Passaggio da un Quaterione alla matrice dei coseni direttori C

From C to Q

Algoritmo

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{C2Q}} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Ricapitolando, le espressioni degli elementi del quaternione sono :

$$\boldsymbol{q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}}} \qquad \boldsymbol{q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_0}}$$

$$\boldsymbol{q_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4q_0}} \qquad \boldsymbol{q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_0}}$$

ESERCITAZIONI

Function Matlab

Function Matlab per la determinazione della matrice dei coseni direttori note le componenti di un quaternione.

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Q2C}} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_a^b = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}$$

Esercizio

Definire il quaternione che esprime una rotazione antioraria (positiva) intorno all'asse **x** di un angolo $\theta_1 = 15°$ e calcolare la relativa matrice

Risultato

Espressione del quaternione $Q_1 = \left(cos\frac{15}{2}, \sin\frac{15}{2}, 0{,}0\right)$

$$\begin{pmatrix} cos\frac{15}{2} \\ sin\frac{15}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{Q2C}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9659 & 0.2588 \\ 0 & -0.2588 & 0.9659 \end{pmatrix}$$

From C to Q

Esercizio

Calcolare la matrice per una rotazione antioraria di 30° intorno all'asse y
Definire le componenti del quaternione nota la matrice dei coseni direttori

$$\begin{pmatrix} 0.8660 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5000 & 0 & 0.8660 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{C2Q}} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 0.8660 + 1 + 0.8660} = 0.9659 \quad \rightarrow \quad cos\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = \frac{0,5+0,5}{4(0,9659)} = 0.2588 \quad \rightarrow \quad sin\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$q_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} cos\left(\frac{30}{2}\right) \\ 0 \\ sin\left(\frac{30}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risultati

Ry=matrix_rot(deg2rad(30), 'A', 'y')

$$\begin{pmatrix} 0.8660 & 0 & -0.5000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5000 & 0 & 0.8660 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\textbf{C2Q}} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 0.8660 + 1 + 0.8660} = 0.9659 \quad \rightarrow \quad cos\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = \frac{0,5+0,5}{4(0,9659)} = 0.2588 \quad \rightarrow \quad sin\left(\frac{30}{2}\right)$$

$$q_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} cos\left(\frac{30}{2}\right) \\ 0 \\ sin\left(\frac{30}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Function Matlab

Function Matlab che implementa il prodotto tra quaternioni.
Siano **P** e **Q** due quaternioni di componenti $P\left(p_0, \underline{p}\right) \quad Q\left(q_0, \underline{q}\right)$.

$$\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\textbf{prodQ}} \longrightarrow \left(p_0 q_0 - \underline{p} \cdot \underline{q} + p_0 \underline{q} + q_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}\right)$$

Il prodotto tra quaternioni è ancora una volta un quaternione.

La parte scalare (reale) del quaternione prodotto è data da $p_0 q_0 - \underline{p} \cdot \underline{q}$.
La parte vettoriale (immaginaria), invece, dalla somma di tre vettori $p_0 \underline{q} + q_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}$.

Quest'ultima applicazione è utile per la determinazione del quaternione che esprime le tre successive rotazioni θ_1 θ_2 θ_3 intorno agli assi x, y, z.

Esercizio

Dati $\theta_1 = 15°$; $\theta_2 = 20°$; $\theta_3 = 60°$, determinare il quaternione che esprime le tre successive rotazioni.

Risultati

Dati $\theta_1 = 15°$; $\theta_2 = 20°$; $\theta_3 = 60°$, determinare il quaternione che esprime le tre successive rotazioni.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{15}{2} \\ \sin\frac{15}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{20}{2} \\ 0 \\ \sin\frac{20}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} \cos\frac{60}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \sin\frac{60}{2} \end{pmatrix}$$

Come detto precedentemente, il quaternione che esprime le tre successive rotazioni è il quaternione Q dato da

$$Q = Q_1(Q_2Q_3)$$

Si procede svolgendo prima il prodotto dentro parentesi, successivamente questo verrà moltiplicato al quaternione Q_1.

Quaternioni e rotazioni

$$Q_2,\ Q_3 \longrightarrow \boxed{\text{prodQ}} \longrightarrow Q_2 Q_3 = \begin{pmatrix} 0.8529 \\ 0.0868 \\ 0.1504 \\ 0.4924 \end{pmatrix}$$

$$Q_1,\ (Q_2 Q_3) \longrightarrow \boxed{\text{prodQ}} \longrightarrow Q = Q_1(Q_2 Q_3) = \begin{pmatrix} 0.8342 \\ 0.1974 \\ 0.0848 \\ 0.5078 \end{pmatrix}$$

Infine si determina la matrice dei coseni direttori che esprime le tre successive rotazioni.

$$Q = Q_1(Q_2 Q_3) = \begin{pmatrix} 0.8342 \\ 0.1974 \\ 0.0848 \\ 0.5078 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\text{Q2C}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0.4698 & 0.8808 & 0.0590 \\ -0.8138 & 0.4063 & 0.4155 \\ 0.3420 & -0.2432 & 0.9077 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Calcolare la matrice data dal prodotto delle tre matrici che esprimono le rotazioni, rispettivamente, intorno agli assi z, y, x :

$$R = R_z^{anti}(60°)R_y^{anti}(20°)R_x^{anti}(15°)$$

E confrontarla con la matrice C dell'esercizio precedente

Risultati

$$C = \begin{pmatrix} 0.4698 & 0.8808 & 0.0590 \\ -0.8138 & 0.4063 & 0.4155 \\ 0.3420 & -0.2432 & 0.9077 \end{pmatrix}$$

La matrice C risulta uguale alla matrice che si otterrebbe se si moltiplicassero le tre matrici che esprimono le rotazioni, rispettivamente, intorno agli assi z, y, x.

$$R_z(60°)R_y(20°)R_x(15°) = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.8660 & 0 \\ -0.8660 & 0.5000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9397 & 0 & -0.3420 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.3420 & 0 & 0.9397 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9659 & 0.2588 \\ 0 & -0.2588 & 0.9659 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.4698 & 0.8808 & 0.0590 \\ -0.8138 & 0.4063 & 0.4155 \\ 0.3420 & -0.2432 & 0.9077 \end{pmatrix}$$