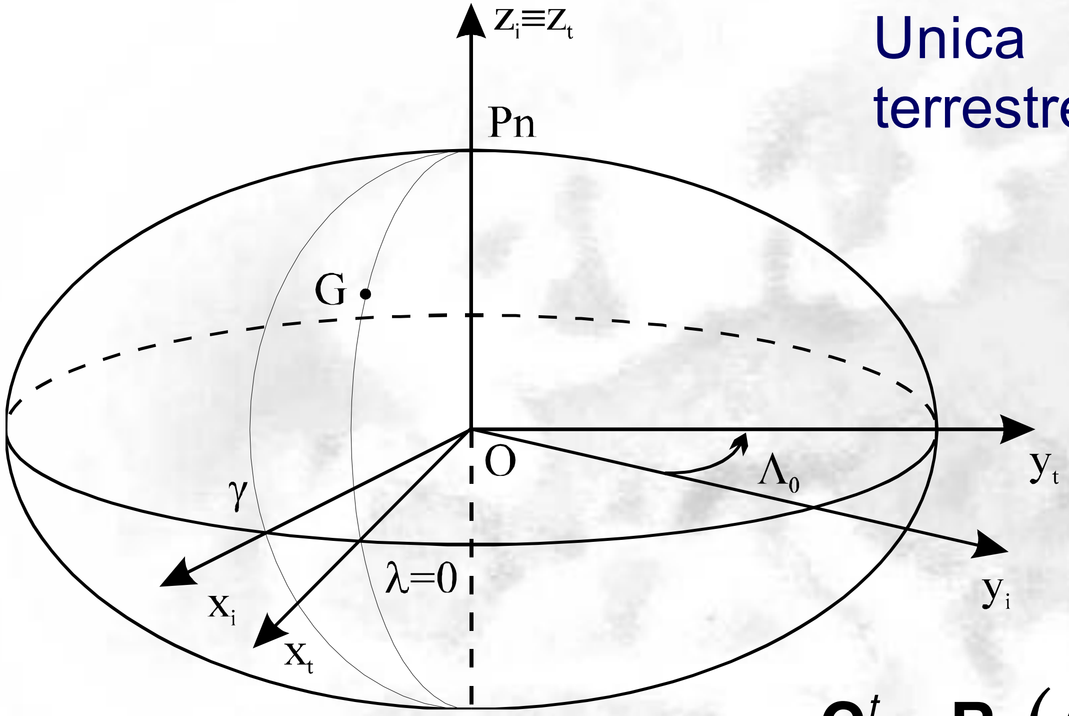
TRASFORMAZIONI TRA I SISTEMI DI RIFERIMENTO IN NAVIGAZIONE

Salvatore GAGLIONE

ECI (i) → ECEF (t)



Unica Rotazione intorno all'asse terrestre di un angolo Λ_0

se t_o istante in cui (i) ≡(t)

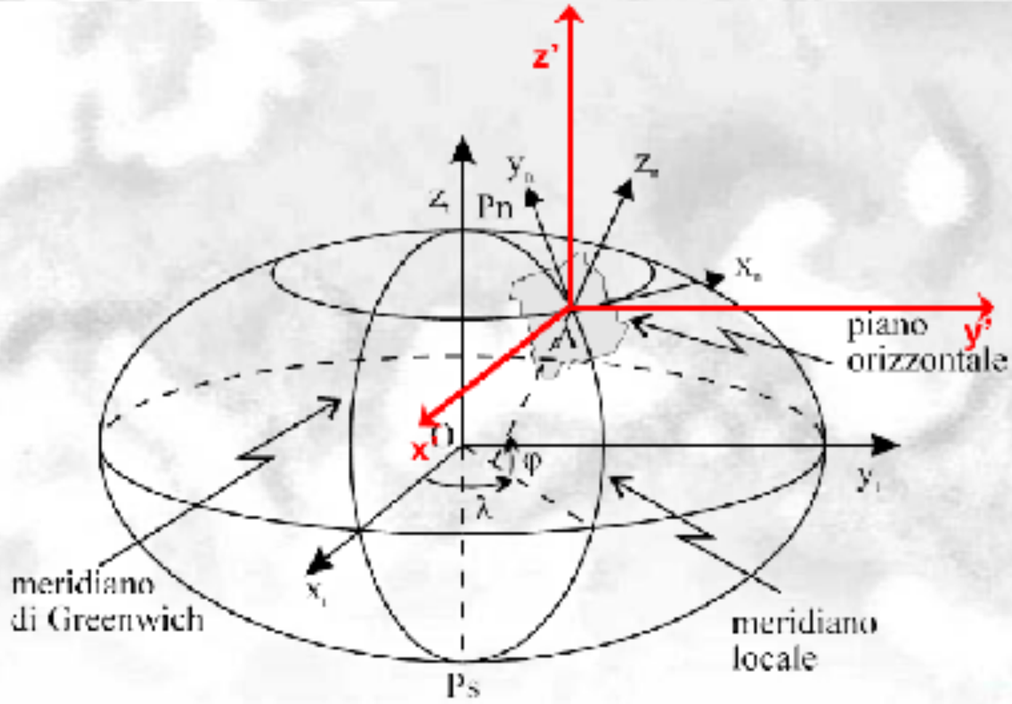
$$\Lambda_0 = \sigma\left(t - t_0\right) - 2\pi\ n$$

$$\mathbf{C}_i^t = \mathbf{R}_z\left(\Lambda_0\right) = \begin{pmatrix} \cos\Lambda_0 & \operatorname{sen}\Lambda_0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\Lambda_0 & \cos\Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Trasformazione ECEF – ENU

Step I: Traslazione
Si trasformano le coordinate ECEF da geocentriche a centrate nell'osservatore (origine del sistema ENU)

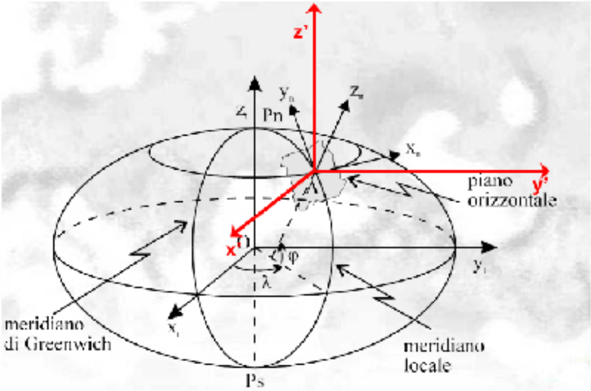
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{ECEF} \\ Y_{ECEF} \\ Z_{ECEF} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$



- Trasformazione ECEF – ENU

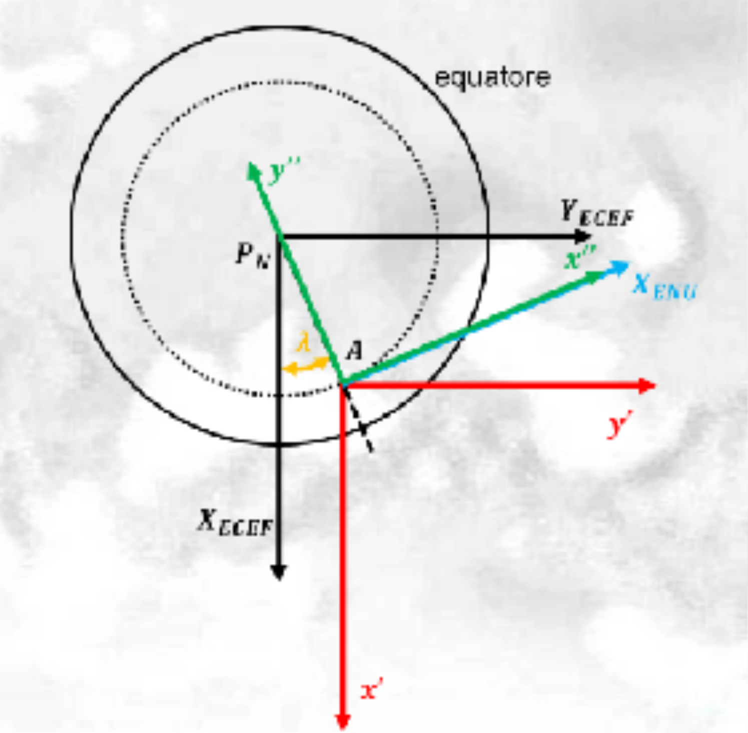
Step II: Rotazione

Dalla terna Ax'y'z' si passa alla terna Ax''y''z'' con asse x'' allineato all'asse X_{ENU}



$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_x([90° + \lambda]) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

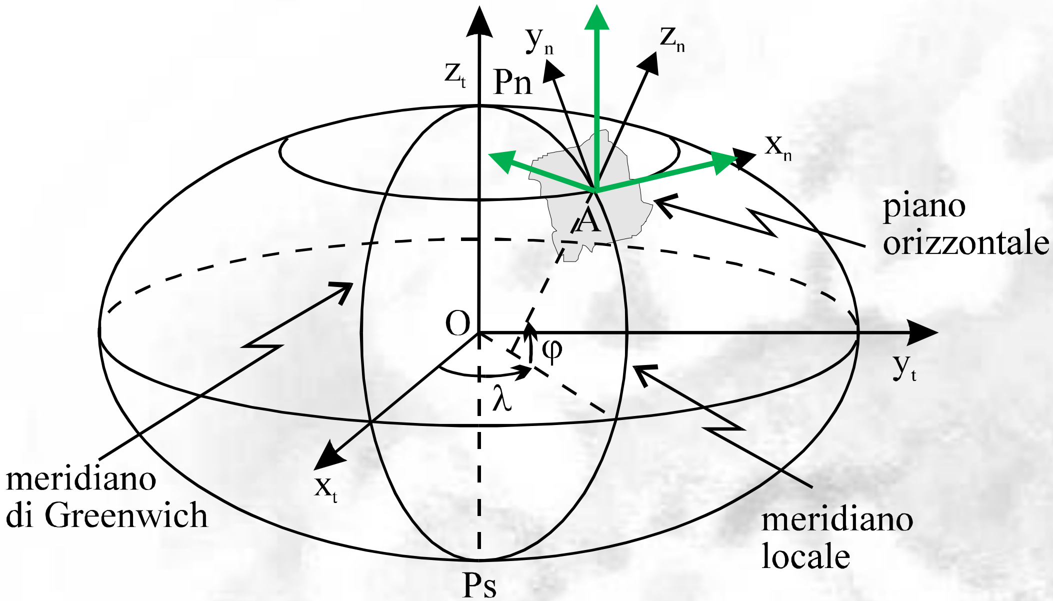
$$= \begin{bmatrix} cos(90° + \lambda) & sin(90° + \lambda) & 0 \\ -sin(90° + \lambda) & cos(90° + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

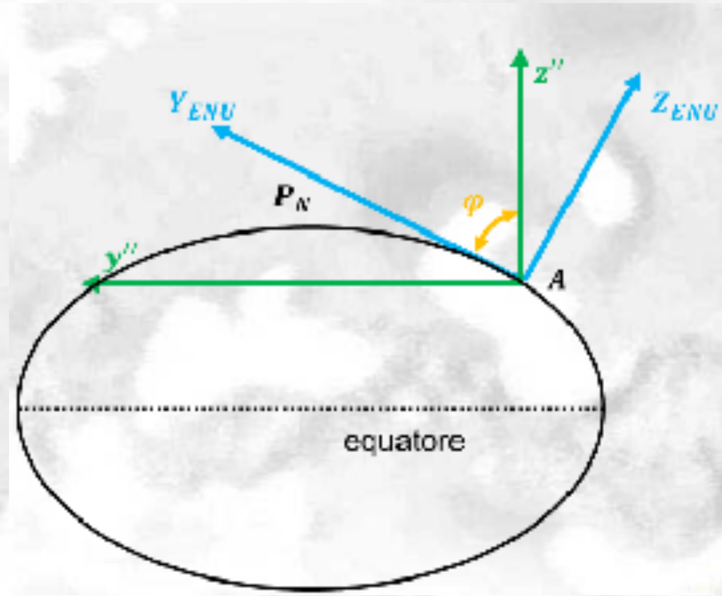


Trasformazione ECEF – ENU

Step III: Rotazione

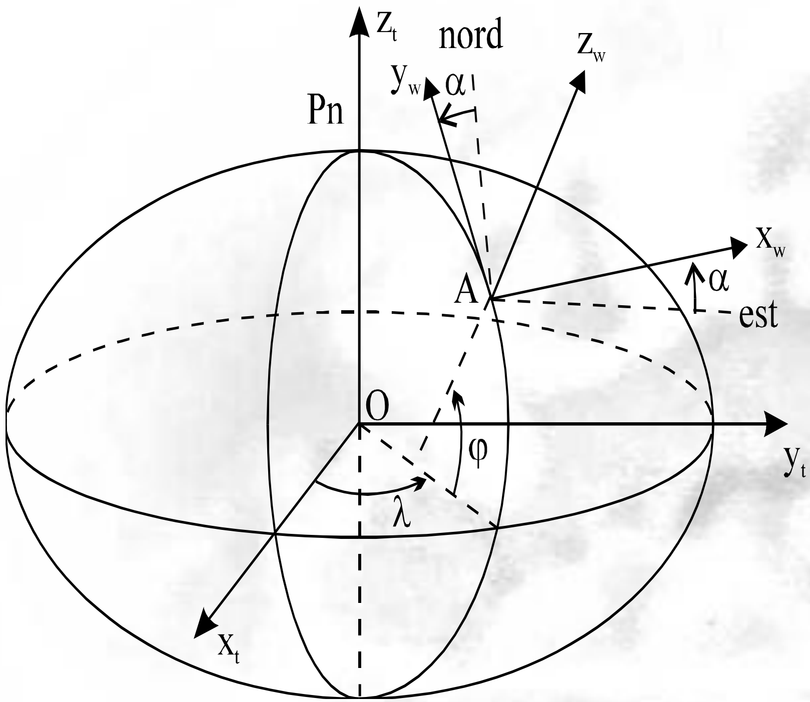
Dalla terna Ax”y”z” si passa alla terna ENU





$$\begin{bmatrix} X_{ENU} \\ Y_{ENU} \\ Z_{ENU} \end{bmatrix} = R_x([90^o - \varphi]) \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o - \varphi) & sin(90^o - \varphi) \\ 0 & -sin(90^o - \varphi) & cos(90^o - \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

ECEF (t) → ENU (n)



Due Rotazioni

1. intorno all'asse terrestre di un angolo λ in modo da portare l'**asse x** nella direzione EST di *A*;
2. intorno al nuovo asse *x* di un angolo (90°- φ) in modo da portare l'**asse z** lungo la verticale;

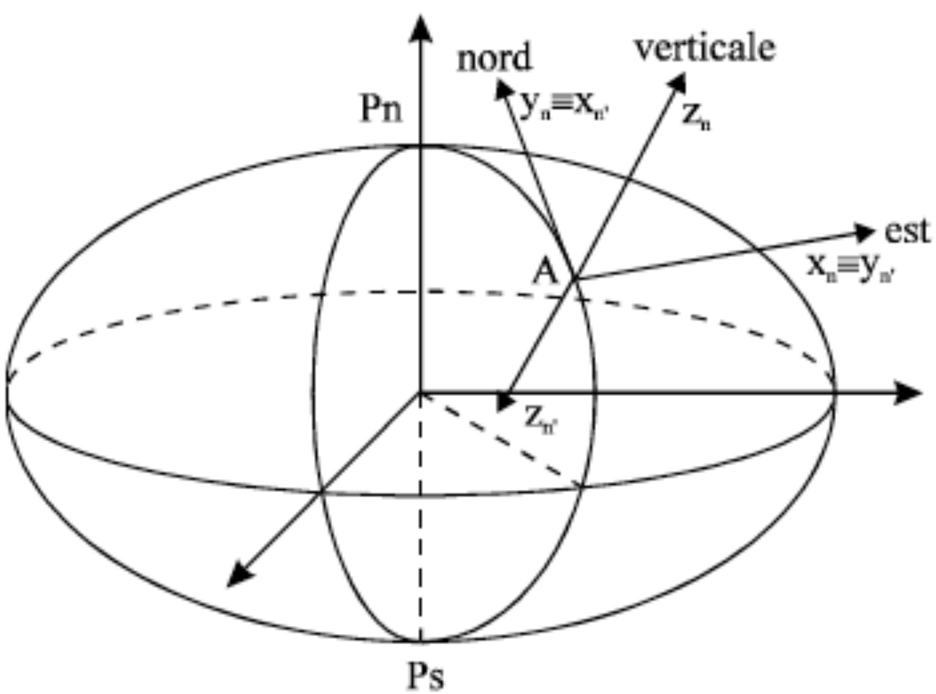
$$C_t^n = R_x(90° - \varphi) R_z(90° + \lambda)$$

$$\mathbf{C}_t^n = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

ENU (n) → NED (n')

Due Rotazioni

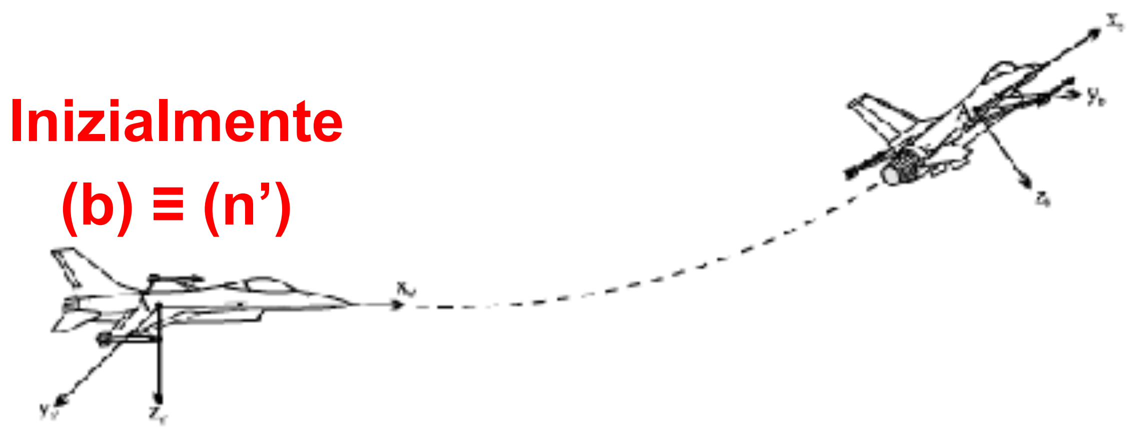
1. intorno alla verticale di 90°(x≡N)
2. intorno al nuovo asse x di 180°



$$\mathbf{C}_n^{n'} = \mathbf{R}_x(180°)\,\mathbf{R}_z(90°)$$

$$\mathbf{C}_n^{n'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NED (n') → **Body (b')**



Per passare dalla terna *NED* alla terna *BODY*, relativa ad un assetto generico dell'aereo, è necessario ricorrere a tre rotazioni successive

1. intorno alla **verticale di un angolo ψ (prora)**;
2. intorno **all'asse trasversale dell'aeromobile di un angolo θ (beccheggio)**;
3. intorno **all'asse longitudinale di un angolo ϕ (rollio)**.

NED (n') → Body (b')

$$C_{n'}^{b} = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

$$\mathbf{C}_{n'}^{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

- Sapendo che:

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{C}_a^b \mathbf{V}_a = \mathbf{C}_c^b \mathbf{C}_a^c \mathbf{V}_a$$

Passaggio per una terna intermedia (c)

$$\mathbf{C}_b^a = \left(\mathbf{C}_a^b\right)^T$$

Inversione

è possibile ricavare ogni altra matrice necessaria per passare da un qualunque sistema di coordinate all’altro.

UTILIZZO TERNE INTERMEDIE

ECEF (t) → NED (n')

$$C_t^{n'} = C_n^{n'} C_t^n$$

$$\mathbf{C}_n^{n'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_t^{n} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_t^{n'} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\cos\varphi\cos\lambda & -\cos\varphi\sin\lambda & -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

UTILIZZO TERNE INTERMEDIE

ENU (n) → Body (b)

$$\mathbf{C}_n^b = \mathbf{C}_{n'}^b \, \mathbf{C}_n^{n'}$$

$$\mathbf{C}_n^{n'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{n'}^b = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

INVERSIONE

- Per esempio il passaggio dalla **terna di navigazione** a **quella terrestre**:

$$\mathbf{C}_n^t = (\mathbf{C}_t^n)^T \quad \longleftarrow \quad \mathbf{C}_t^n = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$C_n^t = \begin{bmatrix} -sin\lambda & -sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \end{bmatrix}$$

- Per il passaggio dalla terna terrestre alla terna body:

$$\mathbf{C}_t^b = \mathbf{C}_{n'}^b \mathbf{C}_n^{n'} \mathbf{C}_t^n$$

b

$$\mathbf{C}_n^{n'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{C}_t^n = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin\varphi\cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

c

$$\mathbf{C}_{n'}^b = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$