Prerequisiti di Matematica

Potenze ed espressioni irrazionali

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Definiamo l'operazione potenza

Vogliamo precisare il significato della scrittura $\boxed{a^x}$ dove a (base) e x (esponente) sono numeri reali (con qualche restrizione...)

a^x: $x = n$ intero positivo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

- (a) Possiamo effettuare questa operazione per qualsiasi valore reale di a. Se $a = 0$, si ha $0^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$.
- (b) Se $a = 1$, si ha $1^n = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$.
  Se $n = 1$, si ha $a^1 = a$ per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$
- (c) Se $a > 0$, si ha $a^n > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
- (d) Se $a < 0$, si ha $\begin{cases} a^n > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ a^n < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Proprietà delle Potenze a esponente intero positivo

Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{Z}_+$ si ha

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = \left(a^m\right)^n$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $a^n = b^n$ se e soltanto se $\begin{cases} a = \pm b & \text{per } n \text{ pari} \\ a = b & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

   $a^n = a^m$ se e soltanto se $n = m$, <u>a patto che</u> $a \neq 1$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $0 \leq a \leq b$, allora $a^n \leq b^n$ per ogni valore di n.

   Invece, se $a \leq b < 0$, allora $\begin{cases} a^n \geq b^n & \text{per } n \text{ pari} \\ a^n \leq b^n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Attenzione: $\underbrace{(5^2)^3} \neq \underbrace{5^{(2^3)}}$

a^x: $x = -n$ intero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- (a) Possiamo effettuare questa operazione solo se $\boxed{a \neq 0!}$
- (b) Se $a = 1$, si ha $1^{-n} = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
- (c) Se $a > 0$, si ha $a^{-n} > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
- (d) Se $a < 0$, si ha $\begin{cases} a^{-n} > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ a^{-n} < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

É facile convincersi che le propietá (1) (2) (3) (4) valgono anche per esponenti interi negativi (se $a, b \neq 0$). Per quel che riguarda la proprietà (5) invece abbiamo:

- (5') Se $0 \leq a \leq b$, allora $a^{-n} \boxed{\geq} b^{-n}$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$.

  Invece, se $a \leq b < 0$, allora $\begin{cases} a^{-n} \boxed{\leq} b^{-n} & \text{per } n \text{ pari} \\ a^{-n} \boxed{\geq} b^{-n} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$

Applicando le proprietà 3 con $m = -1$ otteniamo

3' $(a^n)^{-1} = a^{-n} = (a^{-1})^n$, in altri termini $\dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$

e di conseguenza la proprietà 2 si estende alla divisione

2' $a^n : a^m = a^{n-m}$

Allora poniamo

a^x: $x = 0$

$$a^0 = 1$$

Infatti $0 = n - n$ e

$$a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$$

Ne segue che la definizione è valida solo se $\boxed{a \neq 0!}$

Abbiamo così definito a^x per ogni $x \in \mathbb{Z}$.

Vogliamo definirlo anche per $x = m/n \in \mathbb{Q}$, in modo che valgano ancora le proprietà 1 2 3 4 5.
Ci basterà allora dare un significato alla scrittura $a^{\frac{1}{n}}$ con n intero positivo. Poi imponendo la proprietà 2 otterremo

a^x: $x = m/n$ razionale

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

La scelta della definizione di $a^{\frac{1}{n}}$ risulta obbligata. Infatti poiché $1 = n/n$, imponendo la proprietà 2 vediamo che

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Allora $a^{\frac{1}{n}}$ deve essere la "radice n-esima'di a, cioè quel numero x con la proprietà che

$$x^n = a$$

Definizione (Radice algebrica)

Per $n \in \mathbb{Z}_+$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *fissati, si dice radice* n*-esima (algebrica) di* a *ogni (eventuale) soluzione* x *dell'equazione* $\boxed{x^n = a}$*.*
Talvolta la si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$*.*

$\sqrt[n]{a}$: $n = 2$ (radice quadrata - algebrica, $\sqrt{a}$)

- se $a > 0$ l'eq. ha due soluzioni di uguale valore assoluto e segno opposto: $\sqrt{a} = \pm x$.
- se $a < 0$ l'eq. non ha soluzioni: non esiste $\sqrt{a}$.
- se $a = 0$ l'eq. ha una soluzione: $\sqrt{0} = 0$

Stesso comportamento per ogni n pari.

$\sqrt[n]{a}$: $n = 3$ (radice cubica - algebrica, $\sqrt[3]{a}$)

Per ogni valore di a l'eq. ha una soluzione. Inoltre

- $\sqrt[3]{a} > 0$ se e solo se $a > 0$.
- $\sqrt[3]{a} = 0$ se e solo se $a = 0$.

L'espressione "radice n-esima"(algebrica) può indicare **uno**, **due** o **nessun** valore, a seconda dei casi. Talvolta si crea la necessità che il simbolo di radice indichi un solo risultato.

Definizione (Radice aritmetica, ovvero $a^{\frac{1}{n}}$)

Se n pari e $a \geq 0$, l'unica radice n-esima (algebrica) **nonnegativa** *di a prende il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.*
Se n dispari e $a \in \mathbb{R}$, l'unica radice n-esima (algebrica) di a prende anche il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.

Attenzione! Lo stesso simbolo può indicare due cose diverse: la radice aritmetica e la radice algebrica

$\sqrt{25} = \pm 5$ (radice algebrica) , $\sqrt{25} = 5$ (radice aritmetica)

$\sqrt{x^2} = \pm x$ (radice algebrica) , $\sqrt{x^2} = |x|$ (radice aritmetica)

$\sqrt[3]{x^3} = x$ (radice algebrica e aritmetica)

Se non espressamente indicato, per noi sarà sempre

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \text{radice } n\text{-esima aritmetica}}$$

Potenze

ESERCIZIO: Semplificare le espressioni:

$$\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/8} \quad (3-b)^{4/3} : (3-b)^{1/3} \quad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

ESERCIZIO: Calcolare: $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[6]{(-2)^6}$ $\sqrt[3]{-40\cdot 25}$

ESERCIZIO: L'espressione $\left(a^2 b^{1/3}\right)^{-1}$ è uguale a

$\square$ $ab^{1/6}$ $\square$ $\frac{1}{ab^2}$ $\square$ $\frac{a^{-2}}{b^{1/3}}$ $\square$ $(ab)^{-1/3}$

ESERCIZIO: L'espressione $b\left(a^6 b^3\right)^{1/2}$ è uguale a

$\square$ $\frac{1}{a^{12}b^5}$ $\square$ $b^2\sqrt{a}\,a^3$ $\square$ $b^2a^3\sqrt{b}$ $\square$ $b\sqrt{b}\,a^3$

Definizione (Espressione irrazionale)

è un'espressione algebrica in cui la variabile compare sotto il simbolo di radice n-esima.
La radice si intende in senso **aritmetico**.

Esempio

$$\sqrt[3]{5-6x+3x^4}, \quad \sqrt{3-x^2}, \quad \frac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4}$$ sono espr. irraz.

Definizione (Dominio di esistenza)

di un'espressione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}$ è l'insieme di tutti i valori della variabile x per cui la radice è ben definita.
Se n dispari, non ci sono restrizioni specifiche.
Se n pari, è necessario che il radicando risulti nonnegativo, cioè $f(x) \geq 0$

Equazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è dispari

ESEMPI: $\sqrt[3]{x^2 + 11x + 27} = x + 3$ $\quad \sqrt[3]{x - x^3} + x - 1 = 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$.
  Ne segue che l'eq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) = (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \quad o \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è dispari

ESEMPI: $\sqrt[3]{2x-1} < 1 \qquad \sqrt[3]{x^3+1} - x - 1 \geq 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} \gtrless g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n \gtrless b^n$ se, e solo se, $a \gtrless b$.
  Ne segue che la diseq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) \gtrless (g(x))^n}$$

Equazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è <u>pari</u>

ESEMPI: $\sqrt{5-x^2} = x-1$, $\sqrt[4]{x^4-3x^2-4} = x$,
$\sqrt{2-x+(x-1)^2} + 2x - 1 = 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$ (se $a, b \geq 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se
  $\boxed{f(x) = (g(x))^n}$

Equazioni irrazionali - indice pari

Da quanto abbiamo detto fin qui, un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di due disequazioni e una equazione)

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) = (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di una disequazione e una equazione)

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo dapprima disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \le g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt{x-1} < \dfrac{1}{4}$, $\sqrt[4]{x-1} \le -3$,
$4 - x > \sqrt{6x - x^2 + 16}$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \ge 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \ge 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \ge 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n < b^n$ se, e solo se, $a < b$ (se $a, b \ge 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se
  $\boxed{f(x) < (g(x))^n}$

Disequazioni irrazionali - indice pari

In conclusione, una disequazione irrazionale di indice pari del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

è equivalente ad un sistema di tre disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo infine disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt[6]{7-x} \geq -3$, $\sqrt{4x^2+3x-1} > 2x-3$,
$x < \sqrt{6+x-x^2} + 1$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$

se $\boxed{g(x) < 0}$ la disequazione è soddisfatta senza ulteriori condizior

se $\boxed{g(x) \geq 0}$ la disequazione è soddisfatta se inoltre

$$\boxed{f(x) > (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Da quanto fin qui detto, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione dell'ultimo sistema, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) > (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$$

Siamo riusciti a definire la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ per ogni n intero positivo, e per ogni $a \in \mathbb{R}$ o $a \geq 0$ a seconda che n sia dispari o pari.

a^x: $x = m/n$ razionale

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

- Consideriamo questa operazione solo per $a > 0$.

Posso pensare di definire $a^{6/4}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, ma $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ e $a^{3/2}$ ha senso solo se $a \geq 0$!

Vogliamo definirlo anche per $x \in \mathbb{R}$, in modo che valgano ancora le proprietà 1 2 3 4 5.
Come? Abbiamo bisogno di usare un procedimento di approssimazione, cioè quello che in analisi matematica si chiama un "passaggio al limite "

a^x: x reale

Definiamo la potenza a^x per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ “per estensione ”da $\mathbb{Q}$

Esempio

Ci possiamo fare un'idea di quanto valga 2^π mediante l'approssimazione decimale $\pi = 3,147\dots$.
Con approssimazione a 1 cifra decimale, $\pi \approx 3,1 = 31/10$, dunque $2^\pi \approx 2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$.
Con 2 cifre decimali, $\pi \approx 3,14 = 314/100$,
dunque $2^\pi \approx 2^{314/100} = \sqrt[100]{2^{314}}$.
......

Quando si maneggiano i numeri reali non é necessario sapere esattamente quanto valgono, bensí piuttosto conoscere le proprietà di cui godono.

Proprietà delle Potenze a esponente reale

Se $a, b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

0. $a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^x = 1$

1. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ e $a^x : a^y = a^{x-y}$
3. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y} = \left(a^y\right)^x$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $a^x = b^x$ se e soltanto se $a = b$
   $a^x = a^y$ se e soltanto se $x = y$, <u>a patto che</u> $a \neq 1$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $0 < a < b$ allora $\begin{cases} a^x < b^x & \text{per } x > 0 \\ a^x > b^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

   Se $x < y$ allora $\begin{cases} a^x < a^y & \text{per } a > 1 \\ a^x > a^y & \text{per } 0 < a < 1 \end{cases}$

Una semplice equazione esponenziale

Consideriamo un'equazione del tipo $a^x = b$

dove: a e b sono numeri reali assegnati
x è l' incognita

Equazioni di questo tipo si dicono equazioni esponenziali, poiché l' incognita compare dentro l' esponente.
Fino ad ora abbiamo trattato solo equazioni di tipo potenza, poiché gli esponenti erano sempre assegnati e l' incognita compariva solo nella base.

Affinché questa equazione sia ben posta è necessario che siano soddisfatte alcune condizioni

- $\boxed{a > 0}$ poiché solo per $a > 0$ la potenza a^x è definita per ogni valore di x
- $\boxed{b > 0}$ poiché se $a > 0$ segue che anche $a^x > 0$ (P4)
- $\boxed{a \neq 1}$ poiché se $a = 1$ allora $a^x = 1$ per ogni valore di x

Logaritmi

Sotto queste condizioni, si può dimostrare che l' equazione ammette sempre soluzione. Inoltre la soluzione è unica come conseguenza di P8.

DEFINIZIONE: Se $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b l' unica soluzione dell' equazione $a^x = b$

Si usa il simbolo $x = \log_a b$

Dalla definizione di logaritmo e dalle proprietà delle potenze discendono le seguenti proprietà dei logartitmi:

P1 $\boxed{\log_a(a^b) = b}$ e $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ (per definizione)

P2 $\boxed{\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)}$ (da P2 potenze)

P3 $\boxed{\log_a(b^r) = r \log_a b}$ (da P3 potenze)

In particolare $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ e dunque

P4 $\boxed{\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}}$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ perché
   $a^0 = 1$, $a^1 = a$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

1. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
   perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo

$$a^{\log_a ts} = ts \quad \text{e anche}$$

$$a^{\log_a t + \log_a s} = a^{\log_a t} a^{\log_a s} = t\, s$$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
1. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
2. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
   perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo

$$a^{\log_a t^k} = t^k \quad \text{e anche}$$

$$a^{k \cdot \log_a t} = \left(a^{\log_a t}\right)^k = t^k$$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a>0,\ a\neq 1,\ t,s>0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
1. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
2. $\log_a t^k = k\cdot\log_a t$ per ogni $k\in\mathbb{R}$
   perché applicando l'esponenziale a entrambi i membri otteniamo

$$a^{\log_a t^k} = t^k \quad \text{e anche}$$

$$a^{k\cdot\log_a t} = \left(a^{\log_a t}\right)^k = t^k$$

   In particolare $\log_a 1/s = -\log_a s$ e dunque

3. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$

1. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
2. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
3. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $\log_a t = \log_a s$ se e solo se $t = s$

Dalle proprietà delle potenze deduciamo le proprietà dei logaritmi:

Proprietà dei Logaritmi

Se $a > 0$, $a \neq 1$, $t, s > 0$ si ha

0. $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
1. $\log_a ts = \log_a t + \log_a s$
2. $\log_a t^k = k \cdot \log_a t$ per ogni $k \in \mathbb{R}$
3. $\log_a t/s = \log_a t - \log_a s$

Rispetto alle equazioni, si ha

4. $\log_a t = \log_a s$ se e solo se $t = s$

Rispetto alle disequazioni, si ha

5. Se $t < s$ allora $\begin{cases} \log_a t < \log_a s & \text{se } a > 1 \\ \log_a t > \log_a s & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

Infine vale la

formula del cambiamento di base

6. $\log_b t = \log_b a \ \log_a t$

perché applicando l'esponenziale in base b si ha

$$b^{\log_b t} = t \quad \text{e anche}$$

$$b^{\log_b a \log_a t} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a t} = (a)^{\log_a t} = t$$

Infine vale la

formula del cambiamento di base

(6) $\log_b t = \log_b a \, \log_a t$

In particolare scegliendo $t = b$ otteniamo

$$\underbrace{\log_b b}_{=1} = \log_b a \, \log_a b$$

e dunque

(6') $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$