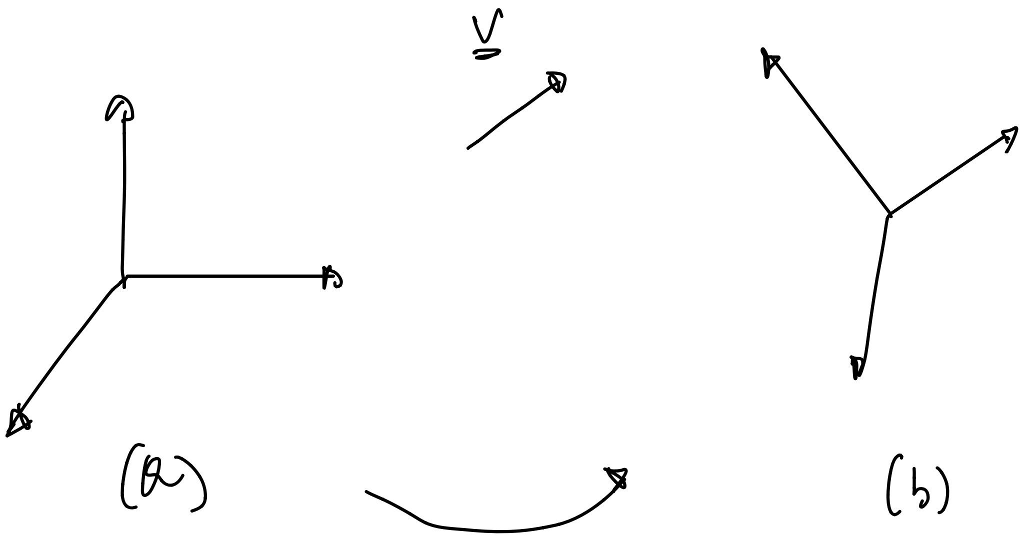
Proprietà di una MCD

- Inverso di una MCD

Siano (a) e (b) due SDR ed C_a^b la MCD che esprime il passaggio da (a) a (b) ; Se conosciamo le coordinate di un vettore V nel primo sistema di riferimento allora:



$$\underline{V}_b = C_a^b \, \underline{V}_a$$

Se premoltiplichiamo ambo i membri per $\left[C_a^b\right]^{-1}$ si ha:

$$\left[C_a^b\right]^{-1} \underline{V}_b = \underbrace{\left[C_a^b\right]^{-1} C_a^b}_{\underline{I}} \, \underline{V}_a = \underline{V}_a$$

da cui:

$$\underline{V}_a = \left[C_a^b\right]^{-1} \underline{V}_b$$

Se (a) e (b) sono due sistemi ortogonali (condizione sempre rispettata per i

SDR utilizzati in navigazione) allora la matrice C_a^b è una matrice <u>ortogonale</u> per le quali si ricorda $C^{-1} = C^T$ e quindi:

$$\underline{v}_a = \left[C_a^b\right]^T \underline{v}_b = C_b^a \underline{v}_b$$

avendo indicato con:

$$C_b^a = \left[C_a^b\right]^T$$

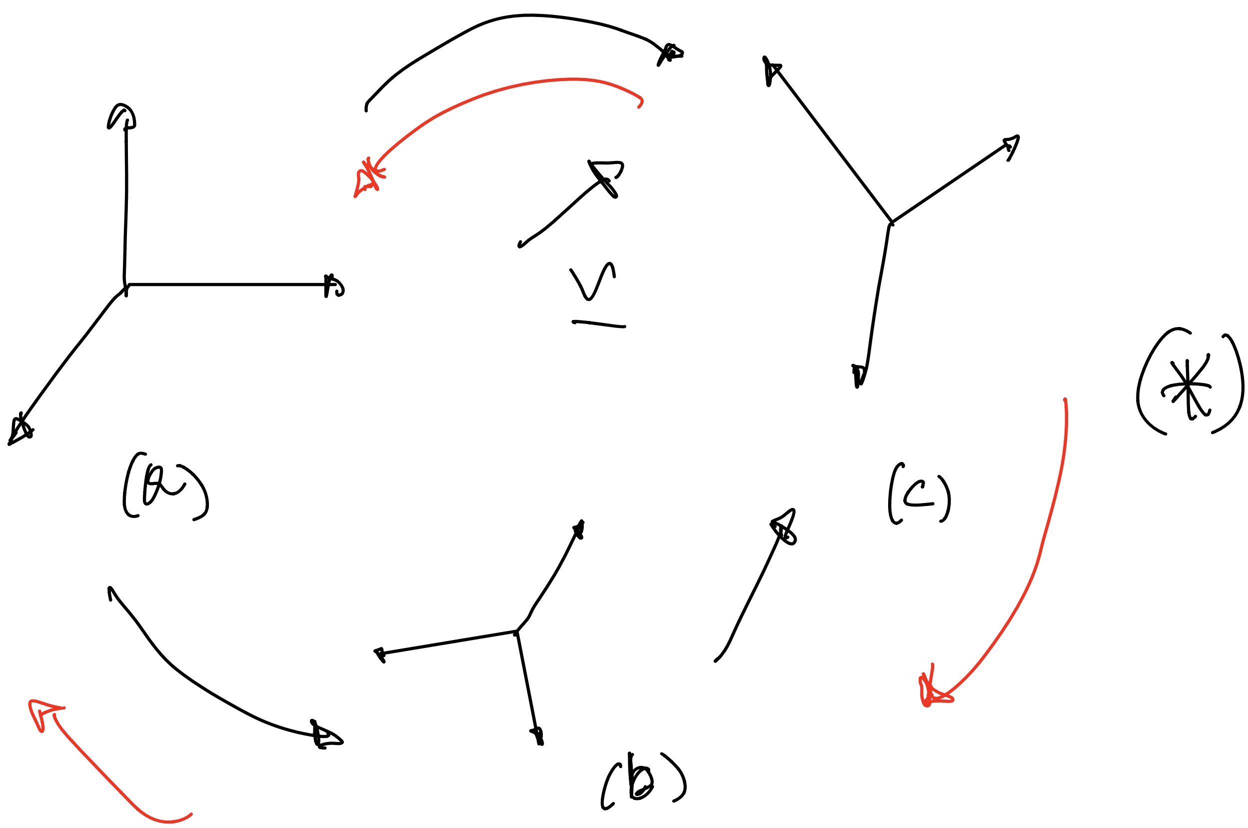
e quindi il passaggio inverso tra i due SDR è ottenuto dalla trasposta della MCD in luogo dell'inversa (matrice più complessa da essere calcolata)

- <u>Passaggio per una terna intermedia</u>

Siano (a) e (c) due SDR ed C_a^c la MCD che esprime il passaggio da (a) a (c) ; Le componenti di un vettore <u>V</u> in questi due SDR si ottengono:

$$\underline{v}_c = C_a^c \underline{v}_a \quad (1')$$

Se consideriamo una terna intermedia (b), e cioè:



Allora possiamo trasferire le coordinate di un vettore nel sistema (c) passando prima da (a) a (b) e poi da (b) a (c), e cioè:

$$(a) \rightarrow (b) \qquad \underline{V}_b = C_a^b \, \underline{V}_a \qquad (2')$$

$$(b) \rightarrow (c) \qquad \underline{V}_c = C_b^c \, \underline{V}_b \qquad (3')$$

sostituendo la relazione (2’) nella (3’), si ha:

$$\underline{V}_c = C_b^c \, C_a^b \, \underline{V}_a \Rightarrow \underline{V}_c = C_a^c \, \underline{V}_a$$

dove:.

$$\boxed{C_a^c = C_b^c \, C_a^b} \qquad (4')$$

NB: *la prima rotazione del SDR (o primo trasferimento di coordinate) è rappresentato dalla matrice più a destra del prodotto al secondo membro della (3’). Le rotazioni si leggono pertanto da destra verso sinistra*

se premoltiplichiamo per la matrice $\left[C_a^c\right]^{-1}$ ambo i membri della relazione $(1')$ si ha:

$$\left(C_a^c\right)^{-1} \underline{V}_c = \underline{V}_a$$

che nell'ipotesi di matrice ortogonale diventa:

$$V_a = \left[C_a^c\right]^T \underline{V}_c = C_c^a \, \underline{V}_c$$

considerando la (4') si ha:

$$C_c^a = \left[C_a^c\right]^T = \left[C_b^c \, C_a^b\right]^T$$

ricordando che nel caso di matrici ortogonali (per es. A e B) si ha: $(AB)^T = B^T A^T$

allora:

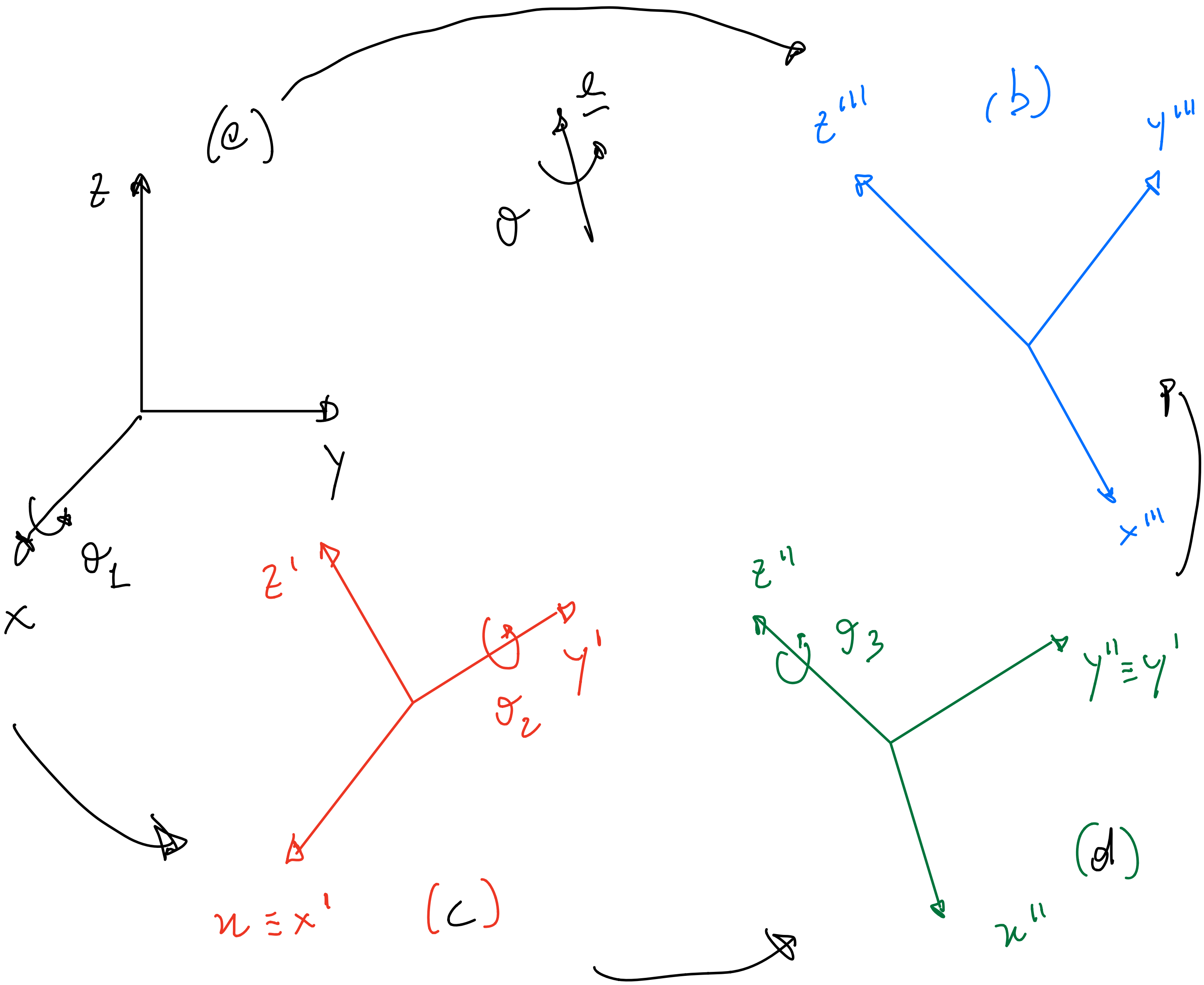
$$C_c^a = \left[C_b^c \, C_a^b\right]^T = \left[C_a^b\right]^T \left[C_b^c\right]^T = C_b^a \, C_c^b$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_c^a = C_b^a \, C_c^b}$$

equazione che poteva anche essere ottenuta considerando il passaggio tra (a) a (c) seguendo le trasformazioni intermedie rappresentate dalle frecce rosse di figura (*).

Questa importante proprietà permette di ottenere il passaggio tra due sistemi di riferimenti (a) e (b) o attraverso una sola rotazione attorno ad un asse istantaneo di rotazione oppure per il tramite di due SDR intermedi - nell'esempio di figura i sistemi (c) e (d) - ottenuti ruotando il primo sistema prima intorno al suo asse x poi il sistema di arrivo intorno all'asse y ed infine intorno all'asse z.



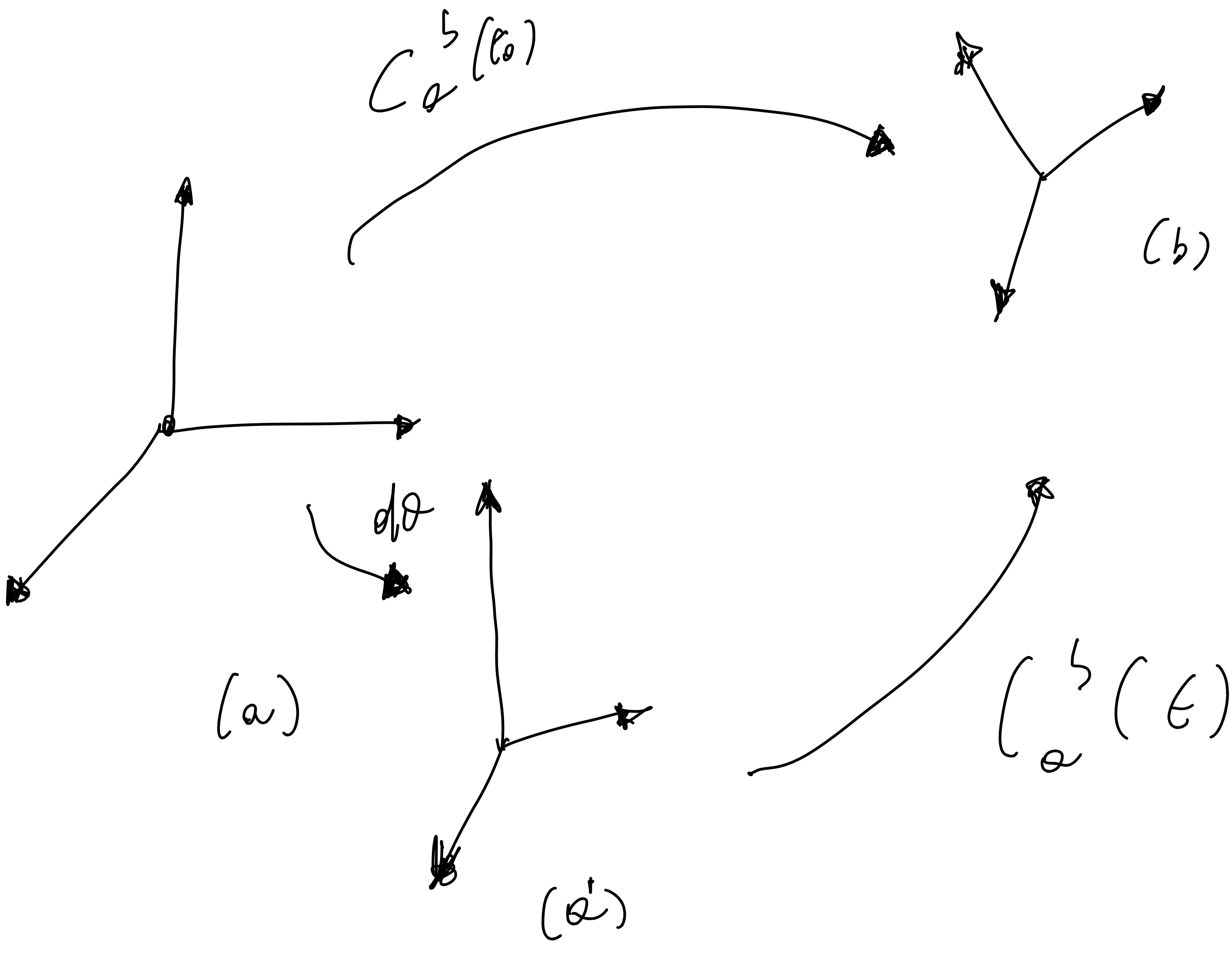
Pertanto si ha:

$$\boxed{C_a^b = R_z(\theta_3)\, R_y(\theta_2)\, R_x(\theta_1)} \qquad (5')$$

DERIVATA DI UNA MCD

Sia $C_a^b(t_0)$ la MCD che all'epoca t_0 esprime il passaggio tra (a) e (b) e sia (a) in moto relativo con velocità angolare $\underline{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$ rispetto a (b).

Dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt il sistema (a) sarà ruotato di un angolo infinitesimo $d\theta$ (si veda figura).



La MCD che esprima all'epoca $t = t_0 + dt$ il passaggio tra il sistema di partenza ruotato (a') ed il sistema di arrivo (b), sarà dato da:

$$C_e^b(t) = R(d\theta)\, C_e^b(t_0) = \left[I - A(d\theta)\right] C_e^b(t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$C_e^b(t) = C_e^b(t_0) - A(d\theta)\, C_e^b(t_0)$$

portando $C_e^b(t_0)$ al primo membro, dividendo per dt, si ha:

$$\frac{C_e^b(t) - C_e^b(t_0)}{dt} = -\frac{A(d\theta)\, C_e^b(t_0)}{dt}$$

Considerando il $\lim_{dt \to 0}$ per ambo i membri

$$\lim_{dt \to 0} \frac{C_e^b(t) - C_e^b(t_0)}{\Delta t} = \lim_{dt \to 0} - A\left(\frac{d\theta}{dt}\right) C_e^b(t_0)$$

RAPPORTO INCREMENTALE

VELOCITA' ANGOLARE ISTANTANEA

E quindi:

$$\dot{C}_a^b = -A(\underline{\omega})\, C_a^b(t_0) \qquad (1'')$$

Se si considera il passaggio inverso, e cioè da (b) ad (a) considerando il primo in moto relativo con velocità angolare $\underline{\omega}' = -\underline{\omega}$ applicando le proprietà di inversione dei una MCD si ha:

$$\dot{C}_b^a = C_b^a(t_0)\, A(\underline{\omega}') \qquad (2'')$$

Le equazioni $(1'')$ o $(2'')$ - a secondo di quale SDR è considerato come quello di partenza - permettono di aggiornare una MCD.

Infatti, calcolato l'elemento generico $\dot{C}_{ij}$ della <u>Matrice Derivata</u>, applicando la $(1'')$ o $(2'')$, l'elemento $C_{ij}(t)$ <u>aggiornato</u> (e cioè all'epoca successiva t) della MCD si ottiene:

$$C_{ij}(t) = C_{ij}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{C}_{ij}\, dt = C_{ij}(t_0) + \dot{C}_{ij}\, \Delta t$$

Applicando il Metodo dei Trapezi