Prerequisiti di Matematica

Espressioni razionali e valore assoluto

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Definizione (Espressione razionale)

è il rapporto fra due polinomi.

Le espressioni razionali in una sola variabile si scrivono nella forma generale

$$\boxed{\frac{a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \cdots b_m\,x^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Esempio

$$\frac{5-6x+3x^4}{2x+x^7}, \quad \frac{2}{3-x^2}, \quad x^2+x^3$$ sono espr. raz.

$$\frac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4}, \quad \frac{\sin x - 3}{1+x^2}, \quad \frac{2^x-1}{x+6}$$ non sono espr. raz.

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche razionali non ammettono valori arbitrari di x

Esempio

Si consideri l'espressione algebrica $\dfrac{2}{x-5}$.
Sostituendo alla variabile x il valore numerico $x=5$, si ottiene $\dfrac{2}{0}$.

Quest'operazione che non ha alcun significato!

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche razionali non ammettono valori arbitrari di x

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche razionali non ammettono valori arbitrari di x

Esempio

Il dominio di esistenza dell'espressione razionale $\dfrac{2}{x-5}$ è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{5\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\}$.

Come si definiscono le operazioni di somma/differenza e prodotto/divisione fra espressioni algebriche?
Non c'è nulla di nuovo: sono le solite operazioni fra numeri reali. Bisogna applicare le proprietà

Esercizio (Calcolare)

$$(3-x)\cdot\left(x+\frac{2}{3}x^2\right)+x^3-\frac{1}{5}x^2=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{2-x}-\frac{5}{x}=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{4-x^2}+\frac{x-1}{2x+x^2}=\cdots$$

$$(1-x)\frac{2-x}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{x}{1-2x+x^2}=\cdots$$

Equazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto di annulla se, e solo se, si annulla il numeratore, risolviamo $\boxed{P(x) = 0}$

In sintesi, risolvere un'equazione fratta in formato standard è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} Q(x) \neq 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$$

In alternativa, possiamo risolvere l'equazione $P(x) = 0$ e a posteriori verificare che per le soluzioni $\bar{x}$ trovate si abbia $Q(\bar{x}) \neq 0$.

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $1 + x \neq 0$, cioè $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 + \frac{x-3}{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(1+x) + x - 3}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 4}{1+x} = 0$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$

(iii) Risolviamo l'equazione

$$x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1+16})/2 = (-1 \pm \sqrt{17})/2$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$

(iii) Risolviamo l'equazione $x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2$

(iv) confrontiamo (i) e (iii) $\begin{cases} x \neq -1 \\ x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2 \end{cases}$

Risposta: $x = (\sqrt{17} - 1)/2$ o $x = -(\sqrt{17} + 1)/2$

Esercizio (Risolvere le equazioni fratte)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{5-6x}{6x} + \frac{6-x}{3x^2+9x} - \frac{1}{4x-x^2} + 1 = 0$$

$$\frac{3x-1}{x^2+x-20} = \frac{5}{x-4}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto è positivo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno concorde, le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora il rapporto è negativo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora possiamo anche ammettere che il numeratore si annulli, ma non il denominatore! Dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Di nuovo, le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Esercizio (Risolvere le disequazioni fratte)

$$\frac{x-2}{3-x} > 1 \qquad \frac{1}{x+1} \geq \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-1} \geq 0 \qquad 1 - \frac{2x+1}{x-1} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5} \leq 1 + \frac{1}{25-x^2}$$

$$\frac{x^2(x^2-8x+15)}{5-x} \leq 0$$

Definizione (Valore assoluto o Modulo)

Il valore assoluto o modulo di un numero reale è quel numero così definito

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Se a è positivo il massimo tra a e $-a$ è a stesso, ma se $a < 0$ il massimo è $-a$.

Di conseguenza, il modulo di a è sempre positivo quale che sia $a \neq 0$.

Proprietà del modulo

Dalla definizione seguono le seguenti importanti proprietà

- $|a| > 0$ e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a+b| = |b+a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ **diseguaglianza triangolare**

Ricorda radice aritmetica

La <u>radice n-sima aritmetica</u> di un numero non negativo è un numero non negativo, quindi

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

cioè se $x < 0$ $\sqrt{x^2} = -x$, ad esempio
$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$ e non $\sqrt{(-2)^2} = -2!$

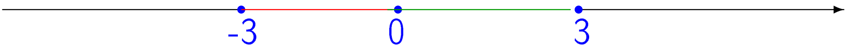
Interpretazione geometrica del modulo

Il modulo di un numero x rappresenta quanto x dista dall'origine, il che ci spiega perché il modulo sia sempre positivo.

Inoltre $|x| = |-x|$ infatti sia x che $-x$ distano dallo zero per la stessa quantità .

Il segmento rosso è lungo quanto il segmento verde, la lunghezza di tali segmenti è proprio il modulo di 3, cioè

$$|3| = |-3| = 3.$$



Equazioni con valore assoluto

Consideriamo equazioni del tipo

$$|f(x)| = g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI: $|2x-3| = 1 \quad |2x-3| = -1 \quad |x+2| = 3x$

In generale

- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
- Si risolvono separatamente le equazioni
  $$\boxed{f(x) = g(x)} \quad \text{e} \quad \boxed{-f(x) = g(x)}$$
- Le soluzioni dell' equazione assegnata si ottengono considerando sia le soluzioni dell' equazione $f(x) = g(x)$, sia le soluzioni dell'equazione $-f(x) = g(x)$, ed eliminando eventualmente quelle che non soddisfino la condizione di consistenza.

Disequazioni con valore assoluto

Consideriamo dapprima disequazioni del tipo

$$|f(x)| < g(x) \quad \text{o} \quad |f(x)| \leq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI:

$$|3x - 5| \leq 1 \qquad |3x - 5| \leq -1$$

$$|2x + x^2| \leq 3 \qquad |3x + x^2| \leq 1 + x$$

In generale, la disequazione assegnata è equivalente al sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{condizione di consistenza} \\ \left.\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{array}\right\} & \max\{f(x)\,,\,-f(x)\} < g(x) \end{cases}$$

Disequazioni con valore assoluto

Consideriamo poi disequazioni del tipo

$$|f(x)| > g(x) \quad \text{o} \quad |f(x)| \geq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI:

$$|3x - 5| \geq 4 \qquad |3x - 5| \geq -4$$
$$|6x - x^2 + 2| \geq 7 \qquad |2x + x^2| \geq x$$

se $g(x) < 0$ la disequazione è soddisfatta senza ulteriori condizioni

se $g(x) \geq 0$ la disequazione è soddisfatta se inoltre
$\max\{f(x), -f(x)\} > g(x)$,
cioè sia se $f(x) > g(x)$, sia se $-f(x) > g(x)$

In altri termini, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei tre sistemi seguenti

$$g(x) < 0 \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$