Limiti

Definizione di intorno

Sia

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Consideriamo $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si definisce intorno I di x_0

- un intervallo aperto contenente x_0 se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- ciascun intervallo $]a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = +\infty$;
- ciascun intervallo $(-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, se $x_0 = -\infty$.

Definizione di punto di accumulazione

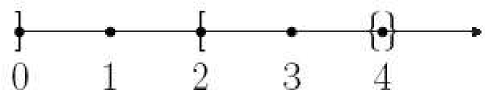
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Un valore $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice punto di accumulazione per A se ogni intorno I di x_0 contiene almeno un punto di A distinto da x_0,

$$A \cap (I - \{x_0\}) \neq \emptyset, \quad \forall I \in I(x_0)$$

Esempio

Sia

$$A =]0, 2[\cup \{4\}$$



- 1 è punto di accumulazione per A
- 4 non è punto di accumulazione per A
- 2 è punto di accumulazione per A
- $\forall x \in [0, 2]$, x è punto di accumulazione per A

Un punto di accumulazione per un insieme A **può** appartenere ad A:

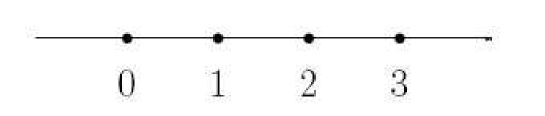
- $A = [0,1] \Rightarrow$ 0 è un punto di accumulazione per A, $0 \in A$
- $A =]0,1[\Rightarrow$ 0 è un punto di accumulazione per A, $0 \notin A$

Un elemento di un insieme A **può** essere punto di accumulazione per A:

- $A = [0, 2] \Rightarrow 1 \in A$, 1 è di accumulazione per A
- $A = \{1\} \cup [2, 3] \Rightarrow 1 \in A$, 1 non è di accumulazione per A

Un insieme **può non avere** punti di accumulazione.

Esempio: l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione.



Punti isolati

Definizione di punto isolato

Un punto $x \in A$ che non sia punto di accumulazione per A, è detto isolato.

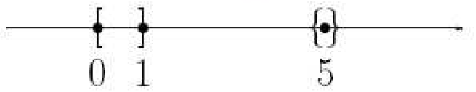
In questo caso

$$\exists I \in I(x_0) : I \cap A = \{x_0\}$$

Esempio

Sia

$$A = [0, 1] \cup \{5\}$$



5 è un punto isolato per A.

Definizione generale di limite

Definizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

- x_0 punto di accumulazione per X se $x_0 \in \mathbb{R}$;
- X illimitato superiormente se $x_0 = +\infty$;
- X illimitato inferiormente se $x_0 = -\infty$.

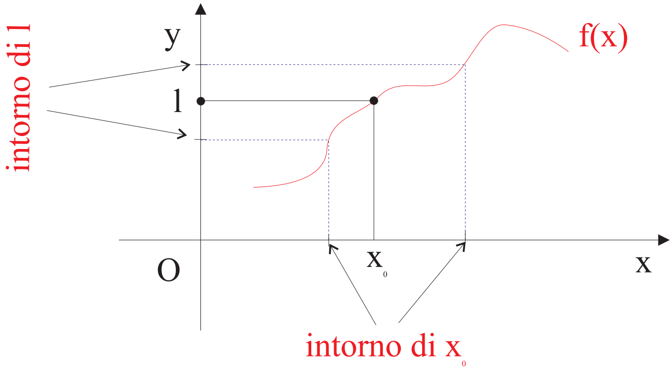
Si dice che la funzione è regolare in $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e si scrive:

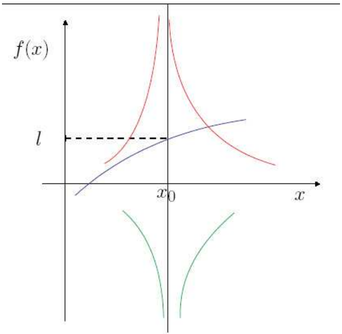
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

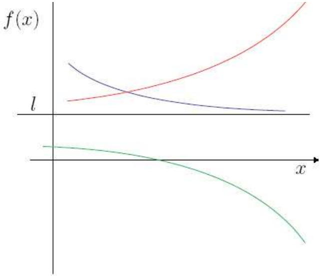
$$\forall J \in J(l), \exists I \in I(x_0) :$$

$$\forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in J$$

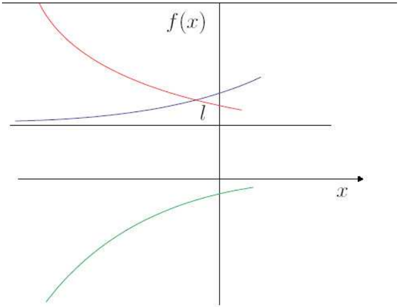

intorno di l
y
l
f(x)
O
x_0
x
intorno di x_0



$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ divergente positivamente in x_0
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ converge in x_0
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ divergente negativamente in x_0



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ diverge positivamente in $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ converge in $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ diverge negativamente in $+\infty$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ diverge positivamente in $-\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ converge in $-\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ diverge positivamente in $-\infty$

Teorema del confronto

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f e g due funzioni di X in $\mathbb{R}$, regolari in x_0.
Valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Criterio del confronto

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g e h tre funzioni di X in $\mathbb{R}$.

Se

1. f e h sono regolari in x_0;
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$;
3. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

Inoltre

se

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$;
2. $\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq g(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

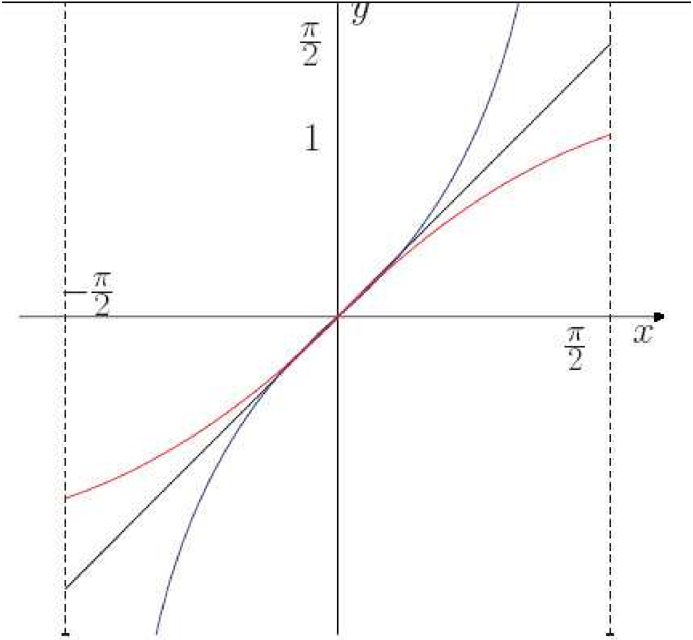
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty.$$

Se

1. $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$;
2. $\exists I \in I(x_0) : g(x) \leq h(x), \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty.$$



y
$\frac{\pi}{2}$
1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
x

Teorema della permanenza del segno

Teorema della permanenza del segno

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è regolare in x_0 valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) < 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) > 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\})$$

Teorema della permanenza del segno

Inoltre

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \leq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq 0$$

e

$$\exists I \in I(x_0) : f(x) \geq 0, \forall x \in X \cap (I - \{x_0\}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$$

Somma in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{somma} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ a + (\pm\infty) = \pm\infty, \\ +\infty + (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Operazioni algebriche in $\overline{\mathbb{R}}$

Differenza in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{differenza} \quad \begin{cases} +\infty - (-\infty) = +\infty, \\ -\infty - (+\infty) = -\infty, \\ a - (\pm\infty) = \mp\infty, \\ \pm\infty - a = \pm\infty, \\ +\infty - (+\infty) = \text{non definita} \\ -\infty - (-\infty) = \text{non definita.} \end{cases}$$

Prodotto in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{prodotto} \quad \begin{cases} +\infty \times (\pm\infty) = \pm\infty, \\ a \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definito}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ -\infty \times (\pm\infty) = \mp\infty \end{cases}$$

Divisione in $\overline{\mathbb{R}}$

$$\text{divisione} \quad \begin{cases} \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty} = \text{non definita;} \\ \dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0; \\ \text{non definita}, & a = 0; \\ \mp\infty, & a < 0. \end{cases} \\ \dfrac{a}{\pm\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Proposizione

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$f : X \to \mathbb{R}, \; g : X \to \mathbb{R}.$$

Se f e g sono regolari in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}, \; \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora la somma, il prodotto, il rapporto e la potenza tra le funzioni sono regolari.

Limite della somma, prodotto, rapporto e potenza di funzioni

Inoltre

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = l \pm m$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, se $g(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = l^m$ se $f(x) > 0, \forall x \in X - \{x_0\}$

purché $l \pm m$, $l \cdot m$, $\dfrac{l}{m}$, l^m abbiano senso in $\overline{\mathbb{R}}$.

Forme indeterminate

Restano escluse le forme indeterminate

$$\pm\infty - (\pm\infty),\ \pm\infty + (\mp\infty)$$

$$0 \cdot (\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{0}{0}$$

$$1^{(\pm\infty)},\ (+\infty)^0,\ 0^0$$

Limite destro

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X e

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Se la restrizione di f all'insieme $X_r = X \cap]x_0, +\infty)$ è regolare in x_0, si definisce **limite destro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_r.

Limite sinistro

Se la restrizione di f all'insieme $X_l = X \cap (-\infty, x_0[$ è regolare in x_0, si definisce **limite sinistro** di f al tendere di x a x_0

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

il limite della restrizione di f all'insieme X_l.

Esempio

Calcoliamo, se esiste:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

La funzione, pertanto, non è regolare in 0, ma ammette limite destro e sinistro.

S

iano $I =]a, b[$ e

$$f : I \to \mathbb{R}.$$

Se f è monotona in I allora

1. f è regolare in a e b;
2. f crescente $\Rightarrow$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in I} f(x); \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in I} f(x);$$
3. f decrescente $\Rightarrow$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in I} f(x); \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in I} f(x).$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \log_{10} x$$

Per la monotonia della funzione logaritmo si ha

$$\lim_{x \to 0} \log x = \inf \log x = -\infty$$

Esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Per la monotonia della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sup\left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$$

Calcoliamo i limiti di alcune funzioni elementari agli estremi del loro campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

In particolare si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$$