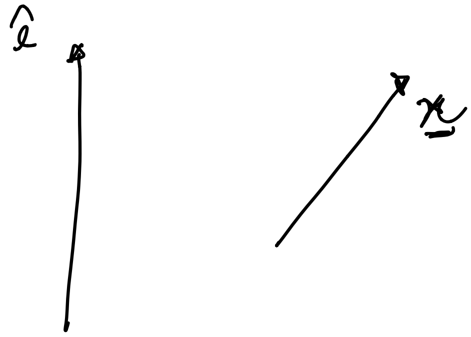
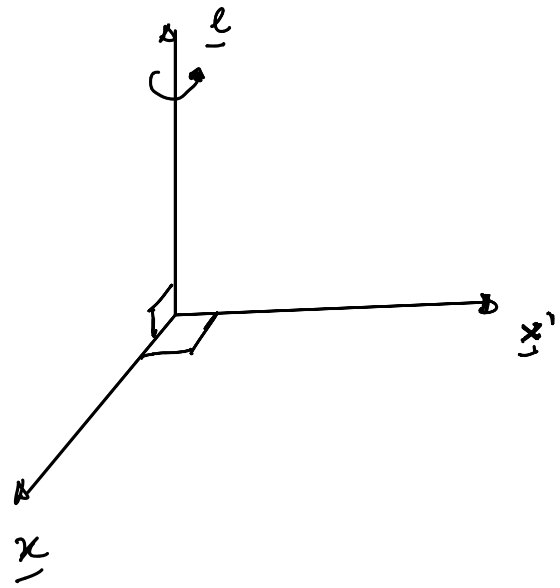
Rotazione

Si determini la relazione vettoriale che esprime la rotazione di un vettore $\underline{x}$ intorno ad una direzione qualsiasi esperissi dal versore $\hat{\ell}$



Consideriamo il caso in cui i vettori sono perpendicolari e la rotazione $\underset{\sim}{\vartheta}$ cui è sottoposta il vettore $\underline{x}$ è di 90° in <u>senso antiorario</u> intorno ad $\hat{\ell}$

1°) $\underline{\ell} \perp \underline{x}$ $\quad \vartheta = \frac{\pi}{2}$

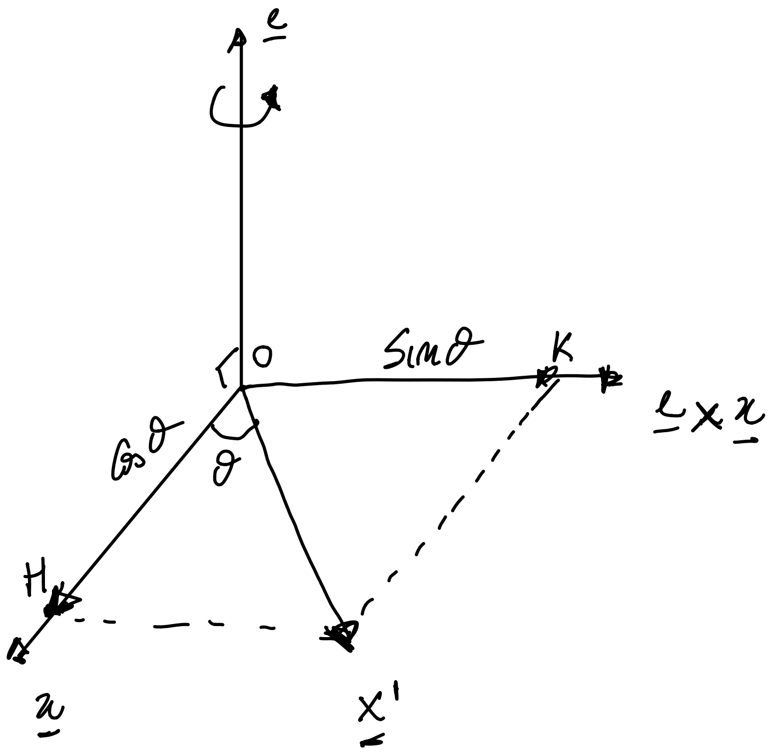


dopo la rotazione il vettore $\underline{x}$ si disporrà secondo la direzione $\underline{x}'$ in modo che la terna $\underline{x}\,\hat{\ell}\,\underline{x}'$ sia levogira, pertanto la relazione vettoriale è espressa dalla relazione

$$\boxed{\underline{x}' = \underline{\ell} \times \underline{x}} \qquad (1)$$

Consideriamo il caso in cui i vettori sono perpendicolari e la rotazione $\underset{\sim}{\vartheta}$ cui è sottoposta il vettore $\underline{x}$ è di un angolo qualsiasi in <u>senso antiorario</u> intorno ad $\hat{\ell}$

2°) $\underline{e} \perp \underline{x} \qquad \vartheta \neq \frac{\pi}{2}$



dopo la rotazione il vettore $\underline{x}$ si disporrà secondo la direzione $\underline{x}'$ appartenente al piano $(\underline{x}, \underline{e} \times \underline{x})$. Tale vettore potrà essere ottenuto dalla relazione che esprime la somma della sue componenti $\overrightarrow{OH}$ ed $\overrightarrow{OK}$ rispettivamente secondo le direzioni $\underline{x}$ ed $\underline{e} \times \underline{x}$:

$$\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} = \underline{x}' = \cos\vartheta \, \underline{x} + \sin\vartheta \, \underline{e} \times \underline{x}$$

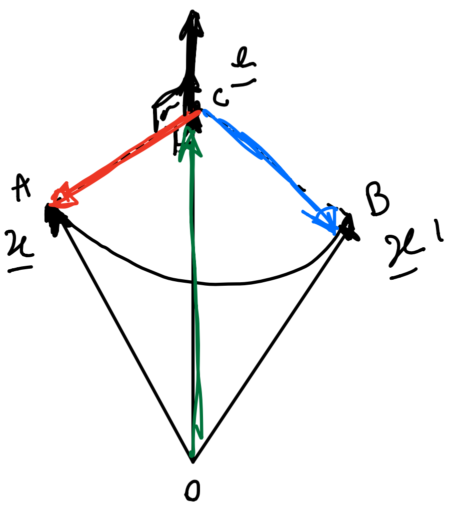
$$\boxed{\underline{x}' = \cos\vartheta \, \underline{x} + \sin\vartheta \, \underline{e} \times \underline{x}} \qquad (2)$$

Nel caso in cui $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ la relazione (2) si riduce alla relazione (1), infatti:

$$\underline{x}' = 0 + 1 \, \underline{e} \times \underline{x}$$

Consideriamo adesso il caso generico in cui i due vettori non sono perpendicolari tra loro e la rotazione non è di 90°

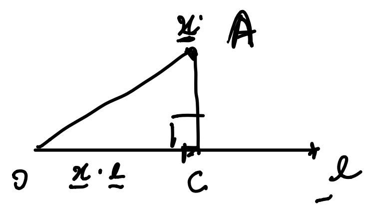
3°) $\underline{e} \not\perp \underline{x}$, $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$.



$A\hat{C}B$

Dopo la rotazione il vettore $\underline{x}'$ può essere ottenuto dalla somma vettoriale del vettore $\vec{OC}$, diretto lungo $\hat{e}$ e di modulo pari alla proiezione di $\underline{x}$ lungo tale direzione , e del vettore $\vec{CB}$ perpendicolare ad $\hat{e}$ e ruotato di ϑ. rispetto al vettore $\vec{CA}$.
Da tale considerazioni passiamo a determinare queste due componenti, partendo dalla prima $\vec{OC}$:

$|\bar{OC}| = ?$



$\vec{OC}$ è la proiezione di $\underline{x}$ lungo $\hat{e}$ e quindi ottenuto dal prodotto scalare di tali vettori.

$$\vec{OC} = (\underline{e} \cdot \underline{x})\,\underline{e}$$

Determiniamo adesso il vettore $\vec{CA}$ dato dalla differenza tra $\underline{x}$ ed $\vec{OC}$

$$\vec{CA} = \underline{x} - (\underline{x} \cdot \underline{e})\,\underline{e}$$

$\vec{CB}$, dalla considerazione fatta in precedenza, può essere ottenuto vettorialmente considerando l'espressione (2), che si riporte per semplicità

$$\boxed{\underline{x}' = \cos\vartheta\, \underline{x} + \sin\vartheta\, \underline{l} \times \underline{x}} \quad (2)$$

Sostituendo $\vec{CA}$ con $\underline{x}$, si ha:

$$\vec{CB} = \cos\vartheta \left[\underline{x} - (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l}\right] + \sin\vartheta\, \underline{l} \times \left[\underline{x} - (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l}\right] =$$

$$= \cos\vartheta\, \underline{x} - \cos\vartheta (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} + \sin\vartheta\, \underline{l}\times\underline{x} - \sin\vartheta\, \underline{l} \times \underbrace{\cancel{(\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l}}}_{\text{VETTORI PARALLELI}}$$

$$= \boxed{\cos\vartheta\, \underline{x} - \cos\vartheta (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} + \sin\vartheta\, \underline{l}\times\underline{x} = \vec{CB}}$$

Possiamo quindi determinare $\underline{x}'$, infatti:

$$\underline{x}' = \vec{OC} + \vec{CB} = (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} + \cos\vartheta\, \underline{x} - \cos\vartheta (\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} + \sin\vartheta\, \underline{l}\times\underline{x}$$

$$\boxed{\underline{x}' = \cos\vartheta\, \underline{x} + (1-\cos\vartheta)(\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} + \sin\vartheta\, \underline{l}\times\underline{x}} \quad (3)$$

questa relazione (3) è del tutto <u>generale</u>, comprende il caso in cui

$\underline{l} \perp \underline{x}$, infatti notando che in questo caso il prodotto scalare tra $\hat{\underline{l}}$ e $\underline{x}$

è nullo e sostituendo nella (3) si ha:

$$\underline{x}' = \cos\vartheta\, \underline{x} + (1-\cos\vartheta)\cancel{(\underline{x}\cdot\underline{l})}\underline{l} + \sin\vartheta\, \underline{l}\times\underline{x}$$

e cioè:

$$\underline{x}' = \cos\vartheta\, \underline{x} + \sin\vartheta\, \underline{e} \times \underline{x} \qquad (3) \rightarrow (2)$$

Relazione (2) che comprendeva il caso (1) per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

Da tali considerazioni è possibile considerare la (3) l'equazione <u>generale</u> che esprime la rotazione di un vettore intorno ad un asse.

Determiniamo ora la forma compatta dell'equazione vettoriale (3), e cioè:

$$\underline{x}' = \cos\vartheta\, \underline{x} + (1-\cos\vartheta)(\underline{x}\cdot\underline{e})\underline{e} + \sin\vartheta(\underline{e}\times\underline{x}) = C\,\underline{x}$$

Vogliamo cioè determinare quella matrice C (di dimensioni 3x3) che premoltiplicata per il vettore $\underline{x}$ (3x1) mi fornisca le componenti del vettore $\underline{x}'$ (3x1), rotazione di $\underline{x}$ intorno a $\underline{e}$

A tal fine consideriamo l'equazione vettoriale al secondo membro della (3) come somma di tre prodotti matriciali $C_i\,\underline{x}$ (con i = 1:3):

$$\underline{x}' = C_1\underline{x} + C_2\underline{x} + C_3\underline{x} = (C_1 + C_2 + C_3)\,\underline{x}$$

in modo da calcolare la matrice C come:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (4)$$

Iniziamo dal primo termine del secondo membro della (3) che poniamo:

$$C_1\,\underline{x} = \underbrace{\cos\vartheta\, \underline{x}}_{\text{prodotto scalare vettore}} = \begin{bmatrix}\cos\vartheta\, x_1\\ \cos\vartheta\, x_2\\ \cos\vartheta\, x_3\end{bmatrix}$$

La matrice C_1 che mi permetterà di ottenere lo stesso risultato, se premoltiplicata per $\underline{x}$, è:

$$\boxed{C_1 = \cos\vartheta\, I_3 = \begin{bmatrix}\cos\vartheta & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & \cos\vartheta\end{bmatrix}} \qquad (5)$$

infatti:

$$C_1 \underline{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\, x_1 \\ \cos\theta\, x_2 \\ \cos\theta\, x_3 \end{bmatrix} \quad \text{c.v.d}$$

Passiamo ora al secondo termine del secondo membro della (3) che poniamo:

$$C_2 \underline{x} = (1-\cos\theta)(\underline{x}\cdot\underline{l})\underline{l} = (1-\cos\theta)\,(x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3)\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$C_2 \underline{x} = (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} l_1^2 x_1 + l_1 l_2 x_2 + l_1 l_3 x_3 \\ l_1 l_2 x_1 + l_2^2 x_2 + l_2 l_3 x_3 \\ l_1 l_3 x_1 + l_2 l_3 x_2 + l_3^2 x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{C_2}{(1-\cos\theta)} \underline{x} = \begin{bmatrix} l_1^2 x_1 + l_1 l_2 x_2 + l_1 l_3 x_3 \\ l_1 l_2 x_1 + l_2^2 x_2 + l_2 l_3 x_3 \\ l_1 l_3 x_1 + l_2 l_3 x_2 + l_3^2 x_3 \end{bmatrix}$$

La matrice $C_2/(1-\cos\theta)$ che permetterà di ottenere lo stesso risultato, se premoltiplicata per $\underline{x}$, è:

$$\frac{C_2}{1-\cos\theta} = \underline{l}\,\underline{l}^T$$

infatti:

$$\underline{l}\,\underline{l}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_1 l_3 \\ l_2 l_1 & l_2^2 & l_2 l_3 \\ l_1 l_3 & l_2 l_3 & l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\underline{l}\,\underline{l}^T \underline{x} = \begin{bmatrix} l_1^2 x_1 + l_1 l_2 x_2 + l_1 l_3 x_3 \\ l_1 l_2 x_1 + l_2^2 x_2 + l_2 l_3 x_3 \\ l_1 l_3 x_1 + l_2 l_3 x_2 + l_3^2 x_3 \end{bmatrix}$$

E pertanto:

$$\boxed{C_2 = (1-\cos\vartheta)\ \underline{l}\ \underline{l}^T} \qquad (6)$$

Passiamo ora al terzo ed ultimo termine del secondo membro della (3) che poniamo:

$$C_3 \underline{x} = \sin\vartheta\ \underline{l} \times \underline{x} = \sin\vartheta \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

da cui:

$$\underbrace{C_3}_{\sin\vartheta} \underline{x} \simeq \hat{i}\,(l_2 x_3 - l_3 x_2) - \hat{j}\,(l_1 x_3 - l_3 x_1) + \hat{k}\,(l_1 x_2 - l_2 x_1)$$

La matrice $C_3/\sin\vartheta$ che permetterà di ottenere lo stesso risultato, se premoltiplicata per $\underline{x}$, è:

$$\frac{C_3}{\sin\vartheta} = A(\underline{l})$$ *Matrice Antisimmetrica di un vettore*

infatti:

$$A(\underline{l})\,\underline{x} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - l_3 x_2 + l_2 x_3 \\ l_3 x_1 - l_1 x_3 \\ -l_2 x_1 + l_1 x_2 \end{bmatrix}$$

da cui:

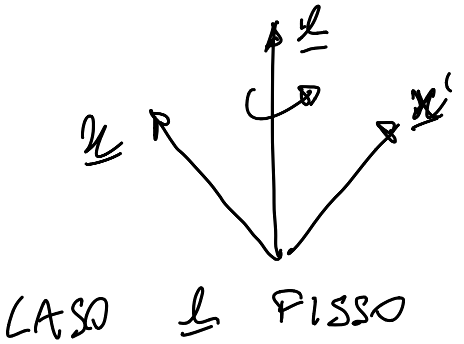
$$\boxed{C_3 = \sin\vartheta\, A(\underline{e})} \quad (7)$$

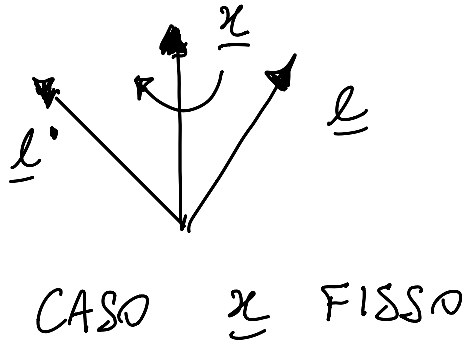
Sostituiamo (5), (6) e (7) nella (4) ottenendo:

$$\boxed{C = \cos\vartheta\, I_3 + (1-\cos\vartheta)\, \underline{e}\,\underline{e}^T + \sin\vartheta\, A(\underline{e})} \quad \text{M.C.D.}$$

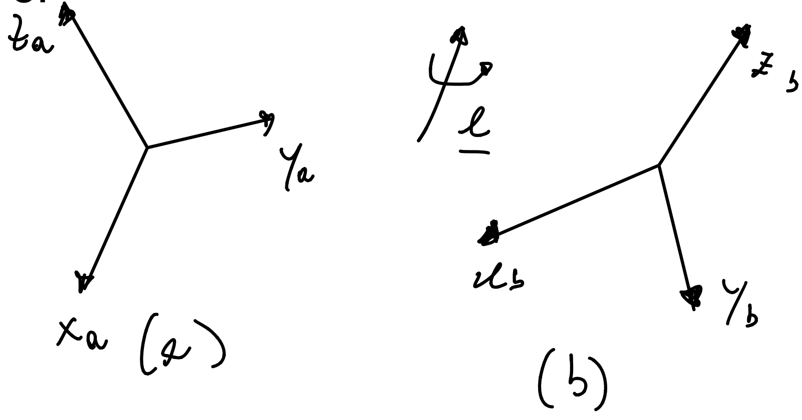
Detta Matrice dei Coseni Direttori (MCD) che esprime la rotazione di un vettore intorno un asse istantaneo di rotazione.

Data l'applicazione navigazionale, per la quale il sistema di riferimento (terna body) in cui effettua le sue misure un sistema di navigazione generico è in rotazione perchè solidale al mobile, conviene considerare non la rotazione di vettori ma quella del Sistema Di Riferimento (SDR).
Pertanto se si considera $\underline{x}$ fisso ed è $\underline{e}$ a ruotare, allora quest'ultimo sarà animato da una rotazione uguale è contraria e cioè dell'angolo $-\vartheta$.





Pertanto la MCD che permette di ottenere le componenti di uno stesso vettore in due SDR - sistema (a) e sistema (b) - ruotati l'uno rispetto all'altro (perchè in moto relativo per esempio) intorno ad un asse instantaneo $\underline{e}$ di rotazione è:



$$C_e^b = \cos(-\vartheta)\, I_3 + [1-\cos(-\vartheta)]\, \underline{e}\,\underline{e}^T + \sin(-\vartheta)\, A(\underline{e})$$

Da cui:

$$C_a^b = \cos\vartheta\, I_3 + (1-\cos\vartheta)\, \underline{e}\,\underline{e}^T - \sin\vartheta\, A(\underline{e}) \quad (8)$$

I 9 elementi della MCD, e cioè:

$$C_a^b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

si possono ottenere dalla somma delle tre matrici (5), (6) e (7):

$$C_a^b = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta \end{bmatrix} + (1-\cos\vartheta) \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_1 e_2 & e_2^2 & e_2 e_3 \\ e_1 e_3 & e_2 e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} - \sin\vartheta \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix}$$

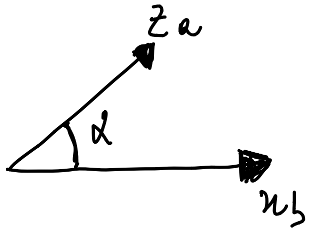
$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_a^b = \begin{bmatrix} \cos\vartheta + (1-\cos\vartheta) e_1^2 & (1-\cos\vartheta) e_1 e_2 + \sin\vartheta\, e_3 & (1-\cos\vartheta) e_1 e_3 - \sin\vartheta\, e_2 \\ (1-\cos\vartheta) e_1 e_2 - \sin\vartheta\, e_3 & \cos\vartheta + (1-\cos\vartheta) e_2^2 & (1-\cos\vartheta) e_2 e_3 + \sin\vartheta\, e_1 \\ (1-\cos\vartheta) e_1 e_3 + \sin\vartheta\, e_2 & (1-\cos\vartheta) e_2 e_3 - \sin\vartheta\, e_1 & \cos\vartheta + (1-\cos\vartheta) e_3^2 \end{bmatrix}} \quad (9)$$

Dove l'elemento generico C_{ij} rappresenta il coseno dell'angolo che l'asse i del sistema di arrivo (b) forma con l'asse j del sistema di partenza (a) -

Es.

$$C_{13} = \cos\alpha$$



Nel caso in cui le rotazioni avvengono intorno agli assi cartesiani allora le MCD si indicheranno con $R_x(\theta)$ dove il pedice stabilisce l'asse di rotazione e l'argomento rappresenta l'angolo di rotazione.
Per ottenere le tre matrici R basta sostituire nella (9) le componenti dei tre versori degli assi coordinati, e cioè:

$$- \ \underline{e} \equiv \hat{i} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_a^b = R_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$- \ \underline{e} \equiv \hat{j} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C_a^b = R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$- \ e \equiv \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_a^b = R_z(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui la rotazione intorno all'asse $\underline{e}$ è infinitesima $d\vartheta$, ricordando che:

$$\begin{cases} \cos(d\vartheta) = 1 \\ \sin d\vartheta = d\vartheta \end{cases}$$

sostituendo nella (9) si ha:

$$C_e^b(d\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & d\vartheta e_3 & -d\vartheta e_2 \\ -d\vartheta e_3 & 1 & d\vartheta e_1 \\ d\vartheta e_2 & -d\vartheta e_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto

$$d\underline{\vartheta} = \begin{bmatrix} d\vartheta_1 \\ d\vartheta_2 \\ d\vartheta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\vartheta e_1 \\ d\vartheta e_2 \\ d\vartheta e_3 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$C_e^b(d\underline{\vartheta}) = \begin{bmatrix} 1 & d\vartheta_3 & -d\vartheta_2 \\ -d\vartheta_3 & 1 & d\vartheta_1 \\ d\vartheta_2 & -d\vartheta_1 & 1 \end{bmatrix} = I_3 - A(d\underline{\vartheta})$$

$$\boxed{C_e^b = I_3 - A(d\underline{\vartheta})} \quad (10)$$

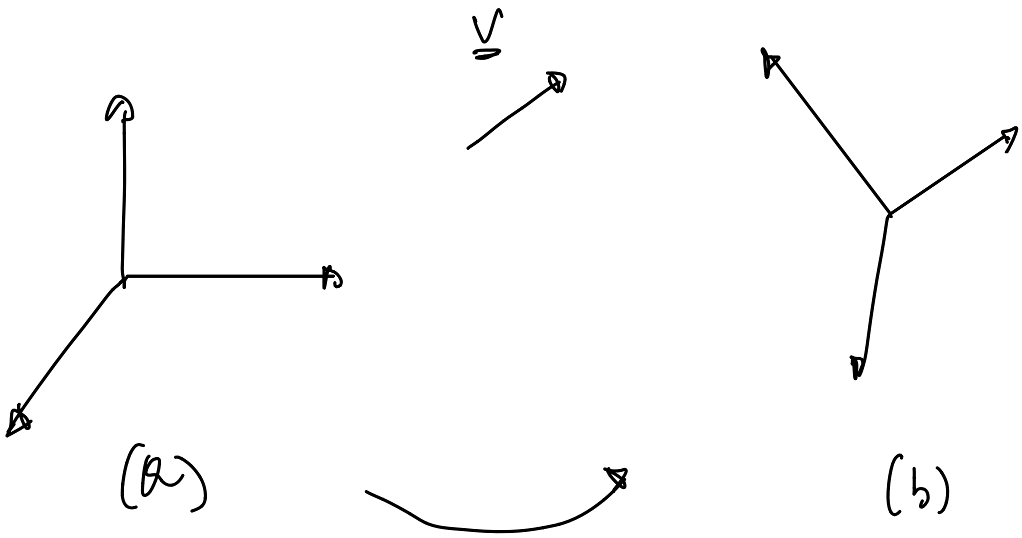
<u>MCD PER ANGOLI INFINITESIMI</u>

.

Proprietà di una MCD

- Inverso di una MCD

Siano (a) e (b) due SDR ed C_a^b la MCD che esprime il passaggio da (a) a (b) ; Se conosciamo le coordinate di un vettore $\underline{V}$ nel primo sistema di riferimento allora:



$$\underline{V}_b = C_a^b \, \underline{V}_a$$

Se premoltiplichiamo ambo i membri per $\left[C_a^b\right]^{-1}$ si ha:

$$\left[C_a^b\right]^{-1} \underline{V}_b = \underbrace{\left[C_a^b\right]^{-1} C_a^b}_{\underline{I}} \, \underline{V}_a = \underline{V}_a$$

da cui:

$$\underline{V}_a = \left[C_a^b\right]^{-1} \underline{V}_b$$

Se (a) e (b) sono due sistemi ortogonali (condizione sempre rispettata per i

SDR utilizzati in navigazione) allora la matrice C_a^b è una matrice <u>ortogonale</u> per le quali si ricorda $C^{-1} = C^T$ e quindi:

$$\underline{v}_a = \left[C_a^b\right]^T \underline{v}_b = C_b^a \underline{v}_b$$

avendo indicato con:

$$C_b^a = \left[C_a^b\right]^T$$

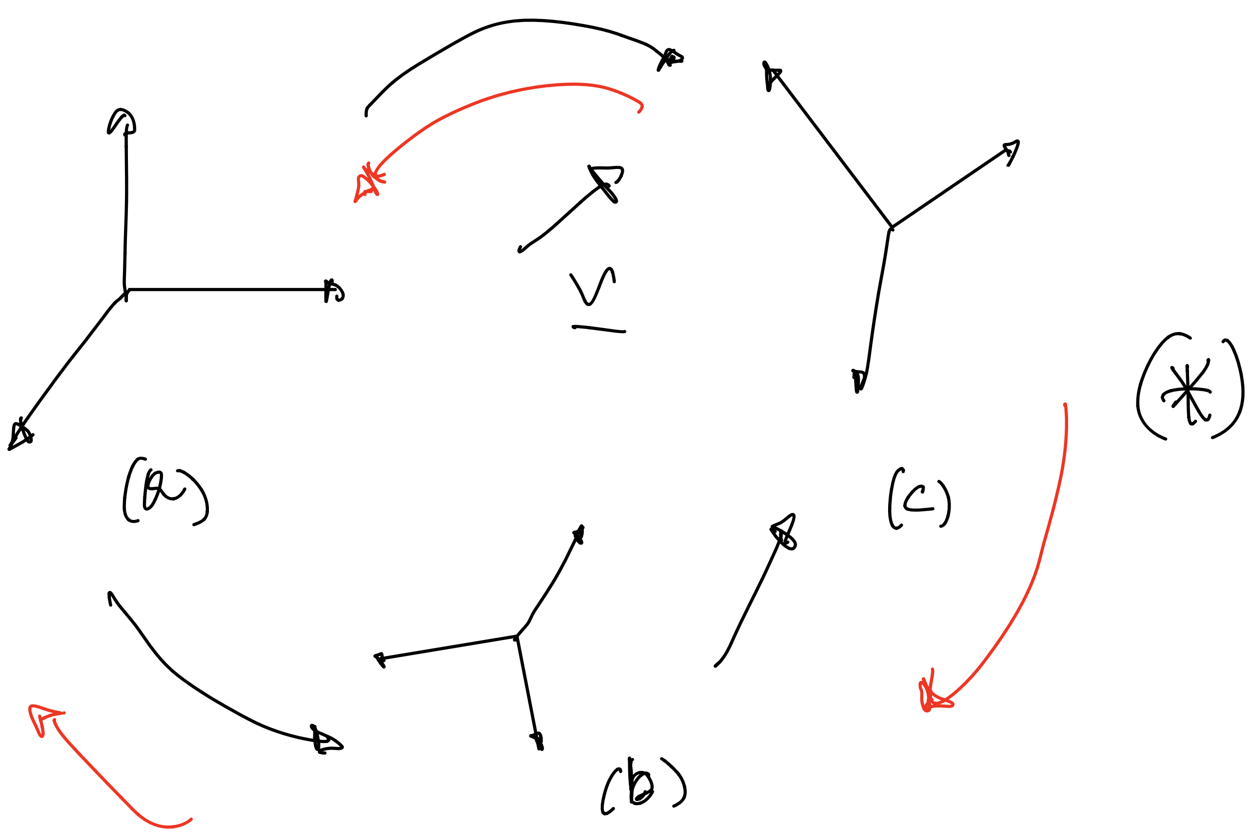
e quindi il passaggio inverso tra i due SDR è ottenuto dalla trasposta della MCD in luogo dell'inversa (matrice più complessa da essere calcolata)

- <u>Passaggio per una terna intermedia</u>

Siano (a) e (c) due SDR ed C_a^c la MCD che esprime il passaggio da (a) a (c) ; Le componenti di un vettore <u>V</u> in questi due SDR si ottengono:

$$\underline{v}_c = C_a^c \underline{v}_a \quad (1')$$

Se consideriamo una terna intermedia (b), e cioè:



Allora possiamo trasferire le coordinate di un vettore nel sistema (c) passando prima da (a) a (b) e poi da (b) a (c), e cioè:

$(a) \rightarrow (b) \qquad \underline{V}_b = C_a^b \, \underline{V}_a \qquad (2')$

$(b) \rightarrow (c) \qquad \underline{V}_c = C_b^c \, \underline{V}_b \qquad (3')$

sostituendo la relazione (2’) nella (3’), si ha:

$$\underline{V}_c = C_b^c \, C_a^b \, \underline{V}_a \Rightarrow \underline{V}_c = C_a^c \, \underline{V}_a$$

dove:.

$$\boxed{C_a^c = C_b^c \, C_a^b} \qquad (4')$$

NB: *la prima rotazione del SDR (o primo trasferimento di coordinate) è rappresentato dalla matrice più a destra del prodotto al secondo membro della (3’). Le rotazioni si leggono pertanto da destra verso sinistra*

se premoltiplichiamo per la matrice $\left[C_a^c\right]^{-1}$ ambo i membri della relazione $(1')$ si ha:

$$\left(C_a^c\right)^{-1} \underline{V}_c = \underline{V}_a$$

che nell’ipotesi di matrice ortogonale diventa:

$$V_a = \left[C_a^c\right]^T \underline{V}_c = C_c^a \underline{V}_c$$

considerando la (4’) si ha:

$$C_c^a = \left[C_a^c\right]^T = \left[C_b^c C_a^b\right]^T$$

ricordando che nel caso di matrici ortogonali (per es. A e B) si ha: $(AB)^T = B^T A^T$

allora:

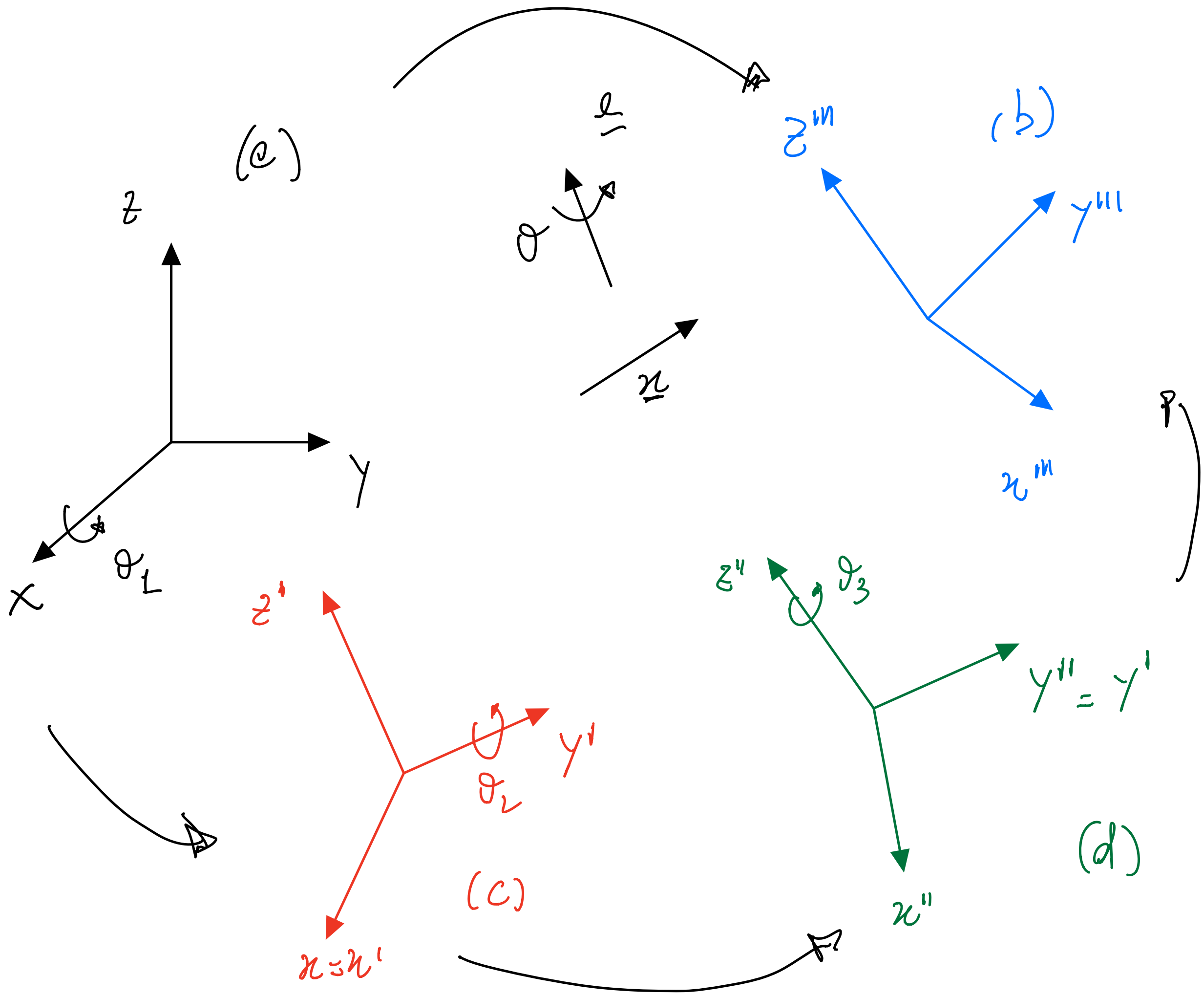
$$C_c^e = \left[C_b^c C_e^b\right]^T = \left[C_e^b\right]^T \left[C_b^c\right]^T = C_b^a C_c^b$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_c^e = C_b^e C_c^b}$$

equazione che poteva anche essere ottenuta considerando il passaggio tra (a) a (c) seguendo le trasformazioni intermedie rappresentate dalle frecce rosse di figura (*).

Questa importante proprietà permette di ottenere il passaggio tra due sistemi di riferimenti (a) e (b) o attraverso una sola rotazione attorno ad un asse istantaneo di rotazione oppure per il tramite di due SDR intermedi - nell'esempio di figura i sistemi (c) e (d) - ottenuti ruotando il primo sistema prima intorno al suo asse x poi il sistema di arrivo intorno all'asse y ed infine intorno all'asse z.



Considerate note le componenti di uno stesso vettore $\underline{x}$ nel sistema (a), nei successivi SdR le stesse componenti si possono ottenere dalle relazioni:

$$\underline{x}_c = R_x(\theta_1)\,\underline{x}_a \;;\quad \underline{x}_d = R_y(\theta_2)\,\underline{x}_c \;,\quad \underline{x}_b = R_z(\theta_3)\,\underline{x}_d$$

Sostituendo nell'ultima reazione le prime due si ha:

- $$\underline{x}_b = R_z(\theta_3)\,R_y(\theta_2)\,\underline{x}_c = R_z(\theta_3)\,R_y(\theta_2)\,R_x(\theta_1)\,\underline{x}_a$$

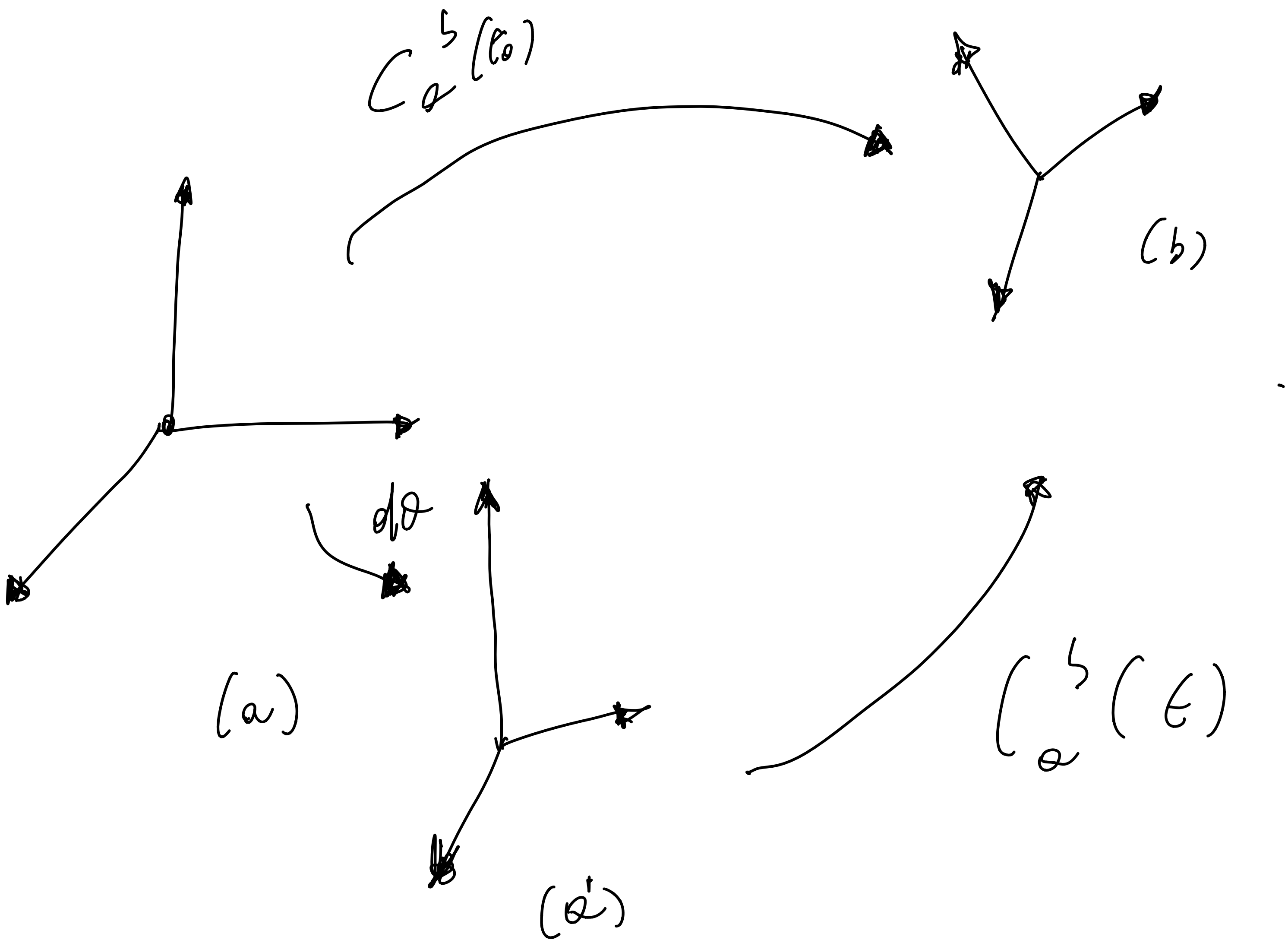
Pertanto si ha:

$$\boxed{C_a^b = R_z(\theta_3)\,R_y(\theta_2)\,R_x(\theta_1)} \qquad (5')$$

DERIVATA DI UNA MCD

Sia $C_a^b(t_0)$ la MCD che all'epoca t_0 esprime il passaggio tra (a) e (b) e sia (a) in moto relativo con velocità angolare $\underline{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$ rispetto a (b).

Dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt il sistema (a) sarà ruotato di un angolo infinitesimo $d\theta$ (si veda figura).



La MCD che esprima all'epoca $t = t_0 + dt$ il passaggio tra il sistema di partenza ruotato (a') ed il sistema di arrivo (b), sarà dato da:

$$C_e^b(t) = R(d\theta)\, C_e^b(t_0) = \left[I - A(d\theta) \right] C_e^b(t_0)$$

$$\Downarrow$$

$$C_e^b(t) = C_e^b(t_0) - A(d\theta)\, C_e^b(t_0)$$

portando $C_e^b(t_0)$ al primo membro, dividendo per dt, si ha:

$$\frac{C_e^b(t) - C_e^b(t_0)}{dt} = -\frac{A(d\theta)\, C_e^b(t_0)}{dt}$$

Considerando il $\lim_{dt \to 0}$ per ambo i membri

$$\lim_{dt \to 0} \underbrace{\frac{C_e^b(t) - C_e^b(t_0)}{\Delta t}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}} = \lim_{dt \to 0} - A\Big(\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\text{VELOCITA' ANGOLARE ISTANTANEA}}\Big)\, C_e^b(t_0)$$

E quindi:

$$\dot{C}_a^b = -A(\omega)\, C_a^b(t_0) \qquad (1'')$$

Se si considera il passaggio inverso, e cioè da (b) ad (a) considerando il primo in moto relativo con velocità angolare $\omega' = -\omega$ applicando le proprietà di inversione dei una MCD si ha:

$$\dot{C}_b^a = C_b^a(t_0)\, A(\omega') \qquad (2'')$$

Le equazioni $(1'')$ o $(2'')$ - a secondo di quale SDR è considerato come quello di partenza - permettono di aggiornare una MCD.

Infatti, calcolato l'elemento generico $\dot{C}_{ij}$ della <u>Matrice Derivata</u>, applicando la $(1'')$ o $(2'')$, l'elemento $C_{ij}(t)$ <u>aggiornato</u> (e cioè all'epoca successiva t) della MCD si ottiene:

$$C_{ij}(t) = C_{ij}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{C}_{ij}\, dt = C_{ij}(t_0) + \dot{C}_{ij}\, \Delta t$$

Applicando il Metodo dei Trapezi