Prerequisiti di Matematica

Espressioni algebriche

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Finalmente possiamo fare tutte le operazioni fondamentali e dunque abbiamo tutti i numeri che ci servono!

NO!

A titolo di esempio, non sappiamo calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1.

Il teorema di Pitagora afferma che tale lungezza è data dalla radice quadrata della somma di due quadrati costruiti sui lati, cioè

$$\ell = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

In altre parole, il numero ℓ elevato al quadrato deve fare 2, ma non esiste alcun numero razionale il cui quadrato faccia 2!

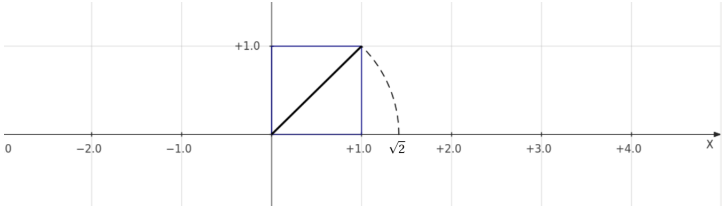
Per colmare questa lacuna dei numeri razionali (e molte altre...) si introducono i numeri reali ($\mathbb{R}$).
Per i nostri scopi, è sufficiente dire che i numeri reali sono tutti i numeri che possiamo scrivere come allineamento decimale (sia esso finito, infinito, periodico...).

Esempio

$-\frac{5}{2} = -2,5$	allineamento decimale finito
$\frac{1}{3} = 0,333333\cdots = 0,\bar{3}$	allineamento decimale infinito periodico
$\sqrt{2} = 1.4142135623\cdots$	allineamento decimale infinito non periodico

Sui numeri reali si assegnano somma, prodotto e relazione d'ordine in modo che valgano tutte le proprietà che abbiamo riconosciuto per i numeri razionali.

Ma allora qual è la differenza? L'assioma di continuità: l'insieme dei numeri reali non ha "buchi".
Possiamo misurare ogni lunghezza!



C'è una corrispondenza fra i numeri reali e la retta. La relazione d'ordine fra i numeri dà un orientamento.

Nella pratica per maneggiare i numeri reali è sufficiente conoscere le proprietà delle operazioni.

Esempio

Quanto vale $\left(\frac{x}{\frac{2}{3}} - 1\right) : \frac{x}{2y} - y$?

Non serve sapere esattamente chi sono i numeri x e y per sapere che

$$\overset{\text{def. di}}{\underset{\text{divisione}}{=}} \left(\frac{3x}{2} - 1\right) \cdot \frac{2y}{x} - y \overset{\text{proprietà}}{\underset{\text{distributiva}}{=}} \frac{3x \cdot 2y}{2 \cdot x} - \frac{2y}{x} - y$$

$$= 3y - \frac{2}{x} - y \overset{\text{proprietà}}{\underset{\text{commutativa e associativa}}{=}} 2y - \frac{2}{x}$$

e, se mi fa comodo avere un'unica frazione

$$\overset{\text{proprietà}}{\underset{\text{distributiva}}{=}} 2\frac{xy - 1}{x}$$

Espressioni algebriche polinomiali

Un' espressione in cui uno o più numeri non è specificato si dice espressione algebrica. Le espressioni algebriche più semplici sono i monomi.

Definizione (Monomio)

è un'espressione del tipo $\boxed{a\, {x_1}^{n_1} {x_2}^{n_2} \cdots {x_k}^{n_k}}$ *dove*

- a *sta per un numero reale fissato, detto coefficiente*
- $x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_k$ *indicano dei numeri reali arbitrari, detti incognite o variabili indipendenti*
- $n_1\,,\ n_2\,,\ \cdots\,,\ n_k$ *indicano dei numeri naturali fissati*

Esempio

$3x_1x_2^4\ ,\ \ -x^3yz^2,\ \ \dfrac{1}{\sqrt{5}}x,\ \ -5xy^3x$ sono monomi,

$3x/(1+y^2),\ \ x^2\sqrt{y}\ ,\ \ xy^2-2$ non sono monomi.

Definizione

Un monomio si dice in forma normale se è scritto nella forma $a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

Esempio

$3x_1x_2^4$, $-x^3yz^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}x$, sono in forma normale,

$-5xy^3x$, $\sqrt{2}xy\dfrac{xz^2}{3}$, non sono in forma normale.

Definizione

Un monomio si dice in forma normale se è scritto nella forma
$a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Definizione

Un monomio si dice in forma normale se è scritto nella forma
$a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Se un monomio è scritto in forma normale, diremo che

- a è la parte numerica
- $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ è la parte letterale
- n_1 è il grado del monomio relativo alla variabile x_1, n_2 il grado relativo a x_2, etc...
- $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ è il grado complessivo del monomio

Definizione

Un monomio si dice *in forma normale* *se è scritto nella forma*
$a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Se un monomio è scritto in forma normale, diremo che

- $\sqrt{2}/3$ è la parte numerica
- x^2yz^2 è la parte letterale
- 2 è il grado del monomio relativo alla variabile x , 1 il grado relativo a y, etc...
- $2 + 1 + 2 = 5$ è il grado complessivo del monomio

Espressioni algebriche polinomiali

Definizione (polinomio)

è una somma di monomi.

Di particolare interesse sono i polinomi in una variabile, che possiamo scrivere nella forma generale

$$\boxed{a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots a_n\,x^n}$$

dove

- $a_0, a_1, \cdots a_n$ sono numeri reali fissati, detti *coefficienti*,
- x sta per un numero reale arbitrario, detto *incognita* o *variabile indipendente*,

Il grado del polinomio è il maggiore fra i gradi dei monomi che lo compongono.

Un polinomio si dice ordinato (in modo crescente) se i monomi che lo compongono sono scritti in ordine di potenza crescente.

Espressioni algebriche polinomiali

Esempio

$5 - 6x + 3x^4 - x^7$	è un polinomio di grado 7 ordinato
$2 + \frac{1}{5}x$	è un polinomio di grado 1 ordinato
$x^2 - 3x^5 + x^3$	è un polinomio di grado 5 non ordinato
$x - 3 + \sqrt{2}x - x^4$	è un polinomio di grado 4 non ordinato
$\frac{x-3}{1+x^2}$	non è un polinomio
$\sqrt{x^4+1} - 3x$	non è un polinomio

Eq./diseq. polinomiali (1^o grado)

Equazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b = 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 = 0 \qquad 2x = 1 \qquad 5x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x = -b/a}$

$a \neq 0 \quad \Rightarrow$ c'è un'unica soluzione (eq. determinata)

$a = 0,\ b \neq 0 \quad \Rightarrow$ non c'è soluzione (eq. impossibile)

$a = 0,\ b = 0 \quad \Rightarrow$ ogni x è soluzione (eq. indeterminata)

Eq./diseq. polinomiali (1^o grado)

Disequazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b > 0} \qquad \boxed{ax + b < 0}$$
$$\boxed{ax + b \geq 0} \qquad \boxed{ax + b \leq 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 > 0 \qquad 2x < 1 \qquad 5x \geq 0$$

Eq./diseq. polinomiali (1^o grado)

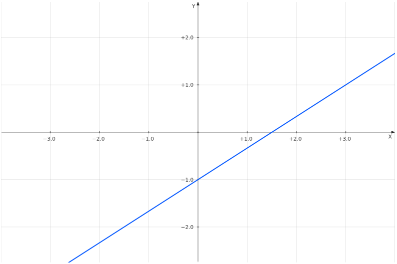
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a \neq 0$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \geq -b/a \quad \text{cioè } x \in [-b/a, +\infty)$$

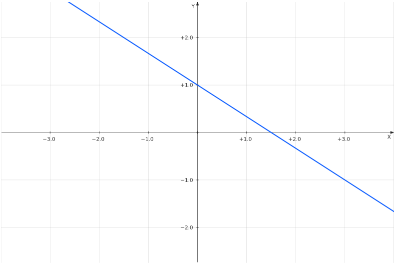
$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \leq -b/a \quad \text{cioè } x \in (-\infty, -b/a]$$

Interpretazione grafica:

$a > 0:$



$a < 0:$



Eq./diseq. polinomiali (1^o grado)

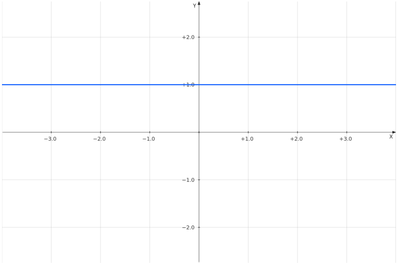
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a = 0$

$a = 0$, $b \geq 0$ $\Rightarrow$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

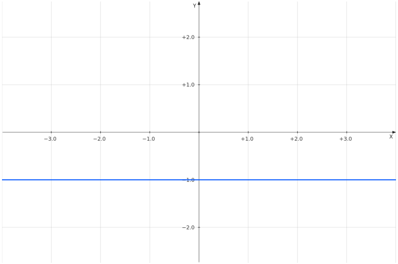
$a = 0$, $b < 0$ $\Rightarrow$ non c'è sol. cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$b \geq 0$:



$b < 0$:



Eq./diseq. polinomiali (2^o grado)

Equazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx^2 + c = 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad -x^2 + 2x = 1 \qquad 5x^2 - x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x_\pm = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	$\Rightarrow$	ci sono due sol.
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	$\Rightarrow$	c'è una sol. $x = -b/2a$
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$	$\Rightarrow$	non cè sol.

Eq./diseq. polinomiali (2^o grado)

Disequazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c \leq 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema

Esempio

$$3x^2 + x - 2 > 0 \qquad -x^2 + 2x < 1 \qquad 5x^2 - x \geq 0$$

Eq./diseq. polinomiali (2^o grado)

Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

  $a > 0 :$ sol. $x \leq x_-$ **o** $x \geq x_+$ cioè $x \in (-\infty, x_-] \bigcup [x_+, +\infty)$

  $a < 0 :$ sol. $x_- \leq x \leq x_+$ cioè $x \in [x_-, x_+]$

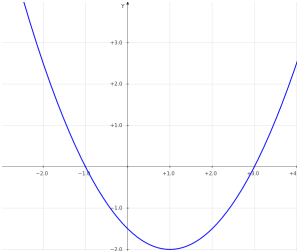
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+).$$

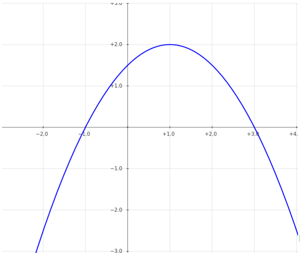
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0 :$



$a < 0 :$



Eq./diseq. polinomiali (2^o grado)

Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  $a > 0:$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

  $a < 0:$ sol. $x = -b/2a$

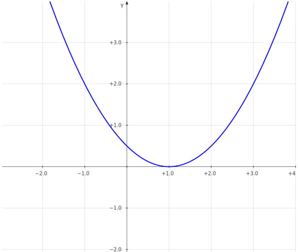
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2.$$

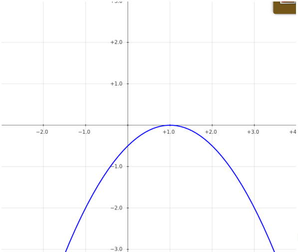
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0:$



$a < 0:$



Eq./diseq. polinomiali (2^o grado)

Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

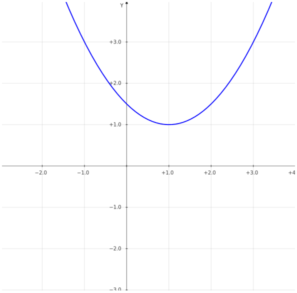
- caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$a > 0 :$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

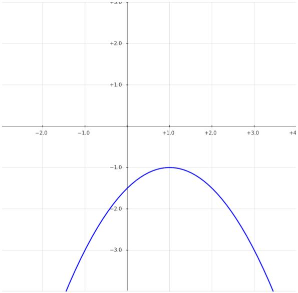
$a < 0 :$ nessun x cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$a > 0 :$



$a < 0 :$



Eq./dis. polinomiali (grado generico)

Equazioni/disequazioni biquadratiche:

Si risolvono mediante la **sostituzione** $t = x^2$.

Esercizio (Risolvere)

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \qquad\qquad x^4 - 4x^2 \geq 0$$

Equazioni/disequazioni di grado abbassabile:

Si risolvono mediante **fattorizzazione**.

Esercizio (Risolvere)

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \qquad\qquad 4x^5 - x^3 < 0$$

Sistemi di eq./diseq. polinomiali

Sistemi di equazioni/disequazioni:

La soluzione del sistema è data dall'**intersezione** fra le soluzioni delle singole equazioni/disequazioni.

Esercizio (Risolvere)

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Espressioni razionali (o fratte)

Definizione (Espressione razionale)

è il rapporto fra due polinomi.

Le espressioni razionali in una sola variabile si scrivono nella forma generale

$$\boxed{\frac{a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots a_n\,x^n}{b_0 + b_1\,x + b_2\,x^2 + \cdots b_m\,x^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Esempio

$\dfrac{5-6x+3x^4}{2x+x^7}$, $\dfrac{2}{3-x^2}$, x^2+x^3 sono espr. raz.

$\dfrac{\sqrt{x-3}+1}{2-x^4}$, $\dfrac{\sin x - 3}{1+x^2}$, $\dfrac{2^x-1}{x+6}$ non sono espr. raz.

Espressioni razionali (o fratte)

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche fratte non ammettono valori arbitrari di x

Esempio

Si consideri l'espressione algebrica $\dfrac{2}{x-5}$.

Sostituendo alla variabile x il valore numerico $x = 5$, si ottiene $\dfrac{2}{0}$.

Quest'operazione che non ha alcun significato!

Espressioni razionali (o fratte)

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche fratte non ammettono valori arbitrari di x

Definizione

Il dominio di esistenza di un'espressione razionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *è l'insieme di tutti i valori della variabile* x *per cui risulta*

$$Q(x) \neq 0$$

In altre parole, il dominio di esistenza indica quali valori numerici possiamo attribuire alla variabile x affinché l' operazione numerica $P(x) : Q(x)$ sia possibile.

Espressioni razionali (o fratte)

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche fratte non ammettono valori arbitrari di x

Definizione

Il dominio di esistenza di un'espressione razionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *è l'insieme di tutti i valori della variabile* x *per cui risulta*

$$Q(x) \neq 0$$

Esempio

Il dominio di esistenza dell'espressione razionale $\dfrac{2}{x-5}$ è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{5\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\}$.

Espressioni razionali (o fratte)

Come si definiscono le operazioni di somma/differenza e prodotto/divisione fra espressioni algebriche?
Non c'è nulla di nuovo: sono le solite operazioni fra numeri reali.
Bisogna applicare le proprietà

Esercizio (Calcolare)

$$(3-x)\cdot\left(x+\frac{2}{3}x^2\right)+x^3-\frac{1}{5}x^2=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{2-x}-\frac{5}{x}=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{4-x^2}+\frac{x-1}{2x+x^2}=\cdots$$

$$(1-x)\frac{2-x}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{x}{1-2x+x^2}=\cdots$$

Iter consigliato per maneggiare le espressioni algebriche frazionarie:

- Fattorizzare i polinomi a denominatore (ed eventualmente a numeratore)
- Individuare il dominio di esistenza (è più facile dopo aver fattorizzato!)
- Semplificare (se possibile)
- Individuare il denominatore comune
- Scrivere l'espressione con il denominatore comune
- Calcolare le somme/differenze
- (eventualmente) Fattorizzare il polinomio ottenuto a numeratore e procedere con ulteriori semplificazioni (se possibile)

Fattorizzazione dei polinomi

Fattorizzare un polinomio = scomporlo nel prodotto di più polinomi di grado inferiore (e quindi più maneggevoli)

Ricordiamo 3 tecniche per farlo:

- Raccoglimento a fattore comune
- Riconoscimento di prodotti notevoli
- Alcuni trinomi di secondo grado

Raccoglimento a fattore comune

Si tratta di individuare quei termini che dividono ogni monomio presente e "metterli in evidenza"

Esercizio

$4x^3 + 8x^2 - 32x = \cdots$

$x\left(x+1\right)\left(x-2\right) + x^2\left(x-1\right)\left(2-x\right) =$

Talvolta è preferibile procedere per <u>raccoglimenti parziali</u>

Esercizio

$$2x - 6y + 3xy - x^2 = \cdots$$

Riconoscimento di prodotti notevoli

quadrato del binomio $\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

cubo del binomio $\boxed{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3}$

differenza di quadrati $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

somma/diff. di cubi $\boxed{a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)}$

Esercizio

$x^2 + 25 - 10x = \cdots$ $\qquad$ $9x^4 - 16 = \cdots$

$x^6 - 1 = \cdots$ $\qquad$ $\kappa^6 - 6\kappa^4 x + 12\kappa^2 x^2 - 8x^3 = \cdots$

$x^3 - 8 - x^2 + 2x = \cdots$

Alcuni trinomi di secondo grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x - x_+\right)\left(x - x_-\right)}$$

dove $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sono le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$

In pratica, dovrò calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$, calcolo le radici e applico la formula
- se $\Delta = 0$, applicando la formula ritrovo il quadrato del binomio
- se $\Delta < 0$ il trinomio assegnato è <u>irriducibile</u>

Esercizio

$x^2 - 3x + 2 = \cdots$ $\qquad$ $x^2 + 6x + 9 = \cdots$

$3x^2 + 2x - 1 = \cdots$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 10 = \cdots$

$2x^4 - 3x^2 + 1 = \cdots$

Espressioni algebriche frazionarie (o fratte)

Esercizio (Semplificare le espressioni algebriche)

$$\frac{3-x}{x-1}-\frac{x^2-5}{1-x^2}$$

$$\frac{6x}{2x^2-8}\cdot\frac{x+2}{4x^2}$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}+\frac{1-x}{x^2}$$

$$\frac{\dfrac{2x+3}{x^2-1}}{\dfrac{4x^2+12x+9}{8x^6-1}}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}\right):\left(1-\frac{x+1}{x+2}\right)$$

Equazioni/disequazioni fratte

Equazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto di annulla se, e solo se, si annulla il numeratore, risolviamo $\boxed{P(x) = 0}$

In sintesi, risolvere un'equazione fratta in formato standard è equivalente a risolvere il sistema:

$$\begin{cases} Q(x) \neq 0 \\ P(x) = 0 \end{cases}$$

In alternativa, possiamo risolvere l'equazione $P(x) = 0$ e a posteriori verificare che per le soluzioni $\bar{x}$ trovate si abbia $Q(\bar{x}) \neq 0$.

Equazioni/disequazioni fratte

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

1. Individuiamo le condizioni di esistenza $1 + x \neq 0$, cioè $x \neq -1$
2. Mettiamo in forma standard

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1 \Leftrightarrow \quad x - 1 + \frac{x-3}{1+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(1+x) + x - 3}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 4}{1+x} = 0$$

Equazioni/disequazioni fratte

formato standard significa $\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

1. Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$
2. Mettiamo in forma standard $\frac{x^2+x-4}{1+x} = 0$
3. Risolviamo l'equazione

$$x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_\pm = (-1 \pm \sqrt{1+16})/2 = (-1 \pm \sqrt{17})/2$$

Equazioni/disequazioni fratte

formato standard significa $\boxed{\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0}$.

Se così non è dobbiamo prima, attraverso passaggi algebrici, riportarci a questa forma.

Esempio (Risolvere l'equazione)

$$x + \frac{x-3}{1+x} = 1$$

(i) Individuiamo le condizioni di esistenza $x \neq -1$

(ii) Mettiamo in forma standard $\dfrac{x^2+x-4}{1+x} = 0$

(iii) Risolviamo l'equazione $x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2$

(iv) confrontiamo (i) e (iii) $\begin{cases} x \neq -1 \\ x_\pm = (-1 \pm \sqrt{17})/2 \end{cases}$

Risposta: $x = (\sqrt{17} - 1)/2$ o $x = -(\sqrt{17} + 1)/2$

Equazioni/disequazioni fratte

Esercizio (Risolvere le equazioni fratte)

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{5-6x}{6x} + \frac{6-x}{3x^2+9x} - \frac{1}{4x-x^2} + 1 = 0$$

$$\frac{3x-1}{x^2+x-20} = \frac{5}{x-4}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Poiché un rapporto è positivo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno concorde, le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora il rapporto è negativo se, e solo se, numeratore e denominatore hanno segno discorde, dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}}$$

Osserviamo che le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} < 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

- Imponiamo la condizione di esistenza $\boxed{Q(x) \neq 0}$
- Ora possiamo anche ammettere che il numeratore si annulli, ma non il denominatore! Dunque le soluzioni sono l'unione delle soluzioni di due sistemi di disequazioni

$$\boxed{\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \quad \textbf{o} \quad \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}}$$

Di nuovo, le soluzioni di entrambi i sistemi al verificano certamente la condizione di esistenza.

Equazioni/disequazioni fratte

Disequazioni fratte

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi nell'incognita x.

La soluzione di una disequazione fratta in formato standard è

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} P(x) \leq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni fratte

Esercizio (Risolvere le disequazioni fratte)

$$\frac{x-2}{3-x} > 1 \qquad \frac{1}{x+1} \geq \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{4-x^2}{x^2-1} \geq 0 \qquad 1 - \frac{2x+1}{x-1} > \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-5} \leq 1 + \frac{1}{25-x^2}$$

$$\frac{x^2(x^2-8x+15)}{5-x} \leq 0$$

Definizione (Valore assoluto o Modulo)

Il valore assoluto o modulo di un numero reale è quel numero così definito

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \textit{se } a \geq 0, \\ -a & \textit{se } a < 0. \end{cases}$$

Se a è positivo il massimo tra a e $-a$ è a stesso,
ma se $a < 0$ il massimo è $-a$.

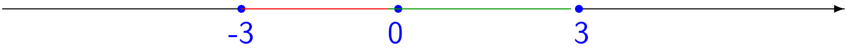
Di conseguenza, il modulo di a è sempre positivo quale che sia $a \neq 0$.

Interpretazione geometrica del modulo

Il modulo di un numero x rappresenta quanto x dista dall'origine, il che ci spiega perché il modulo sia sempre positivo.

Inoltre $|x| = |-x|$ infatti sia x che $-x$ distano dallo zero per la stessa quantità .

Il segmento rosso è lungo quanto il segmento verde, la lunghezza di tali segmenti è proprio il modulo di 3, cioè $|3| = |-3| = 3$.



Proprietà del modulo

Dalla definizione seguono le seguenti importanti proprietà

- $|a| > 0$ e $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a + b| = |b + a|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ **diseguaglianza triangolare**

Ricorda radice aritmetica

La radice n-sima aritmetica di un numero non negativo è un numero non negativo, quindi

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

cioè se $x < 0$ $\sqrt{x^2} = -x$, ad esempio $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$ e non $\sqrt{(-2)^2} = -2$!