Prerequisiti di Matematica

Esponenziale e Logaritmo

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Definizione (Radice aritmetica)

Se n pari e $a \geq 0$, l'unica radice n-esima (algebrica) **nonnegativa** *di a prende il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.*
Se n dispari e $a \in \mathbb{R}$, l'unica radice n-esima (algebrica) di a prende anche il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.
La radice n-esima aritmetica si indica con $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$.

Attenzione!

Lo stesso simbolo può indicare due cose diverse: la radice aritmetica e la radice algebrica!

$\sqrt{25} = \pm 5$ (radice algebrica)

$\sqrt{25} = 5$ (radice aritmetica)

$\sqrt{x^2} = \pm x$ (radice algebrica)

$\sqrt{x^2} = |x|$ (radice aritmetica)

$\sqrt[3]{x^3} = x$ (radice algebrica e aritmetica)

Abbiamo allora definito la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ per ogni n intero positivo, e per ogni $a \in \mathbb{R}$ o $a \geq 0$ a seconda che n sia dispari o pari.

a^x: $x = m/n$ razionale

Se $a > 0$, definiamo

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

Proprietà delle Potenze a esponente razionale

- P.1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- P.2 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- P.3 $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

a^x: x reale

Per estensione, possiamo definire la potenza a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$

Esempio

Ci possiamo fare un'idea di quanto valga 2^π mediante l'approssimazione decimale $\pi = 3,147\ldots$.
Con approssimazione a 1 cifra decimale, $\pi \approx 3,1 = 31/10$, dunque $2^\pi \approx 2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$.
Con 2 cifre decimali, $\pi \approx 3,14 = 314/100$,
dunque $2^\pi \approx 2^{314/100} = \sqrt[100]{2^{314}}$.

......

Quando si maneggiano i numeri reali non é necessario sapere esattamente quanto valgono, bensí piuttosto conoscere le proprietà di cui godono.

Proprietà delle Potenze

Per ogni $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha:

- P.1 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- P.2 $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- P.3 $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$
- P.4 $a^{-x} = 1/a^x$
- P.5 $a^x > 0,\ a^0 = 1,\ 1^x = 1$
- P.6 se $a \neq 1$ e $a^x = a^y$ allora $x = y$.
- P.7 se $x < y$ allora $\begin{cases} a^x < a^y & \text{per } a > 1 \\ a^x > a^y & \text{per } 0 < a < 1 \end{cases}$
- P.8 se $0 < a \leq b$ allora $\begin{cases} a^x \leq b^x & \text{per } x > 0 \\ a^x \geq b^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

Potenze

ESERCIZIO: Semplificare le espressioni:

$$\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/8} \quad (3-b)^{4/3} : (3-b)^{1/3} \quad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

ESERCIZIO: Calcolare: $\sqrt[6]{64}$ $\quad \sqrt[6]{(-2)^6}$ $\quad \sqrt[3]{-40\cdot 25}$

ESERCIZIO: L'espressione $\left(a^2 b^{1/3}\right)^{-1}$ è uguale a

□ $ab^{1/6}$ □ $\dfrac{1}{ab^2}$ □ $\dfrac{a^{-2}}{b^{1/3}}$ □ $(ab)^{-1/3}$

ESERCIZIO: L'espressione $b\left(a^6 b^3\right)^{1/2}$ è uguale a

□ $\dfrac{1}{a^{12}b^5}$ □ $b^2\sqrt{a}\,a^3$ □ $b^2a^3\sqrt{b}$ □ $b\sqrt{b}\,a^3$

Una semplice equazione esponenziale

Consideriamo un'equazione del tipo $\quad a^x = b$

dove: a e b sono numeri reali assegnati
x è l' incognita

Equazioni di questo tipo si dicono equazioni esponenziali, poiché l' incognita compare dentro l' esponente.
Fino ad ora abbiamo trattato solo equazioni di tipo potenza, poiché gli esponenti erano sempre assegnati e l' incognita compariva solo nella base.

Affinché questa equazione sia ben posta è necessario che siano soddisfatte alcune condizioni

- $\boxed{a > 0}$ poiché solo per $a > 0$ la potenza a^x è definita per ogni valore di x
- $\boxed{b > 0}$ poiché se $a > 0$ segue che anche $a^x > 0$ (P4)
- $\boxed{a \neq 1}$ poiché se $a = 1$ allora $a^x = 1$ per ogni valore di x

Logaritmi

Sotto queste condizioni, si può dimostrare che l' equazione ammette sempre soluzione. Inoltre la soluzione è unica come conseguenza di P8.

DEFINIZIONE: Se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b l' unica soluzione dell' equazione $a^x = b$

Si usa il simbolo $x = \log_a b$

Dalla definizione di logaritmo e dalle proprietà delle potenze discendono le seguenti proprietà dei logartitmi:

P1 $\boxed{\log_a(a^b) = b}$ e $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (per definizione)

P2 $\boxed{\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)}$ (da P2 potenze)

P3 $\boxed{\log_a(b^r) = r \log_a b}$ (da P3 potenze)

In particolare $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ e dunque

P4 $\boxed{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}}$

Logaritmi

P5 $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$ (da P3 potenze, se $b \neq 1$)

P6 $\boxed{\text{se } 0 < b < c \text{ allora } \begin{cases} \log_a b < \log_a c & \text{se } a > 1 \\ \log_a b > \log_a c & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}}$

(da P6 potenze)

P7 $\boxed{\log_a b = \log_a c \, \log_c b}$ (**formula del cambio di base**)

P8 $\boxed{\text{se } \log_a b = \log_a c \text{ allora } b = c}$ (da P8 potenze)

Si ricordi infine che $\boxed{\log_a 1 = 0}$ $\boxed{\log_a a = 1}$