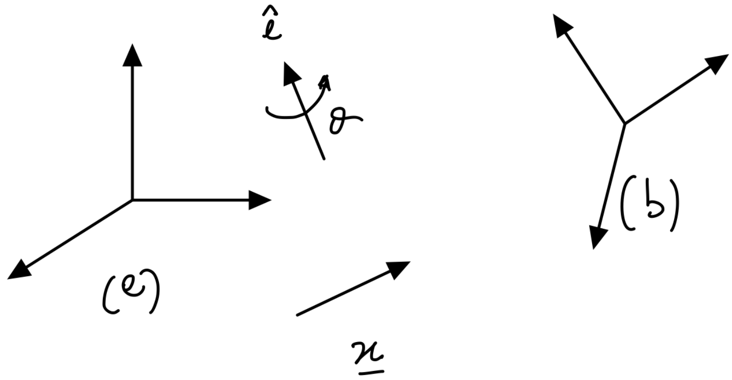
Quaternioni e Rotazioni

Consideriamo il sistema (a) che viene ruotato di un angolo θ attorno al versore $\hat{e}$, ottenendo (b):



In precedenza, abbiamo ottenute le componenti di un vettore $\underline{x}$ nel sistema di arrivo, conoscendo quelle del sistema di partenza, grazie l'equazione vettoriale:

$$\underline{x_b} = cos\theta\ \underline{x_a} + (1 - cos\theta)(\hat{e} \cdot \underline{x_a})\hat{e} - sin\theta(\hat{e} \times \underline{x_a}) = C_a^b \underline{x_a} \qquad (*)$$

dove $C_a^b = [cos\theta\ I_3 + (1 - cos\theta)ee^T - sin\theta A(e)]$ rappresenta la MCD.

Possiamo ottenere lo stesso risultato pre-moltiplicando per un particolare Q e post-moltiplicando per il suo coniugato Q* o viceversa, a seconda del senso del trasferimento (da a → b o da b → a).

In particolare, tale Quaternione deve avere le seguenti proprietà:

- parte reale valga $q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
- e quella immaginaria abbia modulo $q = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e direzione $\underline{q} = q\hat{e}$.

con θ ed $\hat{e}$ aventi come significato, l'angolo di rotazione e l'asse istantaneo di rotazione del trasferimento oggetto di studio.

Avendo dato il precedente significato alla parte reale e quella vettoriale del Quaternione allora sicuramente il quaternione Q avrà norma unitaria, infatti:

$$|Q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = q_0 + \left|\underline{q}\right|^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

Possiamo dimostrare che:

$$\underline{x_a} = Q\underline{x_b}Q^* \qquad (1)$$

Tale equazione equivale a quella che possiamo ottenere Pre-moltiplicando per Q* e post-moltiplicando per Q ambo i membri (senza alterarla):

$$Q^*\underline{x_a}Q = Q^*Q\underline{x_b}Q^*Q$$

$$\underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q \qquad (2)$$

Vogliamo dimostrare che le moltiplicazioni tra quaternioni del secondo membro della relazione (2) equivale a pre-moltiplicare $\underline{x_a}$ per la MCD, e cioè:

$$\underline{x_b} = Q^* \underline{x_a} Q = C_a^b \underline{x_a}$$

Esprimiamo in forma compatta i quaternioni al secondo membro della (2), ricordando che un vettore può essere considerato come un quaternione avente parte reale nulla:

$$\underline{x_b} = \left[(q_0, -q\hat{e})\left(0, \underline{x_a}\right)\right](q_0, q\hat{e})$$

Applichiamo la regola del prodotto tra quaternioni:

$$\underline{x_b} = \left(q_0 \cdot 0 + q\hat{e} \cdot \underline{x_a} + q_0 \underline{x_a} + 0 - q\hat{e} \times \underline{x_a}\right)(q_0, q\hat{e})$$

Esprimiamo il primo termine tra parentesi in forma compatta e riapplichiamo la regola del prodotto tra quaternioni a quelli appena ottenuti:

$$\underline{x_b} = \left(q\hat{e} \cdot \underline{x_a}, q_0 \underline{x_a} - q\hat{e} \times \underline{x_a}\right)(q_0, q\hat{e})$$

$$= +q_0 \underline{q\hat{e}} \cdot \underline{x_a} - \left(q_0 \underline{x_a} - q\hat{e} \times \underline{x_a}\right) \cdot q\hat{e} + q(\hat{e} \cdot \underline{x_a}) q\hat{e} + q_0\left(q_0 \underline{x_a} - q\hat{e} \times \underline{x_a}\right)$$

$$+ \left(q_0 \underline{x_a} - q\hat{e} \times \underline{x_a}\right) \times q\hat{e}$$

$$= +q_0 q(\hat{e} \cdot \underline{x_a}) - q_0 q(\hat{e} \cdot \underline{x_a}) + q^2\left(\hat{e} \times \underline{x_a}\right) \cdot \hat{e} + q^2(\hat{e} \cdot \underline{x_a})\hat{e} + q_0^2 \underline{x_a} - q_0 q(\hat{e} \times \underline{x_a})$$

$$+ q_0 q(\underline{x_a} \times \hat{e}) - q^2(\hat{e} \times \underline{x_a}) \times \hat{e}$$

I primi due termini si annullano perché uguali e opposti. Il terzo termine: $q^2\left(\hat{e} \times \underline{x_a}\right) \cdot \hat{e}$ si annulla perché il vettore che deriva dal prodotto vettoriale $\hat{e} \times \underline{x_a}$ è $\perp \hat{e}$ per cui il prodotto scalare in questione è nullo. Dunque:

$$\underline{x_b} = Q^* \underline{x_a} Q = q^2(\hat{e} \cdot \underline{x_a})\hat{e} + q_0^2 \underline{x_a} - q_0 q\ (\hat{e} \times \underline{x_a}) + q_0 q\ (\underline{x_a} \times \hat{e}) - q^2(\hat{e} \times \underline{x_a}) \times \hat{e}$$

I termini in rosso coinvolgono, nel prodotto vettoriale, gli stessi vettori. Scambiamo l'ordine di $\underline{x_a} \times \hat{e}$ cambiando anche segno algebrico:

$$\underline{x_b} = Q^* \underline{x_a} Q = q^2(\hat{e} \cdot \underline{x_a})\hat{e} + q_0^2 \underline{x_a} - q_0 q\ \hat{e} \times \underline{x_a} - q_0 q\ (\hat{e} \times \underline{x_a}) - q^2(\hat{e} \times \underline{x_a}) \times \hat{e}$$

$$\underline{x_b} = Q^* \underline{x_a} Q = q^2(\hat{e} \cdot \underline{x_a})\hat{e} + q_0^2 \underline{x_a} - 2q_0 q\ (\hat{e} \times \underline{x_a}) - q^2(\hat{e} \times \underline{x_a}) \times \hat{e}$$

L'ultimo termine presenta due prodotti vettoriali consecutivi: $q^2(\hat{e} \times \underline{x_a}) \times \hat{e}$. Per semplificare questo calcolo sfruttiamo le formule di Lagrange secondo cui:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Che diventa (considerando che $\hat{e} \cdot \hat{e} = |\hat{e}|^2 = 1$):

$$\left(\hat{e} \times \underline{x_a}\right) \times \hat{e} = \underline{x_a}(\hat{e} \cdot \hat{e}) - \hat{e}\left(\hat{e} \cdot \underline{x_a}\right) = \underline{x_a} - \hat{e}\left(\hat{e} \cdot \underline{x_a}\right)$$

Dunque:

$$\underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q = q^2(\hat{e}\cdot\underline{x_a})\hat{e} + q_0^2\underline{x_a} - 2q_0q\,(\hat{e}\times\underline{x_a}) - q^2\left[\underline{x_a} - \hat{e}\left(\hat{e}\cdot\underline{x_a}\right)\right]$$
$$= q^2(\hat{e}\cdot\underline{x_a})\hat{e} + q_0^2\underline{x_a} - 2q_0q\,(\hat{e}\times\underline{x_a}) - q^2x_a + q^2\hat{e}\left(\hat{e}\cdot\underline{x_a}\right)$$

Mettendo opportunamente in evidenza:

$$\underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q = (q_0^2 - q^2)\underline{x_a} + 2q^2\left(\hat{e}\cdot\underline{x_a}\right)\hat{e} - 2q_0q\,\hat{e}\times\underline{x_a} \tag{3}$$

Confrontando quest'ultima relazione con la (*), che si riporta:

$$\underline{x_b} = cos\theta\,\underline{x_a} + (1 - cos\theta)(\hat{e}\cdot\underline{x_a})\hat{e} - sin\theta(\hat{e}\times\underline{x_a})$$

Notiamo che affinché abbiano lo stesso primo membro (e quindi rappresentino lo stesso trasferimento tra SdR) allora devono avere lo stesso secondo membro, e cioè:

$$\begin{cases} q_0^2 - q^2 = cos\theta \\ 2q^2 = 1 - cos\theta \\ 2q_0q = sin\theta \end{cases}$$

Dalla seconda relazione, sfruttando la formula di bisezione di un angolo, otteniamo:

$$q^2 = \frac{1 - cos\theta}{2} \rightarrow q = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}} \rightarrow q = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Dalla terza, sostituendo quanto appena ottenuto e applicando la formula di duplicazione del seno, ricaviamo:

$$2q_0\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = sin\theta \rightarrow 2q_0\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

In conclusione, se $q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $q = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, i prodotti tra quaternioni al secondo membro della (3) hanno lo stesso effetto della matrice dei coseni direttori, C.V.D., e quindi:

$$\underline{x_b} = Q^*\underline{x_a}Q = (q_0^2 - q^2)\underline{x_a} + 2q^2\left(\hat{e}\cdot\underline{x_a}\right)\hat{e} - 2q_0q\,\hat{e}\times\underline{x_a} = C_a^b\underline{x_a} \tag{4}$$

Volgiamo ora Determinale gli elementi della MCD in funzione delle componenti del quaternione Q. Se considero ogni termine al secondo membro della (4) come il prodotto di una matrice C_i, per il vettore $\underline{x_a}$, e cioè:

$$(q_0^2 - q^2)\underline{x_a} = C_1\underline{x_a}$$
$$2q^2\left(\hat{e}\cdot\underline{x_a}\right)\hat{e} = C_2\underline{x_a}$$
$$-2q_0q\,\hat{e}\times\underline{x_a} = C_3\underline{x_a}$$

allora otterremo la MCD:

$$C_a^b = C_1 + C_2 + C_3$$

Da semplici considerazioni si può notare come:

$$C_1 = (q_0^2 - q^2)I_3$$
$$C_2 = 2q^2\hat{e}\hat{e}^T$$

$$C_3 = 2q_0 q A(\hat{e})$$

Scriviamo in forma estesa le somma delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 - q^2 \end{bmatrix} + 2q^2 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} [e_1\ e_2\ e_3] - 2q_0 q \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = C_a^b$$

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 - q^2 \end{bmatrix} + 2q^2 \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_1 e_2 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} - 2q_0 q \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenendo a mente che: $q^2 = |q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ e che $\begin{cases} q_1 = q\widehat{e_1} \\ q_2 = q\widehat{e_2} \\ q_3 = q\widehat{e_3} \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2q^2 e_1^2 & 2q^2 e_1 e_2 & 2q^2 e_1 e_3 \\ 2q^2 e_1 e_2 & 2q^2 e_2^2 & 2q^2 e_2 e_3 \\ 2q^2 e_1 e_3 & 2q^2 e_2 e_3 & 2q^2 e_3^2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 2q_0 q e_3 & -2q_0 q e_2 \\ -2q_0 q e_3 & 0 & +2q_0 q e_1 \\ +2q_0 q e_2 & -2q_0 q e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Applicando anche al secondo e terzo termine addendo la seguente relazione: $\begin{cases} q_1 = q\widehat{e_1} \\ q_2 = q\widehat{e_2} \\ q_3 = q\widehat{e_3} \end{cases}$

considerando che, ad esempio, il termine $2q^2 e_1 e_2 = 2qe_1 qe_2 = 2q_1 q_2$.

$$\begin{bmatrix} q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2q^2 e_1^2 & 2q^2 e_1 e_2 & 2q^2 e_1 e_3 \\ 2q^2 e_1 e_2 & 2q^2 e_2^2 & 2q^2 e_2 e_3 \\ 2q^2 e_1 e_3 & 2q^2 e_1 e_3 & 2q^2 e_3^2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 2q_0 q_3 & -2q_0 q_2 \\ -2q_0 q_3 & 0 & +2q_0 q_1 \\ +2q_0 q_2 & -2q_0 q_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sommando tutte le componenti:

$$C_a^b = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto gli elementi di C_a^b a partire dagli elementi del quaternione, e cioè rappresentando il problema con uno schema a blocchi.

$$\begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{Q2C} \longrightarrow C_a^b$$

<u>Esercizio</u>

Volendo determinare il quaternione che esprime la rotazione attorno all'asse x di un angolo θ bisogna considerare che $\hat{e} = \hat{\imath} = (1,0,0), q_0 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), q = \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$. Allora:

$$Q = \left[\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cdot (1,0,0)\right]$$

Dunque

$$Q_1 = \left(\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right), 0,0\right)$$

Allo stesso modo si determinano i quaternioni che esprimono le rotazioni attorno agli assi y e z:

$$Q_2 = \left(\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right), 0, \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right), 0\right)$$

$$Q_3 = \left(\cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right), 0,0, \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\right)$$

~ ~

Volgiamo ora determinare, nota una MCD, il quaternione che esprime la stessa rotazione, e cioè:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{C2Q} \longrightarrow \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Sapendo che:

$$C_a^b = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Sommiamo gli elementi sulla diagonale:

$$C_{11} + C_{22} + C_{33} = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$$
$$= 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 3q_0^2 - (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

Considerando:

$$N^2(Q) = 1 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \rightarrow (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 1 - q_0^2$$

Allora:

$$C_{11} + C_{22} + C_{33} = 3q_0^2 - 1 - q_0^2 = 4q_0^2 - 1$$

$$4q_0^2 = 1 + C_{11} + C_{22} + C_{33} \rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33} \rightarrow q_0}{4}}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}$$

Considerando:

$$C_{12} - C_{21} = 2(q_1q_2 + q_0q_3) - 2(q_1q_2 - q_0q_3) = 2q_1q_2 + 2q_0q_3 - 2q_1q_2 + 2q_0q_3 = 4q_0q_3$$

$$q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_0} = \frac{C_{12} - C_{21}}{4\frac{1}{2}\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}$$

$$q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{2\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}$$

Allo stesso modo:

$$C_{13} - C_{31} = 2(q_1q_3 - q_0q_2) - 2(q_1q_3 + q_0q_2) = 2q_1q_3 - 2q_0q_2 - 2q_1q_3 - 2q_0q_2 = -4q_0q_2$$

$$q_2 = \frac{C_{13} - C_{31}}{-4q_0} \rightarrow q_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{2\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}$$

Infine:

$$C_{23} - C_{32} = 2(q_2q_3 + q_0q_1) - 2(q_2q_3 - q_0q_1) = 2q_2q_3 + 2q_0q_1 - 2q_2q_3 + 2q_0q_1 = 4q_0q_1$$

$$q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{2\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}}$$