Prerequisiti di Matematica

Espressioni algebriche

Annalisa Amadori e Benedetta Pellacci

amadori@uniparthenope.it

pellacci@uniparthenope.it

Università di Napoli "Parthenope"

Un' espressione in cui uno o più numeri non è specificato si dice espressione algebrica. Le espressioni algebriche più semplici sono i monomi.

Definizione (Monomio)

è un'espressione del tipo $\boxed{a\, x_1{}^{n_1} x_2{}^{n_2} \cdots x_k{}^{n_k}}$ *dove*

- a *sta per un numero reale fissato, detto coefficiente*
- x_1 , x_2 , $\cdots$, x_k *indicano dei numeri reali arbitrari, detti incognite o variabili indipendenti*
- n_1 , n_2 , $\cdots$, n_k *indicano dei numeri naturali fissati*

Esempio

$3x_1x_2^4$, $-x^3yz^2$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}x$, $-5xy^3x$ sono monomi,

$3x/(1+y^2)$, $x^2\sqrt{y}$ xy^2-2 non sono monomi.

Definizione

Un monomio si dice *in forma normale* *se è scritto nella forma* $a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

Esempio

$3x_1x_2^4$, $-x^3yz^2$, $\frac{1}{\sqrt{5}}x$, sono in forma normale,

$-5xy^3x$, $\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}$, non sono in forma normale.

Definizione

Un monomio si dice *in forma normale* *se è scritto nella forma* $a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

È sempre possibile scrivere un monomio in forma normale, effettuando le opportune operazioni.

Esempio

$$\underbrace{\sqrt{2}xy\frac{xz^2}{3}}_{\text{non in forma normale}} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{3}x^2yz^2}_{\text{in forma normale}}$$

Definizione

Un monomio si dice *in forma normale* *se è scritto nella forma* $a\, x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ *cioè*

- *presenta un solo coefficiente numerico*
- *ogni incognita compare una sola volta.*

Se un monomio è scritto in forma normale, diremo che

a è la parte numerica

$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ è la parte letterale

n_1 è il grado del monomio relativo alla variabile x_1 (etc etc...)

$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ è il grado complessivo del monomio

Definizione (polinomio)

è una somma di monomi.

Di particolare interesse sono i polinomi <u>in una variabile</u>, che possiamo scrivere nella forma generale

$$\boxed{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n}$$

dove

$a_0, a_1, \cdots a_n$ sono numeri reali fissati, detti *coefficienti*,

x sta per un numero reale arbitrario, detto *incognita* o *variabile indipendente*,

Il grado del polinomio è il maggiore fra i gradi dei monomi che lo compongono.

Un polinomio si dice ordinato (in modo crescente) se i monomi che lo compongono sono scritti in ordine di potenza crescente.

Esempio

$5-6x+3x^4-x^7$	è un polinomio di grado 7 ordinato
$2+\frac{1}{5}x$	è un polinomio di grado 1 ordinato
$x^2-3x^5+x^3$	è un polinomio di grado 5 non ordina
$x-3+\sqrt{2}x-x^4$	è un polinomio di grado 4 non ordina
$\frac{x-3}{1+x^2}$	non è un polinomio
$\sqrt{x^4+1}-3x$	non è un polinomio

Definizione (Espressione razionale)

è il rapporto fra due polinomi.

Le espressioni razionali <u>in una sola variabile</u> si scrivono nella forma generale

$$\boxed{\frac{a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots a_n\, x^n}{b_0 + b_1\, x + b_2\, x^2 + \cdots b_m\, x^m} = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

Esempio

$$\frac{5 - 6x + 3x^4}{2x + x^7}, \quad \frac{2}{3 - x^2}, \quad x^2 + x^3 \qquad \text{sono espr. raz}$$

$$\frac{\sqrt{x-3} + 1}{2 - x^4}, \quad \frac{\sin x - 3}{1 + x^2}, \quad \frac{2^x - 1}{x + 6} \qquad \text{non sono espr. raz}$$

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche non ammettono valori arbitrari di x

Esempio

Si consideri l'espressione algebrica $\dfrac{2}{x-5}$.
Sostituendo alla variabile x il valore numerico $x = 5$, si ottiene $\dfrac{2}{0}$.

Quest'operazione che non ha alcun significato!

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche non ammettono valori arbitrari di x

Definizione

Il dominio di esistenza di un'espressione razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *è l'insieme di tutti i valori della variabile* x *per cui risulta*

$$Q(x) \neq 0$$

In altre parole, il dominio di esistenza indica quali valori numerici possiamo attribuire alla variabile x affinché l' operazione numerica $P(x) : Q(x)$ sia possibile.

Osservazione

A differenza di monomi i polinomi, le espressioni algebriche non ammettono valori arbitrari di x

Definizione

Il dominio di esistenza di un'espressione razionale $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *è l'insieme di tutti i valori della variabile* x *per cui risulta*

$$Q(x) \neq 0$$

Esempio

Il dominio di esistenza dell'espressione razionale $\dfrac{2}{x-5}$ è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{5\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 5\}$.

Come si definiscono le operazioni di somma/differenza e prodotto/divisione fra espressioni algebriche?
Non c'è nulla di nuovo: sono le solite operazioni fra numeri reali. Bisogna applicare le proprietà

Esercizio (Calcolare)

$$(3-x)\cdot\left(x+\frac{2}{3}x^2\right)+x^3-\frac{1}{5}x^2=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{2-x}-\frac{5}{x}=\cdots$$

$$\frac{1+3x}{4-x^2}+\frac{x-1}{2x+x^2}=\cdots$$

$$(1-x)\frac{2-x}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{x}{1-2x+x^2}=\cdots$$

Iter consigliato per maneggiare le espressioni algebriche frazionarie:

- Fattorizzare i polinomi a denominatore (ed eventualmente a numeratore)
- Individuare il dominio di esistenza (è più facile dopo aver fattorizzato!)
- Semplificare (se possibile)
- Individuare il denominatore comune
- Scrivere l'espressione con il denominatore comune
- Calcolare le somme/differenze
- (eventualmente) Fattorizzare il polinomio ottenuto a numeratore e procedere con ulteriori semplificazioni (se possibile)

Fattorizzare un polinomio = scomporlo nel prodotto di più polinomi di grado inferiore (e quindi più maneggevoli)

Ricordiamo 3 tecniche per farlo:

- Raccoglimento a fattore comune
- Riconoscimento di prodotti notevoli
- Alcuni trinomi di secondo grado

Raccoglimento a fattore comune

Si tratta di individuare quei termini che dividono ogni monomio presente e "metterli in evidenza"

Esercizio

$4x^3 + 8x^2 - 32x = \cdots$

$x(x+1)(x-2) + x^2(x-1)(2-x) =$

Talvolta è preferibile procedere per raccoglimenti parziali

Esercizio

$$2x - 6y + 3xy - x^2 = \cdots$$

Riconoscimento di prodotti notevoli

quadrato del binomio: $\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$

cubo del binomio: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)$

differenza di quadrati $\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$

somma/differenza di cubi $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Esercizio

$x^2 + 25 - 10x = \cdots$

$9x^4 - 16 = \cdots$

$x^6 - 1 = \cdots$

$\kappa^6 - 6\kappa^4 x + 12\kappa^2 x^2 - 8x$

$x^3 - 8 - x^2 + 2x = \cdots$

Alcuni trinomi di secondo grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x - x_+\right)\left(x - x_-\right)}$$

dove $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sono le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$

In pratica, dovrò calcolare il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

- se $\Delta > 0$, calcolo le radici e applico la formula
- se $\Delta = 0$, applicando la formula ritrovo il quadrato del binomio
- se $\Delta < 0$ il trinomio assegnato è <u>irriducibile</u>

Esercizio

$x^2 - 3x + 2 = \cdots \qquad x^2 + 6x + 9 = \cdots$

Esercizio (Semplificare le espressioni algebriche)

$$\frac{3-x}{x-1}-\frac{x^2-5}{1-x^2}$$

$$\frac{6x}{2x^2-8}\cdot\frac{x+}{4x}$$

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}+\frac{1-x}{x^2}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}:\frac{x+}{x^2-}$$

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}\right):\left(1-\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\frac{\dfrac{2x+3}{x^2-1}}{\dfrac{4x^2+12x+}{8x^6-1}}$$

Equazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b = 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 = 0 \qquad 2x = 1 \qquad 5x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x = -b/a}$

$a \neq 0 \qquad \Rightarrow$ c'è un'unica soluzione (eq. determinata

$a = 0,\ b \neq 0 \quad \Rightarrow$ non c'è soluzione (eq. impossibile)

$a = 0,\ b = 0 \quad \Rightarrow$ ogni x è soluzione (eq. indeterminata)

Disequazioni di 1^o grado

$$\boxed{ax + b > 0} \qquad \boxed{ax + b < 0}$$
$$\boxed{ax + b \geq 0} \qquad \boxed{ax + b \leq 0}$$

dove

- a e b sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$-3x + 2 > 0 \qquad 2x < 1 \qquad 5x \geq 0$$

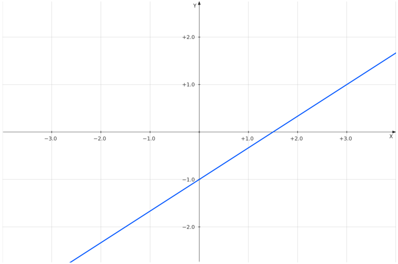
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $\quad a \neq 0$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \geq -b/a \quad \text{cioè } x \in [-b/a, +\infty)$$

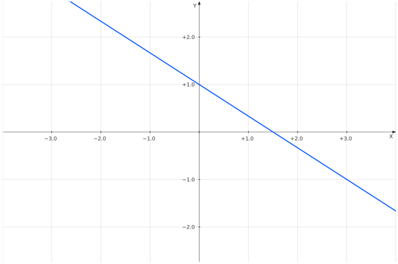
$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sol. } x \leq -b/a \quad \text{cioè } x \in (-\infty, -b/a]$$

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



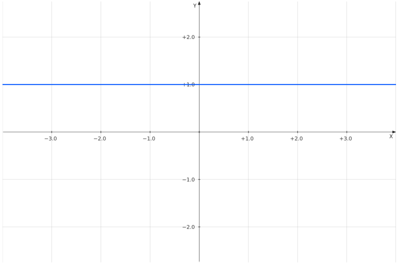
Formula risolutiva per $\boxed{ax + b \geq 0}$ $a = 0$

$a = 0 \; , \; b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

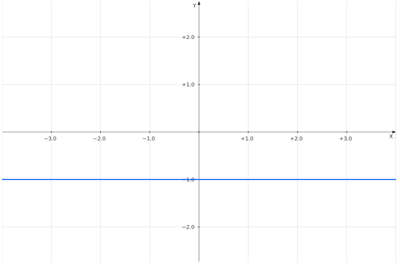
$a = 0 \; , \; b < 0 \quad \Rightarrow \quad$ non c'è sol. cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$b \geq 0$:



$b < 0$:



Equazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx^2 + c = 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema .

Esempio

$$3x^2 + x - 2 = 0 \qquad -x^2 + 2x = 1 \qquad 5x^2 - x = 0$$

Formula risolutiva $\boxed{x_\pm = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \quad \Rightarrow \quad$ ci sono due sol.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad$ c'è una sol. $x = -b/2a$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad$ non cè sol.

Disequazioni di 2^o grado

$$\boxed{ax^2 + bx + c > 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$
$$\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0} \qquad \boxed{ax^2 + bx + c \leq 0}$$

dove

- a, b e c sono numeri reali fissati, con $a \neq 0$,
- x è l'*incognita* del problema

Esempio

$$3x^2 + x - 2 > 0 \qquad -x^2 + 2x < 1 \qquad 5x^2 - x \geq 0$$

Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$a > 0$: sol. $x \leq x_-$ **o** $x \geq x_+$ cioè $x \in (-\infty, x_-] \bigcup [x_+,$

$a < 0$: sol. $x_- \leq x \leq x_+$ cioè $x \in [x_-, x_+]$

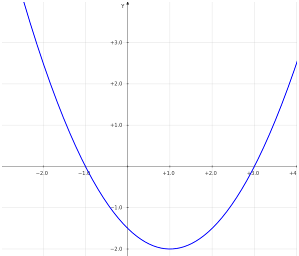
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_-)(x - x_+).$$

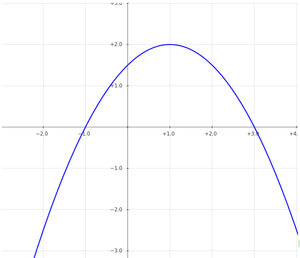
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

- caso $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

  $a > 0$: sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

  $a < 0$: sol. $x = -b/2a$

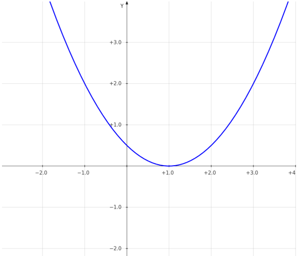
Motivazione: Dalle formule di fattorizzazione:

$$ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2.$$

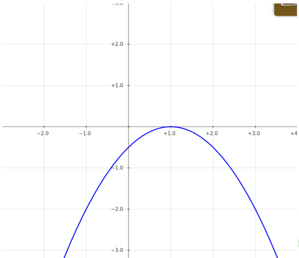
La formula risolutiva si ottiene dalla regola del segno.

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Formula risolutiva per $\boxed{ax^2 + bx + c \geq 0}$

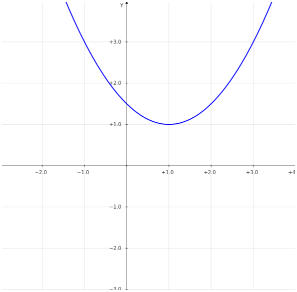
- caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$a > 0$: sol. ogni x cioè $x \in \mathbb{R}$

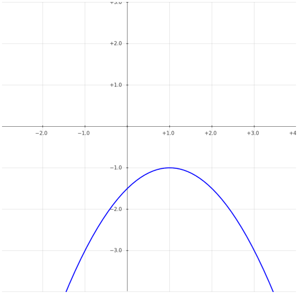
$a < 0$: nessun x cioè $x \in \emptyset$

Interpretazione grafica:

$a > 0$:



$a < 0$:



Sistemi di equazioni/disequazioni:

La soluzione del sistema è data dall'**intersezione** fra le soluzioni delle singole equazioni/disequazioni.

Esercizio (Risolvere)

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Equazioni/disequazioni biquadratiche:

Si risolvono mediante la **sostituzione** $t = x^2$.

Esercizio (Risolvere)

$$x^4 + x^2 - 12 = 0 \qquad\qquad x^4 - 4x^2 \geq 0$$

Equazioni/disequazioni di grado abbassabile:

Si risolvono mediante **fattorizzazione**.

Esercizio (Risolvere)

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \qquad\qquad 4x^5 - x^3 < 0$$