Aggiornamento di una MCD tramite i Quaternioni

Abbiamo visto che per aggiornare la MCD che esprime il passaggio tra due SdR in moto relativo con velocità angolare $\underline{\omega}$ (Fig.1 in cui si noti che $\underline{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$, in quanto velocità angolare ha la stessa direzione e verso dell'asse istantaneo di rotazione espresso da $\hat{e}$), bisogna considerare l'espressione che esprime al derivata di una MCD, e cioè:

$$\dot{C} = CA(\underline{\omega})$$

dove:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

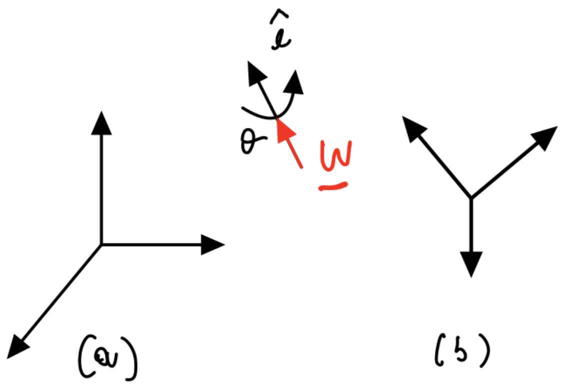


Figura 1

Nota la MCD all'epoca t_0 , $C(t_0)$, è possibile sfruttare l'equazione precedente ottenendo nove equazioni differenziali corrispondenti ai nove elementi di C:

$$\dot{C}_{ij} = [C(t_0)]_i \left[A(\underline{\omega})\right]_j$$

Da cui:

$$C_{ij}(t) = C_{ij}(t_0) + \dot{C}_{ij}\Delta t \qquad (1)$$

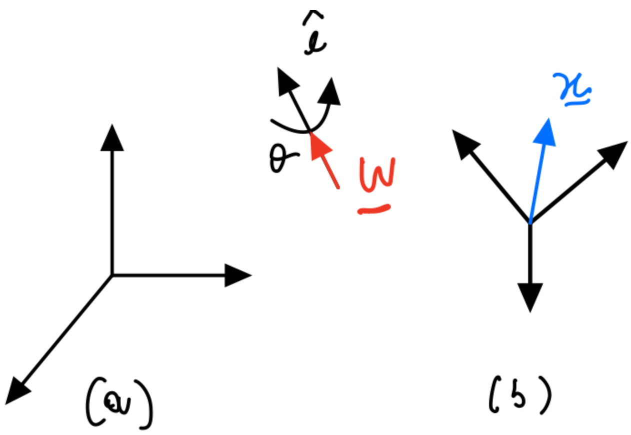
Quest'ultima equazione consente di aggiornare (*update*) la MCD $C(t_0)$ ottenendo la stessa all'epoca $t = t_0 + \Delta t$ risolvendo 9 equazioni differenziali del tipo (1).

Possiamo semplificare la complessità computazionale dell'aggiornamento di una MCD considerando la sua ortogonalità in base alla quale i vettori colonna (o riga) della MCD sono perpendicolari tra loro. Quindi determinate le prime due colonne (o righe) di C, sarà possibile ottenere la terza considerando il prodotto vettoriale delle prime due:

$$\begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \end{bmatrix} \Longrightarrow \underline{C_3} = \underline{C_1} \times \underline{C_2}$$

Possiamo ridurre ulteriormente la complessità computazionale del problema esprimendo il passaggio tra i due SdR per il tramite dei quaternioni.

Si consideri un qualsiasi vettore $\underline{x}$ solidale al SdR (b).



Il trasferimento tra i due SdR può essere espresso dal Q che ha le seguenti proprietà:

$$|Q| = 1\,;\, q_0 = \cos\frac{\theta}{2};\; \underline{q} = sin\,\frac{\theta}{2}\,\hat{e}$$

Ed in particolare le componenti del vettore $\underline{x}$ possono essere calcolate in uno dei due SdR, note le stesse nell'altro SdR, grazie al prodotto tra quaterioni:

$$\underline{x_a} = Q\underline{x_b}Q^* \Leftrightarrow \underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q$$

Deriviamo ambo i membri della prima equazione rispetto al tempo:

$$\frac{d}{dt}\underline{x_a} = \frac{d}{dt}\left(Q\underline{x_b}Q^*\right) \Longrightarrow \underline{\dot{x_a}} = \frac{d}{dt}\left(Q\underline{x_b}\right)Q^* + Q\underline{x_b}\dot{Q}^* \Longrightarrow \underline{\dot{x_a}} = \left(\dot{Q}\underline{x_b} + Q\underline{\dot{x_b}}\right)Q^* + Q\underline{x_b}\dot{Q}^*$$

Poiché $\underline{x_b}$ è solidale a (b), $\underline{\dot{x_b}} = 0$ in quanto non ci sarà variazione di tale vettore in tale SdR e quindi:

$$\underline{\dot{x_a}} = \dot{Q}\underline{x_b}Q^* + Q\underline{x_b}\dot{Q}^*$$

Sfruttando l'equazione precedente: $\underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q$

$$\underline{\dot{x_a}} = \dot{Q}Q^*\underline{x_a}QQ^* + QQ^*\underline{x_a}Q\dot{Q}^*$$

Essendo $|Q| = 1 \Longrightarrow QQ^* = 1$ e quindi:

$$\underline{\dot{x_a}} = \dot{Q}Q^*\underline{x_a} + \underline{x_a}Q\dot{Q}^*$$

Ricordando le proprietà:

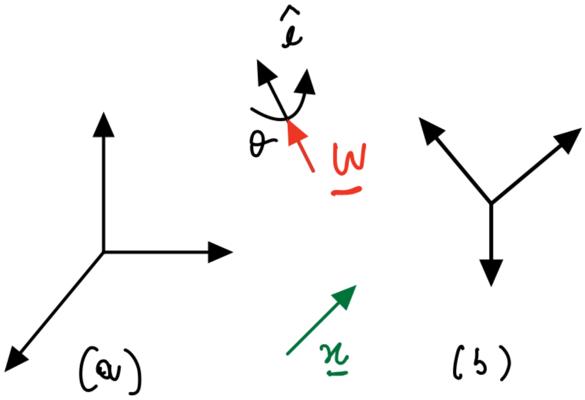
a) dei quaternioni di norma unitaria secondo cui: $\dot{Q}Q^* = -Q\dot{Q}^*$

b) e del prodotto di due quaternioni: $PQ - QP = 2\underline{p} \times \underline{q}$ dove

Possiamo scrivere:

$$\underline{\dot{x_a}} = 2\dot{Q}Q^* \times \underline{x_a} \tag{2}$$

Si consideri il Teorema di Coriolis che può essere applicato quando due SdR sono in moto relativo:



e che può essere così formulato

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_a = \left(\frac{dx}{dt}\right)_b + \underline{\omega_a} \times \underline{x_a}$$

Grazie a tale teorema abbiamo introdotto l'accelerazione complementare di Coriolis:

$$\underline{\dot{x}_a} = \underline{\dot{x}_b} + \underline{\omega_a} \times \underline{x_a}$$

Poiché $\underline{\dot{x}_b} = 0$:

$$\underline{\dot{x}_a} = \underline{\omega_a} \times \underline{x_a} \tag{3}$$

Confrontando ambo i membri della (2) e della (3), si ha:

$$2\dot{Q}Q^* \times \underline{x_a} = \underline{\omega_a} \times \underline{x_a}$$

Da cui:

$$2\dot{Q}Q^* = \underline{\omega_a} \tag{4}$$

Post-moltiplicando ambo i membri della (4) per Q è considerando che QQ^*=Q^*Q=1 nel caso di quaternione di modulo unitario, si ha:

$$2\dot{Q}Q^*Q = \underline{\omega_a}Q \Longrightarrow 2\dot{Q} = \underline{\omega_a}Q$$

E quindi:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}\underline{\omega_a}Q \tag{5}$$

Il prodotto tra i quaternioni al secondo membro della (5) può essere svolto considerando l'equazione (2) della dispensa (C01_A04_1) che riguarda a il prodotto generico tra due quaternioni *P* e *Q* e che si riporta per comodità:

$$PQ = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Considerando che il primo quaternione al secondo membro della (5) è il vettore $\underline{\omega_a}$ che ha quindi parte reale nulla si ha:

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}A(\underline{\omega_b})Q \tag{6}$$

Dove:

Q è una 4 x1

$A(\underline{\omega_a})$ è una matrice 4 x 4 , data da:

$$A(\underline{\omega_a}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Risolvendo ognuna delle 4 equazioni differenziali del primo ordine della (6) con il metodo numeri dei trapezi si ha:

$$q_i(t) = q_i(t_0) + \dot{q}_i \Delta t \text{ per } i = 1:4$$

Aggiornato quindi il quaternione con l'equazione precedente si può passare a calcolare la MCD aggiornata (risolvendo 4 e non 6 equazioni differenziali) ricordando l'algoritmo che calcolava gli elementi della MCD in funzione delle componenti di un quaternione.