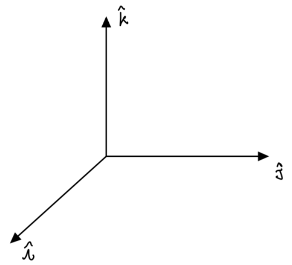
Quaternioni

Può essere considerato un'estensione del concetto di numero complesso, introdotto da Hamilton nel 1843.

Supponiamo che i versori dei tre assi di un SdR siano la rappresentazione geometrica della parte immaginaria di tre numeri complessi: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$,



che per definizione di numero complesso:

$$\hat{\imath}^2 = \hat{\jmath}^2 = \hat{k}^2 = -1$$

E per i quali, se consideriamo il mutuo prodotto, valgono le relazioni:

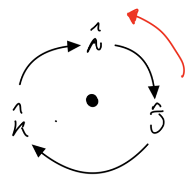


Fig.1

$$\begin{cases} \hat{\imath}\hat{\jmath} = \hat{k} = -\hat{\jmath}\hat{\imath} \\ \hat{\jmath}\hat{k} = \hat{\imath} = -\hat{k}\hat{\jmath} \\ \hat{k}\hat{\imath} = \hat{\jmath} = -\hat{\imath}\hat{k} \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo ricordare tali risultati con una semplice regola mnemonica. Se ci spostiamo tra i vertici del triangolo di figura 1 secondo il senso della freccia nera allora il risultato del prodotto è positivo (negativo secondo il verso della freccia rossa).

Il quaternione Q è una quaterna ordinata di valori esprimibile in varie forme:

$$Q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1\hat{\imath} + q_2\hat{\jmath} + q_3\hat{k}$$

La prima forma è detta compatta, la seconda è detta estesa (o polinomiale) ed è, quindi, un elemento di uno spazio quadri-dimensionale. Esiste anche una terza forma espressiva:

$$Q = \left(q_0, \underline{q}\right)$$

che separa la parte reale q_0 da quella immaginaria (o vettoriale) $\underline{q} = q_1\hat{\imath} + q_2\hat{\jmath} + q_3\hat{k}$.

Operazioni tra quaternioni

Consideriamo due quaternioni Q e P:

$$Q = (q_0, q_1, q_2, q_3); P = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

L'operazione di **somma** che ha come risultato un quaternione C e che gode della proprietà commutativa, è tale che:

$$P + Q = Q + P = C(p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

Il quaternione si può considerare come un'estensione del campo vettoriale, non solo per l'aggiunta di un quarto elemento ma anche perché un vettore può essere visto come un particolare quaternione di parte reale nulla, così come uno scalare può essere visto come un particolare quaternione di parte vettoriale nulla:

$$vettore = Q\left(0, \underline{q}\right); scalare = Q(q_0, \underline{0})$$

Vediamo le condizioni che soddisfano l'**uguaglianza tra due quaternioni**

$$P = Q \leftrightarrow \begin{cases} p_0 = q_0 \\ \underline{p} = \underline{q} \end{cases}$$

e cioè stessa parte reale e stessa parte vettoriale.

Definiamo ora il **prodotto tra due quaternioni**. Dati $P = \left(p_0, \underline{p}\right)$; $Q = \left(q_0, \underline{q}\right)$ si dimostra che:

$$PQ = p_0 q_0 - \underline{p} \cdot \underline{q} + p_0 \underline{q} + q_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}$$

Letteralmente: il prodotto di due quaternioni è dato dal prodotto delle parti reali, meno il prodotto scalare delle parti vettoriali, più il primo scalare per il secondo vettore, più il secondo scalare per il primo vettore, più il prodotto vettoriale delle parti vettoriali (rispettando l'ordine).

Separando la parte scalare da quella vettoriale:

$$PQ = p_0 q_0 - \underline{p} \cdot \underline{q} + p_0 \underline{q} + q_0 \underline{p} + \underline{p} \times \underline{q}$$

Dimostriamo come si ottiene l'espressione del prodotto tra quaternioni. Scriviamoli, per prima cosa, in forma estesa:

$$PQ = \left(p_0 + p_1 \hat{\imath} + p_2 \hat{\jmath} + p_3 \hat{k}\right)\left(q_0 + q_1 \hat{\imath} + q_2 \hat{\jmath} + q_3 \hat{k}\right)$$

Moltiplichiamo gli elementi tra parentesi secondo la regola del prodotto polinomiale:

$$PQ = p_0 q_0 + p_0 q_1 \hat{\imath} + p_0 q_2 \hat{\jmath} + p_0 q_3 \hat{k} + p_1 q_0 \hat{\imath} + p_1 q_1 \hat{\imath}^2 + p_1 q_2 \hat{\imath}\hat{\jmath} + p_1 q_3 \hat{\imath}\hat{k} + p_2 q_0 \hat{\jmath} + q_1 p_2 \hat{\jmath}\hat{\imath} \\ + p_2 q_2 \hat{\jmath}^2 + q_3 p_2 \hat{\jmath}\hat{k} + p_3 q_0 \hat{k} + p_3 q_1 \hat{k}\hat{\imath} + p_3 q_2 \hat{k}\hat{\jmath} + p_3 q_3 \hat{k}^2$$

Applicando le relazioni (1) per i prodotti tra versori e notando che: $p_0 q_1 \hat{\imath} + p_0 q_2 \hat{\jmath} + p_0 q_3 \hat{k} = p_0 \underline{q}$ si ha:

$PQ = p_0 q_0 + p_0 \underline{q} + p_1 q_0 \hat{\imath} - p_1 q_1 + p_1 q_2 \hat{k} - p_1 q_3 \hat{\jmath} + p_2 q_0 \hat{\jmath} - p_2 q_1 \hat{k} - p_2 q_2 + q_3 p_2 \hat{\imath} + p_3 q_0 \hat{k} + p_3 q_1 \hat{\jmath} - p_3 q_2 \hat{\imath} - p_3 q_3$

Raggruppando gli elementi che moltiplicano q_0, sostituendo alla somma del prodotto delle componenti omologhe il prodotto scalare delle parti vettoriali e raggruppando le componenti di uno stesso versore si ha:

$$PQ = p_0q_0 + p_0\underline{q} + q_0\underline{p} - \underline{p}\cdot\underline{q} + \hat{\imath}(p_2q_3 - p_3q_2) + \hat{\jmath}(p_3q_1 - p_1q_3) + \hat{k}(p_1q_2 - p_2q_1)$$

$$PQ = p_0q_0 + p_0\underline{q} + q_0\underline{p} - \underline{p}\cdot\underline{q} + \underline{p}\times\underline{q}$$

Separando la parte reale da quella vettoriale:

$$PQ = \left(p_0q_0 - \underline{p}\cdot\underline{q}, p_0\underline{q} + q_0\underline{p} + \underline{p}\times\underline{q}\right) \tag{1}$$

Il prodotto in questione non gode della proprietà commutativa, per via della presenza del prodotto vettoriale, infatti:

$$QP = q_0p_0 - \underline{q}\cdot\underline{p} + q_0\underline{p} + p_0\underline{q} + \underline{\boldsymbol{q}}\times\underline{\boldsymbol{p}} = q_0p_0 - \underline{q}\cdot\underline{p} + q_0\underline{p} + p_0\underline{q} - \underline{\boldsymbol{p}}\times\underline{\boldsymbol{q}}$$

Di conseguenza, se determiniamo la differenza tra PQ e QP non avremo il vettore nullo:

$$PQ - QP \neq \underline{0} \rightarrow PQ - QP = \underline{p}\times\underline{q} - \left(-\underline{p}\times\underline{q}\right) = 2\left(\underline{p}\times\underline{q}\right)$$

Quindi la differenza fra due quaternioni è il doppio prodotto vettoriale delle loro parti vettoriali.

Si dimostra che il prodotto tra quaterioni può essere messo anche sotto la seguente forma matriciale:

$$PQ = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Si lascia al lettore la dimostrazione dell'equivalenza della relazione (1) e (2)

Quaternione coniugato

Considerando un quaternione $Q\left(q_0, \underline{q}\right)$, si definisce quaternione coniugato $Q^*\left(q_0, -\underline{q}\right)$ avente cioè la parte vettoriale di segno opposto. Il prodotto QQ^*:

$$\begin{aligned} QQ^* &= q_0^2 - \underline{q}\cdot\left(-\underline{q}\right) + q_0\left(-\underline{q}\right) + q_0\left(\underline{q}\right) + \underline{q}\times\left(-\underline{q}\right) \\ &= q_0^2 + \underline{q}\cdot\underline{q} + 0 \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \sum_{i=0}^{3} q_i^2 = N^2(Q) = |Q|^2 \end{aligned}$$

Se il quaternione ha norma unitaria:

$$|Q| = 1 \rightarrow QQ^* = |Q|^2 = 1$$

Esercizio

$$Q = (1,0,1,2); P = (0,1,1,1)$$

$$|Q| = 1 + 1 + 4 = \sqrt{6}$$

$$PQ = p_0 q_0 - p \cdot q + p_0 q + q_0 p + p \times q$$

$$PQ = 0 - (0 + 1 + 2) + 0 + 1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i(2-1) - j(2) + k(1)$$

$$-3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$PQ = -3 + 2i - j + 2k$$

Per rendere unitaria la norma di Q, basta dividere le componenti per la N(Q):

$$\hat{Q} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

~ ~

Inverso di un Quaternione

Si definisce inverso di un Quaternione:

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q}$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore per Q* otteniamo una nuova espressione di Q^{-1}

$$Q^{-1} = \frac{1}{Q} \frac{Q^*}{Q^*} = \frac{Q^*}{N^2(Q)}$$

Nel caso in cui $N(Q) = 1$ si ha che l'inverso di Q coincide con il suo coniugato Q*:

$$Q^{-1} = Q^*$$

Sempre considerando valida l'ipotesi che la norma di Q sia unitaria possiamo dire anche che:

$$QQ^* = N^2(Q) = 1$$

Calcolando la derivata temporale di tale prodotto otteniamo un valore nullo, perché questo prodotto sarà, nel tempo, costantemente 1:

$$\frac{d}{dt}(QQ^*) = \frac{d}{dt}(1) = 0$$

Scrivendo per esteso la derivata di un prodotto otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(QQ^*) = \dot{Q}Q^* + Q\dot{Q}^* = 0 \rightarrow \dot{Q}Q^* = -Q\dot{Q}^*$$

Esercizio

Dato un quaternione $Q(1,0,1,2)$ determinarne l'inverso.

$$\sum_{i=0}^{3} q_i^2 = N^2(Q) = 1 + 0 + 1 + 2^2 = 6$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{N^2(Q)} = \frac{(1,0,-1,-2)}{6} = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

Lezione 6 – 26/03/2021