Prerequisiti di Matematica

Potenze ed espressioni irrazionali

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Potenze

$$a^x$$

dove a (base) e x (esponente) sono numeri reali (con qualche restrizione...)

a^x: $x = n$ intero positivo

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

1. Possiamo effettuare questa operazione per qualsiasi valore reale di a
2. Se $a = 1$, si ha $1^n = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
3. Se $a > 0$, si ha $a^n > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
4. Se $a < 0$, si ha $a^n \begin{cases} > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$
5. Se $a = 0$, si ha $0^n = 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$

Proprietà delle Potenze a esponente intero positivo

- P.1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- P.2 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- P.3 $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

Inoltre

- $a^n = b^n$ se $\begin{cases} a = b & \text{per } n \text{ dispari} \\ a = \pm b & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$
- Se $a, b \geq 0$, $a^n \leq b^n$ se $a \leq b$ per ogni valore di n.
- Se $a, b < 0$, $a^n \leq b^n$ se $\begin{cases} a \leq b & \text{per } n \text{ dispari} \\ a \geq b & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$

Attenzione: $\underbrace{(5^2)^3}_{=5^6} \neq \underbrace{5^{(2^3)}}_{=5^8}$

a^x: $x = -n$ intero negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

1. Possiamo effettuare questa operazione solo se $\boxed{a \neq 0!}$
2. Se $a = 1$, si ha $1^{-n} = 1$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
3. Se $a > 0$, si ha $a^{-n} > 0$ per ogni valore di $n \in \mathbb{Z}_+$
4. Se $a < 0$, si ha $a^{-n} \begin{cases} > 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ < 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$

Proprietà delle Potenze a esponente intero

É facile convincersi che le propietá **P.1**, **P.2**, **P.3** valgono anche per esponenti interi negativi (se $a \neq 0$). In particolare

- $(a^n)^{-1} = a^{-n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$

a^x: $\quad x = 0$

$$a^0 = 1$$

Questa definizione è suggerita dalle proprietà appena richiamate. Infatti $0 = n - n$ e

$$a^0 = a^{n-n} = a^n : a^n = 1$$

Ne segue che la definizione è valida solo se $\boxed{a \neq 0!}$

Definizione (Radice algebrica)

$n \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{R}$ *fissati. Ogni (eventuale) soluzione* x *dell'equazione*

$$x^n = a$$

si dice radice n-esima (algebrica) di a e si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$: $n = 2$ (radice quadrata - algebrica, $\sqrt{a}$)

- se $a > 0$ l'eq. ha due soluzioni di uguale valore assoluto e segno opposto: $\sqrt{a} = \pm x$.
- se $a < 0$ l'eq. non ha soluzioni: non esiste $\sqrt{a}$.
- se $a = 0$ l'eq. ha una soluzione: $\sqrt{0} = 0$

Stesso comportamento per ogni n pari.

Definizione (Radice algebrica)

$n \in \mathbb{Z}_+$, $a \in \mathbb{R}$ *fissati. Ogni (eventuale) soluzione* x *dell'equazione*

$$x^n = a$$

si dice radice n-esima (algebrica) di a *e si indica con il simbolo* $\sqrt[n]{a}$.

$\sqrt[n]{a}$: $n = 3$ (radice cubica - algebrica, $\sqrt[3]{a}$)

Per ogni valore di a l'eq. ha una soluzione. Inoltre

- se $a > 0$, allora $\sqrt[3]{a} > 0$.
- se $a < 0$, allora $\sqrt[3]{a} < 0$.
- se $a = 0$, allora $\sqrt[3]{a} = 0$.

Stesso comportamento per ogni n dispari.

Il simbolo $\sqrt[n]{\ }$ può indicare **uno**, **due** o **nessun** valore, a seconda dei casi. Talvolta si crea la necessità che il simbolo di radice indichi un solo risultato.

Definizione (Radice aritmetica)

Se n pari e $a \geq 0$, l'unica radice n-esima (algebrica) **nonnegativa** *di a prende il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.*
Se n dispari e $a \in \mathbb{R}$, l'unica radice n-esima (algebrica) di a prende anche il nome di radice n-esima (aritmetica) di a.
La radice n-esima aritmetica si indica con $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$.

Attenzione!

Lo stesso simbolo può indicare due cose diverse: la radice aritmetica e la radice algebrica!

$$\sqrt{25} = \pm 5 \qquad \text{(radice algebrica)}$$

$$\sqrt{25} = 5 \qquad \text{(radice aritmetica)}$$

$$\sqrt{x^2} = \pm x \qquad \text{(radice algebrica)}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{(radice aritmetica)}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x \qquad \text{(radice algebrica e aritmetica)}$$

Abbiamo allora definito la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ per ogni n intero positivo, e per ogni $a \in \mathbb{R}$ o $a \geq 0$ a seconda che n sia dispari o pari.

a^x: $x = m/n$ razionale

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

- Definiamo questa operazione solo per $a > 0$.

Posso pensare di definire $a^{6/4}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$, ma $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ e $a^{3/2}$ ha senso solo se $a \geq 0$!

Proprietà delle Potenze a esponente razionale

É facile convincersi che le propietá P.1, P.2, P.3 valgono anche per esponenti razionali (se $a > 0$).

Potenze

ESERCIZIO: Semplificare le espressioni:

$$\left((1+a)^{2/3}\right)^{3/8} \quad (3-b)^{4/3} : (3-b)^{1/3} \quad \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$$

ESERCIZIO: Calcolare: $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[6]{(-2)^6}$ $\sqrt[3]{-40\cdot 25}$

ESERCIZIO: L'espressione $\left(a^2 b^{1/3}\right)^{-1}$ è uguale a

☐ $ab^{1/6}$ ☐ $\dfrac{1}{ab^2}$ ☐ $\dfrac{a^{-2}}{b^{1/3}}$ ☐ $(ab)^{-1/3}$

ESERCIZIO: L'espressione $b\left(a^6 b^3\right)^{1/2}$ è uguale a

☐ $\dfrac{1}{a^{12}b^5}$ ☐ $b^2\sqrt{a}\,a^3$ ☐ $b^2a^3\sqrt{b}$ ☐ $b\sqrt{b}\,a^3$

Definizione (Espressione irrazionale)

è un'espressione algebrica in cui la variabile compare sotto il simbolo di radice n-esima.
La radice si intende in senso **aritmetico**.

Esempio

$$\sqrt[3]{5-6x+3x^4}, \quad \sqrt{3-x^2}, \quad \frac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4} \quad \text{sono espr. irraz.}$$

Definizione (Dominio di esistenza)

di un'espressione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)}$ *è l'insieme di tutti i valori della variabile* x *per cui la radice è ben definita.*
Se n dispari, non ci sono restrizioni specifiche.
Se n pari, è necessario che il radicando risulti nonnegativo, cioè $f(x) \geq 0$

Equazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è <u>dispari</u>

ESEMPI: $\sqrt[3]{x^2+11x+27} = x+3 \quad \sqrt[3]{x-x^3}+x-1=0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$.
  Ne segue che l'eq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) = (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice dispari

Consideriamo disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x) \; o \; \sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è dispari

ESEMPI: $\sqrt[3]{2x-1} < 1 \qquad \sqrt[3]{x^3+1} - x - 1 \geq 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} \lesseqgtr g(x)$
- Non servono condizioni di esistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è ben definita per qualunque valore di $f(x)$
- Non servono condizioni di consistenza, poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere qualunque valore
- Si sfrutta la relazione: $a^n \lesseqgtr b^n$ se, e solo se, $a \lesseqgtr b$.
  Ne segue che la diseq. assegnata è equivalente a

$$\boxed{f(x) \lesseqgtr (g(x))^n}$$

Equazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo equazioni del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x e n è pari

ESEMPI: $\sqrt{5 - x^2} = x - 1$, $\sqrt[4]{x^4 - 3x^2 - 4} = x$,
$\sqrt{2 - x + (x-1)^2} + 2x - 1 = 0$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n = b^n$ se, e solo se, $a = b$ (se $a, b \geq 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se
  $\boxed{f(x) = (g(x))^n}$

Equazioni irrazionali - indice pari

Da quanto abbiamo detto fin qui, un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di due disequazioni e una equazione)

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) = (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che un'equazione irrazionale di indice pari è equivalente ad un sistema misto (di una disequazione e una equazione)

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo dapprima disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \leq g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt{x-1} < \dfrac{1}{4}$, $\sqrt[4]{x-1} \leq -3$,
$4 - x > \sqrt{6x - x^2 + 16}$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$
- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ può assumere solo valori nonnegativi
- Si sfrutta la relazione: $a^n < b^n$ se, e solo se, $a < b$ (se $a, b \geq 0$). Ne segue che l'eq. assegnata è verificata se
  $\boxed{f(x) < (g(x))^n}$

Disequazioni irrazionali - indice pari

In conclusione, una disequazione irrazionale di indice pari del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

è equivalente ad un sistema di tre disequazioni

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^n \end{cases}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Consideriamo infine disequazioni del tipo

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \text{o} \quad \sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$$

ESEMPI: $\sqrt[6]{7-x} \geq -3$, $\sqrt{4x^2+3x-1} > 2x-3$, $x < \sqrt{6+x-x^2}+1$

In generale

- Ci si riporta alla **forma normale** $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$
- Si impone la condizione di esistenza $\boxed{f(x) \geq 0}$

  poiché $\sqrt[n]{f(x)}$ è definita solo se $f(x) \geq 0$

se $\boxed{g(x) < 0}$ la disequazione è soddisfatta senza ulteriori condizion

se $\boxed{g(x) \geq 0}$ la disequazione è soddisfatta se inoltre

$$\boxed{f(x) > (g(x))^n}$$

Disequazioni irrazionali - indice pari

Da quanto fin qui detto, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \quad \bigcup \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE: La seconda e la terza condizione dell'ultimo sistema, insieme, assicurano la prima condizione, in quanto

$$f(x) > (g(x))^n \geq 0 \text{ se } g(x) \geq 0.$$

Pertanto possiamo concludere che le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei due sistemi seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \quad \bigcup \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{array} \right.$$