_i = \underline{f} + \underline{G}$$

dove R̲ è la posizione del mobile riferita in un SdR globale quale ECI o ECEF (quest'ultimo in moto con velocità angolare $\underline{\sigma}$), e che rappresenta il vettore posizione dell'origine del SdR solidale al mobile (terna body o di piattaforma) in moto con una velocità angolare pari alla somma di $\underline{\sigma}$, in quanto il mobile è in moto in prossimità della superficie terrestre, e di $\underline{\rho}$ velocità di variazione dell'assetto del mobile (derivata degli angolo di eulero) (figura 1).

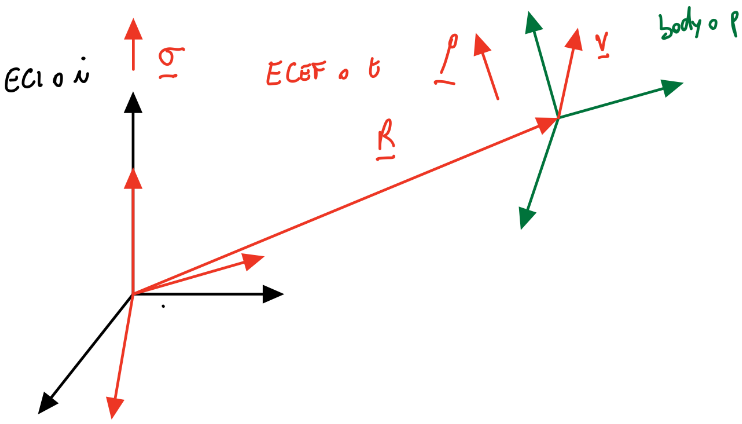

Figura 1

Ricordando il Teorema di Coriolis che permette di calcolare la derivata di un vettore qualsiasi $\underline{x}$ in due SdR (a) e (b) in moto relativo velocità angolare $\underline{\omega}$, e cioè:

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\underline{x}}{dt}\right)_b + \underline{\omega} \times \underline{x}$$

Applichiamo tale teorema al vettore posizione R̲ in coordinate ECEF per determinare le coordinate ECI:

$$\left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_{i=ECI} = \left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_{t=ECEF} + \underline{\sigma} \times \underline{R} \qquad (1)$$

ricordando che in ECI $\underline{\sigma} = cost$, deriviamo rispetto al tempo:

$$\left(\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right)_i = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_t\right]_i + \underline{\sigma} \times \left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_i$$

Sostituendo nell'equazione precendente:

- il secondo principio della dinamica: $\left(\frac{d^2\underline{R}}{dt^2}\right)_i = \underline{f} + \underline{G}$;
- e sapendo che la derivata di una posizione nel tempo, nel sistema ECEF, è la velocità del mobile nel SdR considerato, $\left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_t = v$

otteniamo:

$$\left[\frac{d\underline{v}}{dt}\right]_i + \underline{\sigma} \times \left(\frac{d\underline{R}}{dt}\right)_i = \underline{f} + \underline{G} \tag{2}$$

~ ~

Applichiamo adesso al vettore velocità $\underline{v}$ il teorema di Coriolis partendo dal sistema ECI per ricondurci alla terna BODY:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_i = \left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_{p=body} + (\underline{\rho} + \underline{\sigma}) \times \underline{v}$$

Sostituendo l'equazione precedente e la (1) nella (2), ottenendo:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_p + \underline{\rho} \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \left(\underline{v} + \underline{\sigma} \times \underline{R}\right) = \underline{f} + \underline{G}$$

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_p + \underline{\rho} \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \left(\underline{\sigma} \times \underline{R}\right) = \underline{f} + \underline{G}$$

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_p + \underline{\rho} \times \underline{v} + 2\left(\underline{\sigma} \times \underline{v}\right) + \underline{\sigma} \times \left(\underline{\sigma} \times \underline{R}\right) = \underline{f} + \underline{G}$$

Mettendo in evidenza a destra $\underline{v}$:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_p + \left(\underline{\rho} + 2\underline{\sigma}\right) \times \underline{v} + \underline{\sigma} \times \left(\underline{\sigma} \times \underline{R}\right) = \underline{f} + \underline{G}$$

A questo punto possiamo determinare la velocità del mobile rispetto alla terna body, scrivendo i termini in maniera opportuna:

$$\left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right)_p = \underline{f} - \left(\underline{\rho} + 2\underline{\sigma}\right) \times \underline{v} + \underline{G} - \underline{\sigma} \times \left(\underline{\sigma} \times \underline{R}\right)$$

Questi termini sono tutte accelerazioni, se consideriamo un corpo di massa unitaria, e nel merito:

- $-2\underline{\sigma} \times \underline{v}$ è l'accelerazione complementare di Coriolis, avvertita in un SdR solidale alla Terra (ECEF), in quanto sistema non inerziale, animato dalla rotazione $\underline{\sigma}$;
- $\underline{\rho} \times \underline{v}$ è l'accelerazione centripeta legata al moto angolare del mobile
- $\underline{G} - \underline{\sigma} \times \left(\underline{\sigma} \times \underline{R}\right)$ è l'accelerazione di gravità data dalla risultante dell'accelerazione gravitazione e dell'accelerazione centrifuga dovuta alla rotazione terrestre.

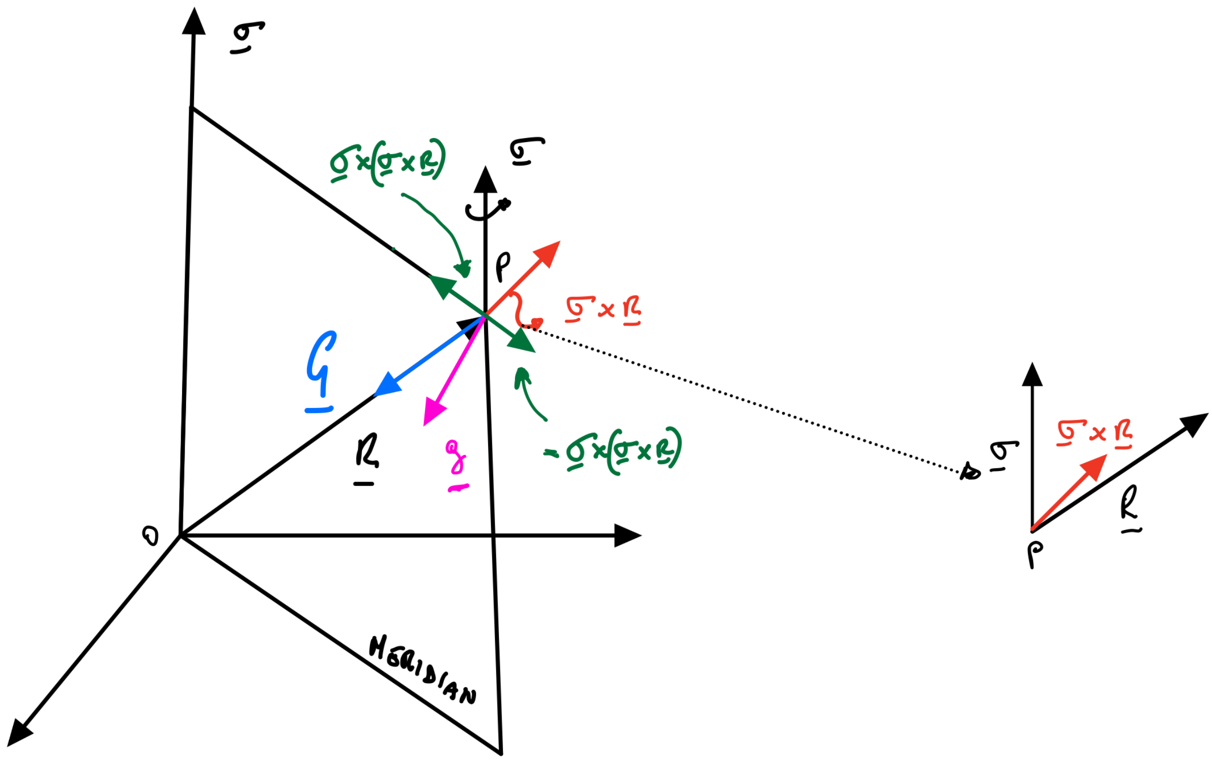

Figura 2