Prerequisiti di Matematica

Equazioni e disequazioni razionali

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Equazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b = 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 = 0 \qquad 2x = 1 \qquad 5x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x = -b/a}$

$a \neq 0 \qquad \Rightarrow$ c'è un'unica soluzione (eq. determinata

$a = 0,\ b \neq 0 \quad \Rightarrow$ non c'è soluzione (eq. impossibile)

$a = 0,\ b = 0 \quad \Rightarrow$ ogni x è soluzione (eq. indeterminata)

Disequazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b > 0} \qquad \boxed{ax + b < 0}$$
$$\boxed{ax + b \geq 0} \qquad \boxed{ax + b \leq 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 > 0 \qquad 2x < 1 \qquad 5x \geq 0$$

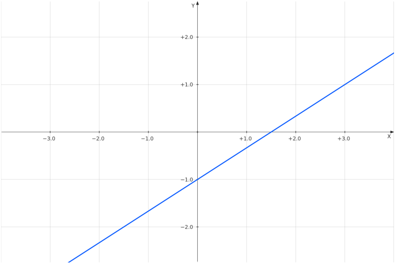
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a \neq 0$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \geq -b/a \quad \text{cioè } x \in [-b/a, +\infty)$$

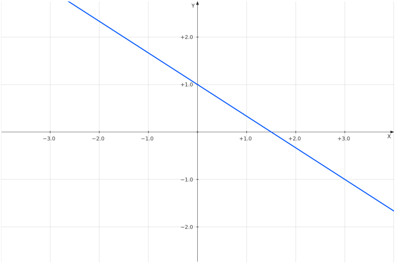
$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \leq -b/a \quad \text{cioè } x \in (-\infty, -b/a]$$

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



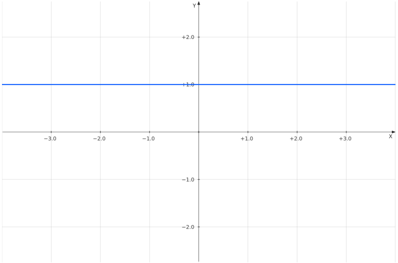
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a = 0$

$a = 0$, $b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ sol. ogni $x \quad$ cioè $x \in \mathbb{R}$

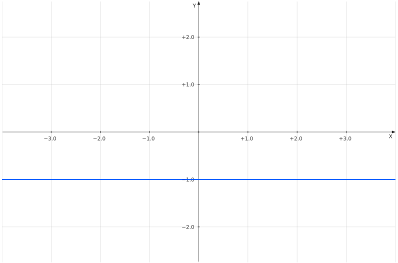
$a = 0$, $b < 0 \quad \Rightarrow \quad$ non c'è sol. $\quad$ cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$b \geq 0$:



$b < 0$:



Equazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx^2 + c = 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad -x^2 + 2x = 1 \qquad 5x^2 - x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x_\pm = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow$ ci sono due sol.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow$ c'è una sol. $x = -b/2a$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow$ non cè sol.

Disequazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$
$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c \leq 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema

Esempio

$$3x^2 + x - 2 > 0 \qquad -x^2 + 2x < 1 \qquad 5x^2 - x \geq 0$$

Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$a > 0:$ sol. $x \leq x_-$ **o** $x \geq x_+$ cioè $x \in (-\infty, x_-] \bigcup [x_+,$

$a < 0:$ sol. $x_- \leq x \leq x_+$ cioè $x \in [x_-, x_+]$

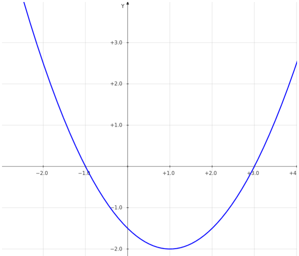
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+).$$

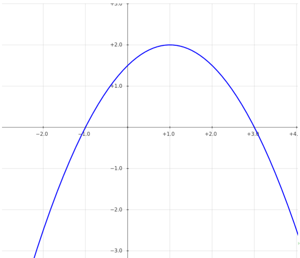
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0:$



$a < 0:$



Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$a > 0$: sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

$a < 0$: sol. $x = -b/2a$

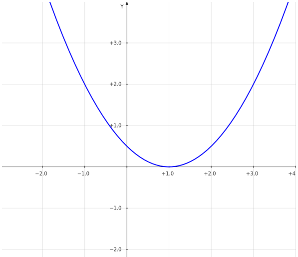
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2.$$

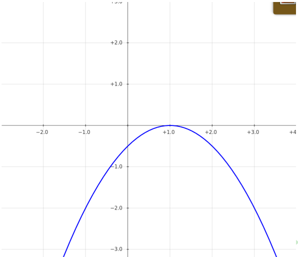
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

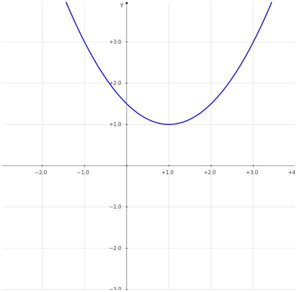
- caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$a > 0 :$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

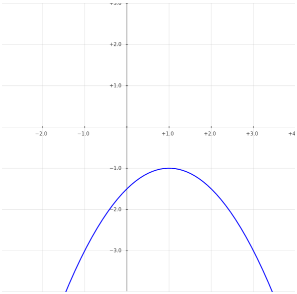
$a < 0 :$ nessun x cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$a > 0 :$



$a < 0 :$



Sistemi di equazioni/disequazioni:

La soluzione del sistema è data dall'**intersezione** fra le soluzioni delle singole equazioni/disequazioni.

Esercizio (Risolvere)

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni biquadratiche:

Si risolvono mediante la **sostituzione** $t = x^2$.

Esercizio (Risolvere)

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \qquad\qquad x^4 - 4x^2 \geq 0$$

Equazioni/disequazioni di grado abbassabile:

Si risolvono mediante **fattorizzazione**.

Esercizio (Risolvere)

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \qquad 4x^5 - x^3 < 0$$

Equazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto di annulla se, e solo se, si annulla il numeratore, risolviamo $\boxed{P(x) = 0}$

In sintesi, risolvere un'equazione fratta in formato standard è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} Q(x) \neq 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$$

In alternativa, possiamo risolvere l'equazione $P(x) = 0$ e a posteriori verificare che per le soluzioni $\bar{x}$ trovate si abbia $Q(\bar{x}) \neq 0$.

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $1 + x \neq 0$, cioè $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 + \frac{x-3}{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(1+x) + x - 3}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 4}{1+x}$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

1. (i) Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$
2. (ii) Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$
3. (iii) Risolviamo l'equazione

$$x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_\pm = (-1 \pm \sqrt{1+16})/2 = (-1 \pm \sqrt{17})/$$

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$

(iii) Risolviamo l'equazione $x_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{17})/2$

(iv) confrontiamo (i) e (iii) $\begin{cases} x \neq -1 \\ x_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{17})/2 \end{cases}$

Risposta: $x = (\sqrt{17} - 1)/2$ o $x = -(\sqrt{17} + 1)/2$

Esercizio (Risolvere le equazioni fratte)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{5-6x}{6x} + \frac{6-x}{3x^2+9x} - \frac{1}{4x-x^2} + 1 = 0$$

$$\frac{3x-1}{x^2+x-20} = \frac{5}{x-4}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto è positivo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno concorde, le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora il rapporto è negativo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora possiamo anche ammettere che il numeratore si annulli, ma non il denominatore! Dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Di nuovo, le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Esercizio (Risolvere le disequazioni fratte)

$$\frac{x-2}{3-x} > 1 \qquad \frac{1}{x+1} \geq \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-1} \geq 0 \qquad 1 - \frac{2x+1}{x-1} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5} \leq 1 + \frac{1}{25-x^2}$$

$$\frac{x^2(x^2-8x+15)}{5-x} \leq 0$$

Equazioni con valore assoluto

Consideriamo equazioni del tipo

$$|f(x)| = g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI: $|2x-3| = 1$ $\quad |2x-3| = -1$ $\quad |x+2| = 3x$

In generale

- Si impone la condizione di consistenza $\boxed{g(x) \geq 0}$
- Si risolvono separatamente le equazioni
  $\boxed{f(x) = g(x)}$ e $\boxed{-f(x) = g(x)}$
- Le soluzioni dell' equazione assegnata si ottengono considerando sia le soluzioni dell' equazione $f(x) = g(x)$, sia le soluzioni dell'equazione $-f(x) = g(x)$, ed eliminando eventualmente quelle che non soddisfino la condizione di consistenza.

Disequazioni con valore assoluto

Consideriamo dapprima disequazioni del tipo

$$|f(x)| < g(x) \quad \text{o} \quad |f(x)| \leq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI:

$$|3x-5| \leq 1 \qquad |3x-5| \leq -1$$

$$|2x+x^2| \leq 3 \qquad |3x+x^2| \leq 1+x$$

In generale, la disequazione assegnata è equivalente al sistema

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 & \text{condizione di consistenza} \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{matrix}\right\} \max\{f(x), -f(x)\} < g(x)$$

Disequazioni con valore assoluto

Consideriamo poi disequazioni del tipo

$$|f(x)| > g(x) \quad \text{o} \ |f(x)| \geq g(x)$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono espressioni nell' incognita x

ESEMPI:

$$|3x - 5| \geq 4 \qquad |3x - 5| \geq -4$$

$$|6x - x^2 + 2| \geq 7 \qquad |2x + x^2| \geq x$$

se $g(x) < 0$ la disequazione è soddisfatta senza ulteriori condizioni

se $g(x) \geq 0$ la disequazione è soddisfatta se inoltre
$\max\{f(x), -f(x)\} > g(x)$,
cioè sia se $f(x) > g(x)$, sia se $-f(x) > g(x)$

In altri termini, le soluzioni della disequazione assegnata si ottengono considerando tutte le soluzioni dei tre sistemi seguenti

$$g(x) < 0 \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases}$$